Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 13. Кривые и поверхности второго порядка

13.1. Аффинное пространство

Определение. Пусть: M — множество, $M \neq \varnothing$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $F\colon M \times M \implies L$. Далее будем писать $\overrightarrow{p_1p_2}$ вместо $F(p_1, p_2)$. Пусть:

1. $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3} = \overrightarrow{p_1p_3}$ при $p_1, p_2, p_3 \in M$;

2. $\forall p_1 \in M \forall x \in L \exists! p_2 \in M \Big(\overrightarrow{p_1p_2} = x\Big)$.

Будем говорить, что (M, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть $Q = (M, L, F)$. Обозначим, $\vec{Q} = L$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$h_{O,e}(p) = \Big[\overrightarrow{Op}\Big](e), \quad p \in Q.$$

Очевидно: $h_{O,e}$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_{O,e}) = Q$, $\mathrm{R}(h_{O,e}) = \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве Q; O — начало отсчёта координатной карты $h_{O,e}$; e — базис координатной карты $h_{O,e}$. Пусть $p \in Q$. Будем говорить, что: $\overrightarrow{Op}$ — радиус-вектор точки p; $h^1_{O,e}(p), \ldots, h^N_{O,e}(p)$ — аффинные координаты точки p.

Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q, $x_0 = h_{O,e}(O')$; $p \in Q$, $x = h_{O,e}(p)$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$, $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$x^k = \Big[\overrightarrow{Op}\Big]^k(e) = \Big[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'p}\Big]^k(e) = \Big[\overrightarrow{OO'}\Big]^k(e) + \Big[\overrightarrow{O'p}\Big]^k(e) =$$
$$\Big[\overrightarrow{OO'}\Big]^k(e) + \alpha^k_{k'}(e, e')\Big[\overrightarrow{O'p}\Big]^{k'}(e') = x^k_0 + \alpha^k_{k'}(e, e')\tilde{x}^{k'}.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) = N + 1$; $O_0 \in Q$, e_0 — базис пространства $\vec{Q}$, f_0 — базис пространства L.

1. Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$\beta(O, e; O', e') = \begin{pmatrix} \alpha(e, e') & h_{O,e}(O') \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно: $\beta(O,e;O',e') \in \mathbb{K}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\det\Big(\beta(O,e;O',e')\Big) = \det\Big(\alpha(e,e')\Big) \neq 0$; $\beta(O,e;O',e') = \tilde{I}$ тогда и только тогда, когда: $O = O'$, $e = e'$.

Пусть: $O, O', O'' \in Q$, e, e', e'' — базисы пространства $\vec{Q}$. **Покажем, что** $\beta(O,e;O',e')\beta(O',e';O'',e'') = \beta(O,e;O'',e'')$.

Пусть $k, k'' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') +$$
$$\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{k''}(O',e';O'',e'') = \alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^{k'}_{k''}(e',e'') = \alpha^k_{k''}(e,e'') = \beta^k_{k''}(O,e;O'',e'').$$

Пусть $k'' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') +$$
$$\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{k''}(O',e';O'',e'') = 0 = \beta^{N+1}_{k''}(O,e;O'',e'').$$

Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') +$$
$$\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O',e';O'',e'') = \alpha^k_{k'}(e,e')h^{k'}_{O',e'}(O'') + h^k_{O,e}(O') = h^k_{O,e}(O'') =$$
$$\beta^k_{N+1}(O,e;O'',e'').$$

Очевидно:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') +$$
$$\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O',e';O'',e'') = 1 = \beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O'',e'').$$

Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства $\vec{Q}$. Очевидно, $\beta(O,e;O',e')^{-1} = \beta(O',e';O,e)$.

2. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$f_k(O,e) = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta^{k_0}_k(O_0,e_0;O,e)(f_0)_{k_0}, \quad k = \overline{1,N+1}.$$

Так как $\det\Big(\beta(O_0,e_0;O,e)\Big) \neq 0$, то: $f(O,e)$ — базис пространства L, $\alpha\Big(f_0, f(O,e)\Big) = \beta(O_0,e_0;O,e)$. Очевидно: $f(O,e) = f_0$ тогда и только тогда, когда: $O = O_0$, $e = e_0$.

Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства $\vec{Q}$. **Покажем, что** $\alpha\Big(f(O,e), f(O',e')\Big) = \beta(O,e;O',e')$. Пусть $k' = \overline{1,N+1}$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \beta^k_{k'}(O,e;O',e')f_k(O,e) = \sum_{k=1}^{N+1} \beta^k_{k'}(O,e;O',e') \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta^{k_0}_k(O_0,e_0;O,e)(f_0)_{k_0} =$$
$$\sum_{k_0=1}^{N+1}\left(\sum_{k=1}^{N+1} \beta^{k_0}_k(O_0,e_0;O,e)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\right)(f_0)_{k_0} = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta^{k_0}_{k'}(O_0,e_0;O',e')(f_0)_{k_0} = f_{k'}(O',e').$$

Следовательно, $\alpha\Big(f(O,e), f(O',e')\Big) = \beta(O,e;O',e')$.

3. Обозначим:

$$\psi(p) = h^{k_0}_{O_0,e_0}(p)(f_0)_{k_0} + (f_0)_{N+1}, \quad p \in Q.$$

Очевидно: $\psi\colon Q \implies L$, ψ — обратимая функция.

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$; $p \in Q$. **Покажем, что:**

$$\psi(p) = h^k_{O,e}(p) f_k(O,e) + f_{N+1}(O,e).$$

Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\Big[\psi(p)\Big]^k\Big(f(O,e)\Big) = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta^k_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\Big[\psi(p)\Big]^{k_0}(f_0) = \sum_{k_0=1}^{N} \beta^k_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\Big[\psi(p)\Big]^{k_0}(f_0) +$$
$$\beta^k_{N+1}(O,e;O_0,e_0)\Big[\psi(p)\Big]^{N+1}(f_0) = \alpha^k_{k_0}(e,e_0) h^{k_0}_{O_0,e_0}(p) + h^k_{O,e}(O_0) = h^k_{O,e}(p).$$

Очевидно:

$$\Big[\psi(p)\Big]^{N+1}\Big(f(O,e)\Big) = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta^{N+1}_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\Big[\psi(p)\Big]^{k_0}(f_0) =$$
$$\sum_{k_0=1}^{N} \beta^{N+1}_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\Big[\psi(p)\Big]^{k_0}(f_0) + \beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O_0,e_0)\Big[\psi(p)\Big]^{N+1}(f_0) = 1.$$

Очевидно:

$$\psi(p) = \sum_{k=1}^{N+1}\Big[\psi(p)\Big]^k\Big(f(O,e)\Big) f_k(O,e) = \sum_{k=1}^{N}\Big[\psi(p)\Big]^k\Big(f(O,e)\Big) f_k(O,e) +$$
$$\Big[\psi(p)\Big]^{N+1}\Big(f(O,e)\Big) f_{N+1}(O,e) = h^k_{O,e}(p) f_k(O,e) + f_{N+1}(O,e).$$

13.2. Кривые и поверхности второго порядка

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$; $O_0 \in Q$, e_0 — базис пространства $\vec{Q}$, $A_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_0 = A_0^T$, $B_0 \in \mathbb{R}^N$, $C_0 \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = (A_0)_{k_0,m_0} h^{k_0}_{O_0,e_0}(p) h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + 2(B_0)_{m_0} h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + C_0, \quad p \in Q.$$

Будем говорить, что F — полином степени не выше 2 в пространстве Q. Пусть $A_0 \neq \Theta$. Будем говорить, что F — полином степени 2 в пространстве Q.

Определение. Пусть: $N = 2$ ($N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$); Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$. Будем говорить, что σ — кривая (поверхность) второго порядка в пространстве Q, если можно указать такой полином F степени 2 в пространстве Q, что $\sigma = \Big\{p\colon p \in Q \wedge F(p) = 0\Big\}$.

