Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 14. Общие сведения о группах

Определение. Пусть: G — множество, $F\colon G \times G \implies G$. Будем говорить, что F — двухместная алгебраическая операция на множестве G. Будем говорить, что (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией.

Определение. Пусть (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией. Будем писать $x * y$ вместо $F(x, y)$.

Будем говорить, что F — ассоциативная алгебраическая операция ((G, F) — ассоциативная алгебраическая система), если: $(x * y) * z = x * (y * z)$ при $x, y, z \in G$.

Будем говорить, что F — коммутативная алгебраическая операция ((G, F) — коммутативная алгебраическая система; (G, F) — абелева алгебраическая система), если: $x * y = y * x$ при $x, y \in G$.

Замечание.

1. Пусть (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией.

   Обычно алгебраическую операцию F называют умножением. В этом случае пишут xy вместо $F(x, y)$. Такую запись называют мультипликативной записью алгебраической операции.

   Иногда алгебраическую операцию F называют сложением. В этом случае пишут $x+y$ вместо $F(x, y)$. Такую запись называют аддитивной записью алгебраической операции.

   Чаще всего алгебраическую операцию F называют сложением, если F — коммутативная алгебраическая операция.
2. Пусть: (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией, алгебраическая операция F называется умножением. Будем говорить, что (G, F) — алгебраическая система с умножением.
3. Пусть: (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией, алгебраическая операция F называется сложением. Будем говорить, что (G, F) — алгебраическая система со сложением.

Определение. Пусть (G, F) — алгебраическая система с умножением.

Будем говорить, что e — правая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G (xe = x)$.

Обозначим, $E_r = \Big\{e\colon e \in G \wedge \forall x \in G (xe = x)\Big\}$.

Пусть $x \in G$. Будем говорить, что y — правый обратный элемент к элементу x в алгебраической системе (G, F), если: $y \in G$, $xy \in E_r$.

Будем говорить, что e — универсальная правая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G (xe = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G (xy = e)$.

Будем говорить, что e — левая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G(ex = x)$.

Обозначим, $E_l = \Big\{e \colon e \in G \wedge \forall x \in G(ex = x)\Big\}$.

Пусть $x \in G$. Будем говорить, что y — левый обратный элемент к элементу x в алгебраической системе (G, F), если: $y \in G$, $yx \in E_l$.

Будем говорить, что e — универсальная левая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G(ex = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(yx = e)$.

Замечание. Пусть (G, F) — алгебраическая система со сложением. Тогда: вместо правой единицы будет правый ноль; вместо множества правых единиц E_r будет множество правых нулей Θ_r; вместо правого обратного элемента будет правый противоположный элемент; вместо универсальной правой единицы будет универсальный правый ноль; вместо левой единицы будет левый ноль; вместо множества левых единиц E_l будет множество левых нулей Θ_l; вместо левого обратного элемента будет левый противоположный элемент; вместо универсальной левой единицы будет универсальный левый ноль.

Определение. Пусть: G — множество, $F \colon G \times G \implies G$. Будем писать xy вместо $F(x, y)$. Пусть:

1. $(xy)z = x(yz)$ при $x, y, z \in G$;
2. $\exists e \in G\Big(\forall x \in G(xe = x) \wedge \forall x \in G \exists y \in G(xy = e)\Big)$.

Будем говорить, что F — групповая операция на множестве G. Будем говорить, что (G, F) — группа.

Пусть (G, F) — группа. Можно указать такой элемент e, что: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = e)$. Пусть $x \in G$. Можно указать такой элемент $\varphi(x)$, что: $\varphi(x) \in G$, $x\varphi(x) = e$.