Замечание. Пусть: $A_1 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1 = A_1^T$, $B_1 \in \mathbb{R}^N$, $C_1 \in \mathbb{R}$; $A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_2 = A_2^T$, $B_2 \in \mathbb{R}^N$, $C_2 \in \mathbb{R}$; $(A_1)_{k,m}x^k x^m + 2(B_1)_m x^m + C_1 = (A_2)_{k,m}x^k x^m + 2(B_2)_m x^m + C_2$ при $x \in \mathbb{R}^N$. **Покажем, что:** $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.

Очевидно:

$$(A_1)_{k,m}x^k x^m + 2(B_1)_m x^m + C_1 = (A_2)_{k,m}x^k x^m + 2(B_2)_m x^m + C_2, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$(A_1)_{k,m}x^k x^m + 2(B_1)_m x^m + C_1 = (A_2)_{k,m}x^k x^m + 2(B_2)_m x^m + C_2, \quad x = \tilde{\theta};$$

$$C_1 = C_2.$$

Тогда: $(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m = (A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m$ при $x \in \mathbb{R}^N$.

Очевидно:

$$(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m = (A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$(A_1)_{k,m}(tx)^k(tx)^m + 2(B_1)_m(tx)^m = (A_2)_{k,m}(tx)^k(tx)^m + 2(B_2)_m(tx)^m,$$
$$t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^N;$$
$$t(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m = t(A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m, \quad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^N;$$
$$\lim_{t\to 0}\Big(t(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m\Big) = \lim_{t\to 0}\Big(t(A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m\Big), \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$2(B_1)_mx^m = 2(B_2)_mx^m, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$B_1 = B_2.$$

Тогда: $(A_1)_{k,m}x^kx^m = (A_2)_{k,m}x^kx^m$ при $x \in \mathbb{R}^N$. Так как: $A_1 = A_1^T$, $A_2 = A_2^T$, то $A_1 = A_2$.

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(L) = N+1$; $O_0 \in Q$, e_0 — базис пространства $\vec{Q}$, $A_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_0 = A_0^T$, $B_0 \in \mathbb{R}^N$, $C_0 \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = (A_0)_{k_0,m_0}h^{k_0}_{O_0,e_0}(p)h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + 2(B_0)_{m_0}h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + C_0, \quad p \in Q.$$

1. Обозначим:

$$D_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0^T \\ B_0 & C_0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно: $D_0 \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $D_0 = D_0^T$,

$$F(p) = \sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}} (D_0)_{k_0,m_0}\Big[\psi(p)\Big]^{k_0}\Big(f(O_0,e_0)\Big)\Big[\psi(p)\Big]^{m_0}\Big(f(O_0,e_0)\Big), \quad p \in Q.$$

Обозначим:

$$D_{k,m}(f) = \sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}} (D_0)_{k_0,m_0}\alpha^{k_0}_k\Big(f(O_0,e_0),f\Big)\alpha^{m_0}_m\Big(f(O_0,e_0),f\Big),$$
$$f \text{ — базис пространства } L,\ k,m = \overline{1,N+1}.$$

Очевидно: $D \in (TL)^0_2$, $D\Big(f(O_0,e_0)\Big) = D_0$; $D(f) = D(f)^T$ при: f — базис пространства L;

$$F(p) = \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(f)\Big[\psi(p)\Big]^k(f)\Big[\psi(p)\Big]^m(f), \quad f \text{ — базис пространства } L,\ p \in Q.$$

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$A_{k,m}(O,e) = D_{k,m}\Big(f(O,e)\Big), \quad k,m = \overline{1,N};$$
$$B_m(O,e) = D_{N+1,m}\Big(f(O,e)\Big), \quad m = \overline{1,N};$$
$$C(O,e) = D_{N+1,N+1}\Big(f(O,e)\Big).$$

Очевидно: $A(O,e) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A(O,e) = A(O,e)^T$; $B(O,e) \in \mathbb{R}^N$, $B_m(O,e) = D_{N+1,m}\Big(f(O,e)\Big) = D_{m,N+1}\Big(f(O,e)\Big)$ при $m = \overline{1,N}$; $C(O,e) \in \mathbb{R}$;

$$F(p) = A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2B_m(O,e)h^m_{O,e}(p) + C(O,e), \quad p \in Q.$$

Очевидно: $A(O_0,e_0)=A_0$, $B(O_0,e_0)=B_0$, $C(O_0,e_0)=C_0$.
Пусть: $O,O'\in Q$, e,e' — базисы пространства Q. **Покажем, что:**

$$A_{k',m'}(O',e')=A_{k,m}(O,e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e'),\quad k',m'=\overline{1,N};$$
$$B_{m'}(O',e')=\Big(A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O')+B_m(O,e)\Big)\alpha^m_{m'}(e,e'),\quad m'=\overline{1,N};$$
$$C(O',e')=A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O')h^m_{O,e}(O')+2B_m(O,e)h^m_{O,e}(O')+C(O,e).$$

Пусть $k',m'=\overline{1,N}$. Тогда:

$$A_{k',m'}(O',e')=D_{k',m'}\Big(f(O',e')\Big)=$$
$$\sum_{k,m=1}^{N+1}D_{k,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')=$$
$$\sum_{k,m=1}^{N}D_{k,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{m=1}^{N}D_{N+1,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{k=1}^{N+1}D_{k,N+1}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e')=$$
$$A_{k,m}(O,e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e').$$

Пусть $m'=\overline{1,N}$. Тогда:

$$B_{m'}(O',e')=D_{N+1,m'}\Big(f(O',e')\Big)=$$
$$\sum_{k,m=1}^{N+1}D_{k,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')=$$
$$\sum_{k,m=1}^{N}D_{k,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{m=1}^{N}D_{N+1,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{k=1}^{N+1}D_{k,N+1}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e')=$$
$$\Big(A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O')+B_m(O,e)\Big)\alpha^m_{m'}(e,e').$$

Очевидно:

$$C(O',e')=D_{N+1,N+1}\Big(f(O',e')\Big)=$$
$$\sum_{k,m=1}^{N+1}D_{k,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e')=$$
$$\sum_{k,m=1}^{N}D_{k,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{m=1}^{N}D_{N+1,m}\Big(f(O,e)\Big)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e')+$$

$$\sum_{k=1}^{N} D_{k,N+1}\Big(f(O,e)\Big)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')+$$
$$D_{N+1,N+1}\Big(f(O,e)\Big)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e') =$$
$$A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e}(O')h^{m}_{O,e}(O') + 2B_{m}(O,e)h^{m}_{O,e}(O') + C(O,e).$$

2. Пусть $O \in Q$. Можно указать такой математический объект A_O, что: A_O — билинейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $[A_O](e) = A(O,e)$ при: e — базис пространства $\vec{Q}$. Пусть e — базис пространства $\vec{Q}$. Так как $A(O,e) = A(O,e)^T$, то A_O — симметричная билинейная форма. Очевидно:

$$A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e}(p)h^{m}_{O,e}(p) = A_O\Big(\overrightarrow{Op},\overrightarrow{Op}\Big), \quad p \in Q.$$

Можно указать такой математический объект B_O, что: B_O — линейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $[B_O](e) = B(O,e)$ при: e — базис пространства $\vec{Q}$. Пусть e — базис пространства $\vec{Q}$. Очевидно:

$$B_{m}(O,e)h^{m}_{O,e}(p) = B_O\Big(\overrightarrow{Op}\Big), \quad p \in Q.$$

Можно указать такой математический объект C_O, что: $C_O = C(O,e)$ при: e — базис пространства $\vec{Q}$. Пусть e — базис пространства $\vec{Q}$. Очевидно: $C_O = C(O,e) \in \mathbb{R}$;

$$F(p) = A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e(p)}h^{m}_{O,e}(p) + 2B_{m}(O,e)h^{m}_{O,e}(p) + C(O,e) =$$
$$A_O\Big(\overrightarrow{Op},\overrightarrow{Op}\Big) + 2B_O\Big(\overrightarrow{Op}\Big) + C_O, \quad p \in Q.$$