Утверждение. *Справедливы утверждения:*

1. $\forall x \in G\Big(\varphi(x)x = e\Big)$;
2. $\forall x \in G(ex = x)$;
3. $\forall a \in G \forall y \in G \exists! x \in G(ax = y)$;
4. $\forall a \in G \forall y \in G \exists! x \in G(xa = y)$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in G$. Тогда:

$$\varphi(x)x = \Big(\varphi(x)x\Big)e = \Big(\varphi(x)x\Big)\Big(\varphi(x)\varphi\Big(\varphi(x)\Big)\Big) = \Big(\Big(\varphi(x)x\Big)\varphi(x)\Big)\varphi\Big(\varphi(x)\Big) =$$
$$\Big(\varphi(x)\Big(x\varphi(x)\Big)\Big)\varphi\Big(\varphi(x)\Big) = \Big(\varphi(x)e\Big)\varphi\Big(\varphi(x)\Big) = \varphi(x)\varphi\Big(\varphi(x)\Big) = e.$$

2. Пусть $x \in G$. Тогда:

$$ex = \Big(x\varphi(x)\Big)x = x\Big(\varphi(x)x\Big) = xe = x.$$

3. Пусть $a, y \in G$. Пусть: $x_1, x_2 \in G$, $ax_1 = y$, $ax_2 = y$. Тогда:

$$\begin{gathered} ax_1 = y, \\ \varphi(a)(ax_1) = \varphi(a)y, \\ \bigl(\varphi(a)a\bigr)x_1 = \varphi(a)y, \\ ex_1 = \varphi(a)y, \\ x_1 = \varphi(a)y. \end{gathered}$$

Аналогично, $x_2 = \varphi(a)y$. Тогда: $x_1 = \varphi(a)y = x_2$.

Обозначим, $x = \varphi(a)y$. Тогда: $x \in G$, $ax = a\bigl(\varphi(a)y\bigr) = \bigl(a\varphi(a)\bigr)y = ey = y$.

4. Пусть $a, y \in G$. Пусть: $x_1, x_2 \in G$, $x_1a = y$, $x_2a = y$. Тогда:

$$\begin{gathered} x_1a = y, \\ (x_1a)\varphi(a) = y\varphi(a), \\ x_1\bigl(a\varphi(a)\bigr) = y\varphi(a), \\ x_1e = y\varphi(a), \\ x_1 = y\varphi(a). \end{gathered}$$

Аналогично, $x_2 = y\varphi(a)$. Тогда: $x_1 = y\varphi(a) = x_2$.

Обозначим, $x = y\varphi(a)$. Тогда: $x \in G$, $xa = \bigl(y\varphi(a)\bigr)a = y\bigl(\varphi(a)a\bigr) = ye = y$.

□

Замечание.

1. **Покажем, что** $E_r = \{e\}$. Так как: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$, то $e \in E_r$. Пусть $\tilde{e} \in E_r$. Тогда: $\tilde{e} \in G$, $e\tilde{e} = e$. Так как: $e \in G$, $ee = e$, то $\tilde{e} = e$.

Пусть $x \in G$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $x\varphi(x) = e \in E_r$, то $\varphi(x)$ — правый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Пусть y — правый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Тогда: $y \in G$, $xy \in E_r$. Следовательно: $y \in G$, $xy = e$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $x\varphi(x) = e$, то $y = \varphi(x)$.

2. **Покажем, что** $E_l = \{e\}$. Так как: $e \in G$, $\forall x \in G(ex = x)$, то $e \in E_l$. Пусть $\tilde{e} \in E_l$. Тогда: $\tilde{e} \in G$, $\tilde{e}e = e$. Так как: $e \in G$, $ee = e$, то $\tilde{e} = e$.

Пусть $x \in G$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $\varphi(x)x = e \in E_l$, то $\varphi(x)$ — левый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Пусть y — левый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Тогда: $y \in G$, $yx \in E_l$. Следовательно: $y \in G$, $yx = e$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $\varphi(x)x = e$, то $y = \varphi(x)$.

3. Будем говорить, что $\tilde{e}$ — единица группы (G, F), если $\tilde{e}$ — правая единица группы (G, F).

Пусть $x \in G$. Будем говорить, что y — обратный элемент к элементу x в группе (G, F), если y — правый обратный элемент к элементу x в группе (G, F).

Замечание. Пусть (G, F) — группа.

1. Обозначим через e единицу группы (G, F). Пусть $x \in G$. Обозначим через x^{-1} обратный элемент к элементу x в группе (G, F).

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_r \in G$. Так как:

$$\begin{gathered} (x_1 \cdots x_r)(x_r^{-1} \cdots x_1^{-1}) = (x_1 \cdots x_{r-1})(x_r x_r^{-1})(x_{r-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}) = \\ (x_1 \cdots x_{r-1})e(x_{r-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}) = (x_1 \cdots x_{r-1})(x_{r-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}) = \cdots = x_1 x_1^{-1} = e, \end{gathered}$$

то $(x_1 \cdots x_r)^{-1} = x_r^{-1} \cdots x_1^{-1}$.

3. Пусть $x \in G$. Пусть: $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$; $x_1, \ldots, x_n = x$. Обозначим, $x^n = x_1 \cdots x_n$. Пусть $n = 0$. Обозначим, $x^n = e$. Пусть: $n \in \mathbb{Z}$, $n \leqslant -1$; $x_1, \ldots, x_n = x^{-1}$. Обозначим, $x^n = x_1 \cdots x_n$.

Замечание. Пусть: (G, F) — группа; алгебраическая операция F называется сложением. Тогда: вместо единицы e будет ноль θ; вместо обратного элемента x^{-1} будет противоположный элемент $-x$; вместо степени x^n будет кратное nx.

Определение. Пусть (G, F) — группа. Будем говорить, что Q — подгруппа группы (G, F), если:

1. $Q \subseteq G$;
2. $Q \neq \varnothing$;
3. $xy \in Q$ при $x, y \in Q$;
4. $x^{-1} \in Q$ при $x \in Q$.

Утверждение. *Пусть: (G, F) — группа; Q — подгруппа группы (G, F). Тогда $e \in Q$.*

Доказательство. Так как Q — подгруппа группы (G, F), то: $Q \subseteq G$, $Q \neq \varnothing$, $\forall x \in Q \forall y \in Q (xy \in Q)$, $\forall x \in Q (x^{-1} \in Q)$.

Так как $Q \neq \varnothing$, то можно указать такой элемент x, что $x \in Q$. Тогда: $e = xx^{-1} \in Q$. □

Утверждение. *Пусть (G, F) — группа.*

1. Пусть Q — подгруппа группы (G, F). Тогда: $Q \subseteq G$, $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$ — группа; e — единица группы $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$ при $x \in Q$.

2. Пусть: $Q \subseteq G$, $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$ — группа. Тогда Q — подгруппа группы (G, F).

Доказательство.

1. Так как Q — подгруппа группы (G, F), то: $Q \subseteq G$, $e \in Q$, $\forall x \in Q \forall y \in Q (xy \in Q)$, $\forall x \in Q (x^{-1} \in Q)$.

Так как $Q \subseteq G$, то: Q — множество, $F|_{Q \times Q}$ — функция, $\mathrm{D}\big(F|_{Q \times Q}\big) = (Q \times Q) \cap (G \times G) = Q \times Q$. Пусть $x, y \in Q$. Тогда: $F|_{Q \times Q}(x, y) = F(x, y) \in Q$. Следовательно, $\mathrm{R}\big(F|_{Q \times Q}\big) \subseteq Q$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q \times Q}(x, y)$ при $x, y \in Q$.

Пусть $x, y, z \in Q$. Тогда: $(x \otimes y) \otimes z = (xy)z = x(yz) = x \otimes (y \otimes z)$.

Пусть $x \in Q$. Тогда: $x \otimes e = xe = x$, $x \otimes x^{-1} = xx^{-1} = e$. Итак: $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$ — группа; e — единица группы $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$ при $x \in Q$.

2. По условию, $Q \subseteq G$. Так как $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$ — группа, то $Q \neq \varnothing$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q \times Q}(x, y)$ при $x, y \in Q$. Обозначим через e_Q единицу группы $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$. Пусть $x \in Q$. Обозначим через $\varphi_Q(x)$ — обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q, F|_{Q \times Q}\big)$.

Пусть $x, y \in Q$. Тогда: $xy = x \otimes y \in Q$.

Очевидно: $e_Q e_Q = e_Q \otimes e_Q = e_Q$. Так как $e_Q e = e_Q$, то $e_Q = e$. Пусть $x \in Q$. Очевидно: $x\varphi_Q(x) = x \otimes \varphi_Q(x) = e_Q = e$. Так как $xx^{-1} = e$, то $\varphi_Q(x) = x^{-1}$. Тогда: $x^{-1} = \varphi_Q(x) \in Q$. Итак, Q — подгруппа группы (G, F).