Пусть $O, O' \in Q$. Очевидно:

$$A_{O'} = A_O;$$
$$B_{O'}(x) = A_O\Big(\overrightarrow{OO'},x\Big) + B_O(x), \quad x \in \vec{Q};$$
$$C_{O'} = A_O\Big(\overrightarrow{OO'},\overrightarrow{OO'}\Big) + 2B_O\Big(\overrightarrow{OO'}\Big) + C_O.$$

3. Пусть $O \in Q$. Можно указать такой математический объект $\hat{A}_O$, что: $\hat{A}_O \in \mathrm{Lin}(\vec{Q},\vec{Q})$, $A_O(x,y) = (x,\hat{A}_O y)$ при $x,y \in \vec{Q}$. Так как A_O — симметричная билинейная форма, то $\hat{A}_O$ — самосопряжённый оператор.

Можно указать такой математический объект $\vec{B}_O$, что: $\vec{B}_O \in \vec{Q}$, $B_O(x) = (\vec{B}_O, x)$ при $x \in \vec{Q}$. Очевидно:

$$F(p) = A_O\Big(\overrightarrow{Op},\overrightarrow{Op}\Big) + 2B_O\Big(\overrightarrow{Op}\Big) + C_O = \Big(\overrightarrow{Op},\hat{A}_O\overrightarrow{Op}\Big) + 2\Big(\vec{B}_O,\overrightarrow{Op}\Big) + C_O, \quad p \in Q.$$

Пусть $O, O' \in Q$. Очевидно:

$$\hat{A}_{O'} = \hat{A}_O;$$
$$\vec{B}_{O'} = \hat{A}_O\overrightarrow{OO'} + \vec{B}_O;$$
$$C_{O'} = \Big(\overrightarrow{OO'},\hat{A}_O\overrightarrow{OO'}\Big) + 2\Big(\vec{B}_O,\overrightarrow{OO'}\Big) + C_O.$$

4. Пусть $A_0 \neq \Theta$. Тогда: $A(O, e) \neq \Theta$ при: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$.

Пусть $O' \in Q$. Так как $\hat{A}_{O'}$ — самосопряжённый оператор, то существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — правый ортонормированный базис пространства $\vec{Q}$, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}_{O'}$. Тогда $[\hat{A}_{O'}](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то: $A(O', e') = [A_{O'}](e') = [\hat{A}_{O'}](e')$. Тогда $A(O', e')$ — диагональная матрица. Пусть: $\tilde{A} = A(O', e')$, $\tilde{B} = B(O', e')$, $\tilde{C} = C(O', e')$, $p \in Q$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C}.$$

Так как $\tilde{A} \neq \Theta$, то без ограничения общности можно считать, что существует такой номер $r = \overline{1, N}$, что: $\tilde{A}_{k,k} \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$; $\tilde{A}_{k,k} = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}\left(\tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}\right)^2 + \sum_{k=r+1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}}.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A};$$
$$\tilde{\tilde{B}}_k = 0, \quad k = \overline{1, r};$$
$$\tilde{\tilde{B}}_k = \tilde{B}_k, \quad k = \overline{r+1, N};$$
$$\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}};$$
$$\tilde{\tilde{x}}^k = \tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}, \quad k = \overline{1, r};$$
$$\tilde{\tilde{x}}^k = \tilde{x}^k, \quad k = \overline{r+1, N}.$$

Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{A}}_{k,k}(\tilde{\tilde{x}}^k)^2 + \sum_{k=r+1}^{N} 2\tilde{\tilde{B}}_k\tilde{\tilde{x}}^k + \tilde{\tilde{C}}.$$

Обозначим, $e'' = e'$. Очевидно, можно указать такую точку $O'' \in Q$, что $\tilde{\tilde{x}} = h_{O'',e''}(p)$. В силу произвольности выбора точки $p \in Q$: $A(O'', e'') = \tilde{\tilde{A}}$, $B(O'', e'') = \tilde{\tilde{B}}$, $C(O'', e'') = \tilde{\tilde{C}}$.