□

Утверждение. *Пусть:* (G,F) *— группа;* $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *— не пустое семейство подгрупп группы* (G,F)*;* $D = \bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$*. Тогда* D *— подгруппа группы* (G,F)*.*

Доказательство. Так как: $Q_\alpha \subseteq G$ при $\alpha \in I$, то $D \subseteq G$. Так как: $e \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$, то $e \in D$. Тогда $D \neq \varnothing$.

Пусть: $x, y \in D$; $\alpha \in I$. Тогда $x, y \in Q_\alpha$. Следовательно, $xy \in Q_\alpha$. Тогда $xy \in D$.

Пусть: $x \in D$; $\alpha \in I$. Тогда $x \in Q_\alpha$. Следовательно, $x^{-1} \in Q_\alpha$. Тогда $x^{-1} \in D$. Итак, D — подгруппа группы (G,F). $\square$

Утверждение. *Пусть:* (G,F) *— группа;* Q_1 *— подгруппа группы* (G,F)*.*

1. Пусть Q_2 *— подгруппа группы* $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$*. Тогда:* $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подгруппа группы* (G,F)*.*

2. Пусть: $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подгруппа группы* (G,F)*. Тогда* Q_2 *— подгруппа группы* $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$*.*

Доказательство.

1. Так как Q_1 — подгруппа группы (G,F), то: $Q_1 \subseteq G$, $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ — группа; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ при $x \in Q_1$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q_1\times Q_1}(x,y)$ при $x, y \in Q_1$. Пусть $x \in Q_1$. Обозначим через $\varphi_{Q_1}(x)$ обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$.

Так как Q_2 — подгруппа группы $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$, то: $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Так как: $Q_1 \subseteq G$, $Q_2 \subseteq Q_1$, то $Q_2 \subseteq G$.

Пусть $x, y \in Q_2$. Тогда: $xy = x \otimes y \in Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Тогда: $x^{-1} = \varphi_{Q_1}(x) \in Q_2$. Итак: $Q_2 \subseteq Q_1$, Q_2 — подгруппа группы (G,F).

2. Так как Q_1 — подгруппа группы (G,F), то: $Q_1 \subseteq G$, $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ — группа; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ при $x \in Q_1$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q_1\times Q_1}(x,y)$ при $x, y \in Q_1$. Пусть $x \in Q_1$. Обозначим через $\varphi_{Q_1}(x)$ обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$.

По условию, $Q_2 \subseteq Q_1$. Так как Q_2 — подгруппа группы (G,F), то $Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть $x, y \in Q_2$. Тогда: $x \otimes y = xy \in Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Тогда: $\varphi_{Q_1}(x) = x^{-1} \in Q_2$. Итак, Q_2 — подгруппа группы $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$. $\square$

Замечание. Пусть (G,F) — группа.

1. Покажем, что G — подгруппа группы (G,F). Очевидно, $G \subseteq G$. Так как (G,F) — группа, то $G \neq \varnothing$.

Пусть $x, y \in G$. Тогда $xy \in G$.

Пусть $x \in G$. Тогда $x^{-1} \in G$. Итак, G — подгруппа группы (G,F).

2. Покажем, что $\{e\}$ — подгруппа группы (G,F). Очевидно: $\{e\} \subseteq G$, $\{e\} \neq \varnothing$.

Пусть $x, y \in \{e\}$. Тогда $x, y = e$. Следовательно: $xy = ee = e \in \{e\}$.

Пусть $x \in \{e\}$. Тогда $x = e$. Следовательно: $x^{-1} = e^{-1} = e \in \{e\}$. Итак, $\{e\}$ — подгруппа группы (G,F).

Замечание (примеры).

1. Пусть M — множество. Обозначим через $S(M)$ множество всех функций σ, удовлетворяющих условиям: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Обозначим:

$F(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1\circ\sigma_2$ при $\sigma_1,\sigma_2\in S(M)$; $e(x)=x$ при $x\in M$. Тогда: $\bigl(S(M),F\bigr)$ — группа; e — единичный элемент группы $\bigl(S(M),F\bigr)$; σ^{-1} — обратный элемент к элементу σ в группе $\bigl(S(M),F\bigr)$ при $\sigma\in S(M)$.

Очевидно: $S(M)$ — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F)=S(M)\times S(M)$. Пусть $\sigma_1,\sigma_2\in S(M)$. Тогда: $\sigma_1\sigma_2$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma_1\sigma_2)=M$, $\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)\subseteq M$. Пусть $z\in M$. Так как $\mathrm{R}(\sigma_1)=M$, то можно указать такой элемент y, что: $y\in M$, $z=\sigma_1(y)$. Так как $\mathrm{R}(\sigma_2)=M$, то можно указать такой элемент x, что: $x\in M$, $y=\sigma_2(x)$. Тогда: $x\in M$, $z=\sigma_1\bigl(\sigma_2(x)\bigr)$; $x\in M$, $z=(\sigma_1\sigma_2)(x)$; $z\in\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)$. Следовательно, $M\subseteq\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)\subseteq M$, $M\subseteq\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)$, то $\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)=M$. Тогда $\sigma_1\sigma_2\in S(M)$. Следовательно, $\mathrm{R}(F)\subseteq S(M)$.

Пусть $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in S(M)$. Тогда $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3=\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$.

Очевидно, $e\in S(M)$. Пусть $\sigma\in S(M)$. Тогда: $(\sigma e)(x)=\sigma\bigl(e(x)\bigr)=\sigma(x)$ при $x\in M$; $(\sigma\sigma^{-1})(x)=\sigma\bigl(\sigma^{-1}(x)\bigr)=x=e(x)$ при $x\in M$. Итак: $\bigl(S(M),F\bigr)$ — группа; e — единичный элемент группы $\bigl(S(M),F\bigr)$; σ^{-1} — обратный элемент к элементу σ в группе $\bigl(S(M),F\bigr)$ при $\sigma\in S(M)$.

2. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; (L,F_1,F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Тогда: (L,F_1) — группа; θ — нулевой элемент группы (L,F_1) (алгебраическая операция F_1 называется сложением); $-x$ — противоположный элемент к элементу x в группе (L,F_1) при $x\in L$.

Так как (L,F_1,F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то: L — множество, $F_1\colon L\times L\implies L$.

Пусть $x,y,z\in L$. Тогда: $(x+y)+z=x+(y+z)$.

Пусть $x\in L$. Тогда: $x+\theta=x$, $x+(-x)=\theta$. Итак: (L,F_1) — группа; θ — нулевой элемент группы (L,F_1); $-x$ — противоположный элемент к элементу x в группе (L,F_1) при $x\in L$.

3. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $N\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A)\neq0$. Обозначим: $F(A,B)=AB$ при $A,B\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}),F\bigr)$ — группа; I — единица группы $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}),F\bigr)$; A^{-1} — обратный элемент к элементу A в группе $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}),F\bigr)$ при $A\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Очевидно: $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F)=\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})\times\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Пусть $A,B\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $AB\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(AB)=\det(A)\det(B)\neq0$. Следовательно, $AB\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда $\mathrm{R}(F)\subseteq\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Пусть $A,B,C\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда $(AB)C=A(BC)$.

Очевидно, $I\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Пусть $A\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $AI=A$, $AA^{-1}=I$. Итак: $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}),F\bigr)$ — группа; I — единица группы $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}),F\bigr)$; A^{-1} — обратный элемент к элементу A в группе $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}),F\bigr)$ при $A\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

4. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $N\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$ множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A)=1$. Тогда $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Пусть $A\in\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A)=1\neq0$. Следовательно, $A\in\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})\subseteq\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Так как $I\in\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$, то $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})\neq\varnothing$.

Пусть $A,B\in\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $AB\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(AB)=\det(A)\det(B)=1$. Следовательно, $AB\in\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$.

Пусть $A\in\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $A^{-1}\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A^{-1})=\bigl(\det(A)\bigr)^{-1}=1$. Следовательно,

$A^{-1} \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Итак, $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

5. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через O_N множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $AA^T = I$. Тогда O_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.