Пусть: $\tilde{\tilde{B}}_k = 0$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{A}}_{k,k}(\tilde{\tilde{x}}^k)^2 + \tilde{\tilde{C}}.$$

Пусть $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{B}}_k \neq 0)$. Тогда: $r = \overline{1, N-1}$, $\exists k = \overline{r+1, N}(\tilde{\tilde{B}}_k \neq 0)$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tilde{B}}_{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{A}}_{k,k}(\tilde{\tilde{x}}^k)^2 + 2\tilde{\tilde{B}}_{r+1}\left(\tilde{\tilde{x}}^{r+1} + \frac{\tilde{\tilde{C}}}{2\tilde{\tilde{B}}_{r+1}}\right) + \sum_{k=r+2}^{N} 2\tilde{\tilde{B}}_k\tilde{\tilde{x}}^k.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \tilde{\tilde{A}};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{B}}} = \tilde{\tilde{B}};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{C}}} = 0;$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{x}}}^{r+1} = \tilde{\tilde{x}}^{r+1} + \frac{\tilde{\tilde{C}}}{2\tilde{\tilde{B}}_{r+1}};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{x}}}^{k} = \tilde{\tilde{x}}^{k}, \quad k = \overline{1,N},\ k \neq r+1.$$

Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{\tilde{A}}}_{k,k} (\tilde{\tilde{\tilde{x}}}^k)^2 + \sum_{k=r+1}^{N} 2\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_k \tilde{\tilde{\tilde{x}}}^k.$$

Обозначим, $e''' = e''$. Очевидно, можно указать такую точку $O''' \in Q$, что $\tilde{\tilde{\tilde{x}}} = h_{O''',e'''}(p)$. В силу произвольности выбора точки $p \in Q$: $A(O''',e''') = \tilde{\tilde{\tilde{A}}}$, $B(O''',e''') = \tilde{\tilde{\tilde{B}}}$, $C(O''',e''') = \tilde{\tilde{\tilde{C}}}$.

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$; l — кривая второго порядка в пространстве Q. Тогда можно указать такой полином F степени 2 в пространстве Q, что $l = \Big\{p\colon p \in Q \wedge F(p) = 0\Big\}$.

Как показано выше, существует такая точка $O \in Q$, такой правый ортонормированный базис e пространства $\vec{Q}$ и такое число $r = \overline{1,2}$, что: $A(O,e)$ — диагональная матрица, $A_{k,k}(O,e) \neq 0$, $B_k(O,e) = 0$ при $k = \overline{1,r}$; $A_{k,k}(O,e) = 0$ при $k = \overline{r+1,2}$. Тогда в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$\sum_{k=1}^{r} A_{k,k}(x^k)^2 + \sum_{k=r+1}^{2} 2B_k x^k + C = 0.$$

1. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C < 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2}, C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$

$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} + \frac{(x^2)^2}{\frac{-C}{A_{2,2}}} = 1;$$

$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} + \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}} \leqslant \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}$. Тогда l — эллипс.

2. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2} \neq 0$, $C = 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0.$$

Так как: $A_{1,1}, A_{2,2} < 0$ либо $A_{1,1}, A_{2,2} > 0$, то l — множество, состоящее из одной точки.

3. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C > 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2}, C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $\operatorname{sgn}(C) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}, A_{2,2}, C < 0$ либо $A_{1,1}, A_{2,2}, C > 0$, то $l = \varnothing$.

4. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, $A_{1,1}C \neq 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2}, C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Тогда в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} - \frac{(x^2)^2}{\frac{C}{A_{2,2}}} = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} - \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, l — гипербола.

5. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2} \neq 0$, $C = 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0;$$
$$|A_{1,1}|\,(x^1)^2 - |A_{2,2}|\,(x^2)^2 = 0;$$
$$\left(\sqrt{|A_{1,1}|} \cdot x^1 - \sqrt{|A_{2,2}|} \cdot x^2\right)\left(\sqrt{|A_{1,1}|} \cdot x^1 + \sqrt{|A_{2,2}|} \cdot x^2\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{|A_{1,1}|}, \sqrt{|A_{2,2}|} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, имеющих одну общую точку.

6. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 \neq 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1}, B_2 \neq 0$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + 2B_2x^2 + C = 0.$$

Пусть: $\delta = \operatorname{sgn}\Big(A_{1,1}B_2\Big)$, $p \in Q$, $x = h_{O,e}(p)$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}(x^1)^2 + 2B_2x^2 + C = A_{1,1}(\delta x^1)^2 - 2B_2\delta\left(-\delta x^2 - \frac{C}{2B_2\delta}\right).$$

Обозначим: $\tilde{x}^1 = -\delta x^2 - \frac{C}{2B_2\delta}$, $\tilde{x}^2 = \delta x^1$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2B_2\delta \cdot \tilde{x}^1.$$

Можно указать такую точку $O' \in Q$ и такой правый ортонормированный базис e' пространства Q, что $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда в координатной карте $h_{O',e'}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2B_2\delta \cdot \tilde{x}^1 = 0;$$
$$(\tilde{x}^2)^2 = 2\frac{B_2}{A_{1,1}}\delta \cdot \tilde{x}^1.$$

Так как $\frac{B_2}{A_{1,1}}\delta > 0$, то l — парабола.

7. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C < 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0;$$
$$(x^1)^2 - \frac{-C}{A_{1,1}} = 0;$$
$$\left(x^1 - \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\,\right)\left(x^1 + \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\,\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, не имеющих общих точек.

8. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C = 0$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 = 0;$$
$$x^1 = 0.$$

Тогда l — прямая.

9. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C > 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}, C < 0$ либо $A_{1,1}, C > 0$, то $l = \varnothing$.

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(L) = N+1$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.

Пусть $O \in Q$. Обозначим через $a_0(O), \ldots, a_N(O)$ — коэффициенты полинома $F_{\hat{A}_O}$. Пусть e — ортонормированный базис пространства $\vec{Q}$. Тогда:

$$a_0(O) = \det\Big([\hat{A}_O](e)\Big) = \det\Big([A_O](e)\Big) = \det\Big(A(O,e)\Big),$$
$$a_{N-1}(O) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}\Big([\hat{A}_O](e)\Big) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}\Big([A_O](e)\Big) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}\Big(A(O,e)\Big),$$
$$a_N(O) = (-1)^N.$$

Пусть: $O \in Q$, e — ортонормированный базис пространства Q. Обозначим: $I_k(O,e) = (-1)^{N-k}a_{N-k}$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда: $I_1(O,e) = \operatorname{tr}\Big(A(O,e)\Big)$, $I_N(O,e) = \det\Big(A(O,e)\Big)$. Обозначим, $I_{N+1}(O,e) = \det\Big(D\Big(f(O,e)\Big)\Big)$.

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(L) = N+1$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.*

Справедливо утверждение: $I_k(O',e') = I_k(O,e)$ при: $O, O' \in Q$, e, e' — ортонормированные базисы пространства Q, $k = \overline{1,N+1}$.

Доказательство. Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — ортонормированные базисы пространства Q.

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда: $I_k(O', e') = (-1)^{N-k} a_{N-k}(O') = (-1)^{N-k} a_{N-k}(O) = I_k(O, e)$.

Так как e, e' — ортонормированные базисы, то:

$$\alpha(e, e')^T g(e) \alpha(e, e') = g(e'),$$
$$\alpha(e, e')^T \tilde{I} \alpha(e, e') = \tilde{I},$$
$$\alpha(e, e')^T \alpha(e, e') = \tilde{I},$$
$$\det\Big(\alpha(e, e')\Big)^2 = 1.$$

Тогда:

$$I_{N+1}(O', e') = \det\Big(D\Big(f(O', e')\Big)\Big) = \det\Big(\beta(O, e; O', e')^T D\Big(f(O, e)\Big)\beta(O, e; O', e')\Big) =$$
$$\det\Big(\beta(O, e; O', e')\Big)^2 \det\Big(D\Big(f(O, e)\Big)\Big) = \det\Big(\alpha(e, e')\Big)^2 I_{N+1}(O, e) = I_{N+1}(O, e).$$

□

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.