Пусть $A \in \mathrm{O}_N$. Тогда: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $AA^T = I$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det(AA^T) = \det(I)$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det(A)\det(A^T) = 1$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Следовательно, $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. Тогда $\mathrm{O}_N \subseteq \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. Так как $I \in \mathrm{O}_N$, то $\mathrm{O}_N \neq \varnothing$.

Пусть $A, B \in \mathrm{O}_N$. Тогда: $AB \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $(AB)(AB)^T = A(BB^T)A^T = AIA^T = AA^T = I$. Следовательно, $AB \in \mathrm{O}_N$.

Пусть $A \in \mathrm{O}_N$. Тогда: $A^{-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^T = A^{-1}A = I$. Следовательно, $A^{-1} \in \mathrm{O}_N$. Итак, O_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.

6. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через SO_N множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $AA^T = I$, $\det(A) = 1$. Тогда: SO_N — подгруппа группы O_N, SO_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$.

Очевидно, $\mathrm{SO}_N = \mathrm{O}_N \cap \mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$. Тогда: SO_N — подгруппа группы O_N, SO_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$.

7. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через U_N множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A\overline{A^T} = I$. Тогда U_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$.

Пусть $A \in \mathrm{U}_N$. Тогда: $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A\overline{A^T} = I$; $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\det\Bigl(A\overline{A^T}\Bigr) = \det(I)$; $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\det(A)\det\Bigl(\overline{A^T}\Bigr) = 1$; $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Следовательно, $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. Тогда $\mathrm{U}_N \subseteq \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. Так как $I \in \mathrm{U}_N$, то $\mathrm{U}_N \neq \varnothing$.

Пусть $A, B \in \mathrm{U}_N$. Тогда: $AB \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $(AB)\overline{(AB)^T} = A\Bigl(B\overline{B^T}\Bigr)\overline{A^T} = AI\overline{A^T} = A\overline{A^T} = I$. Следовательно, $AB \in \mathrm{U}_N$.

Пусть $A \in \mathrm{U}_N$. Тогда: $A^{-1} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A^{-1}\overline{(A^{-1})^T} = A^{-1}\overline{\Bigl(\overline{A^T}\Bigr)^T} = A^{-1}A = I$. Следовательно, $A^{-1} \in \mathrm{U}_N$. Итак, U_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$.

8. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через SU_N множество всех матриц, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A\overline{A^T} = I$, $\det(A) = 1$. Тогда: SU_N — подгруппа группы U_N, SU_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{C})$.

Очевидно, $\mathrm{SU}_N = \mathrm{U}_N \cap \mathrm{SL}_N(\mathbb{C})$. Тогда: SU_N — подгруппа группы U_N, SU_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{C})$.

9. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через $Q(\alpha)$ матрицу, удовлетворяющую условиям: $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$; $Q_1^1(\alpha) = \mathrm{ch}(\alpha)$, $Q_1^2(\alpha) = \mathrm{sh}(\alpha)$, $Q_2^1(\alpha) = \mathrm{sh}(\alpha)$, $Q_2^2(\alpha) = \mathrm{ch}(\alpha)$; $Q_m^k(\alpha) = \delta_m^k$ при: $k, m = \overline{1, N+1}$, $k \geqslant 3 \vee m \geqslant 3$. Иными словами, обозначим:

$$Q(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) & \mathrm{sh}(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{sh}(\alpha) & \mathrm{ch}(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим, $\Lambda_{1,N} = \mathrm{R}(Q)$. Тогда $\Lambda_{1,N}$ — подгруппа группы $\mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда: $Q(\alpha)Q(\beta) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$; $\Bigl(Q(\alpha)Q(\beta)\Bigr)_1^1 = \mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta) + \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) = \mathrm{ch}(\alpha+\beta)$, $\Bigl(Q(\alpha)Q(\beta)\Bigr)_1^2 = \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta) + \mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) = \mathrm{sh}(\alpha+\beta)$, $\Bigl(Q(\alpha)Q(\beta)\Bigr)_2^1 = \mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) + \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta) = \mathrm{sh}(\alpha+\beta)$, $\Bigl(Q(\alpha)Q(\beta)\Bigr)_2^2 = \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) + \mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta) = \mathrm{ch}(\alpha+\beta)$; $\Bigl(Q(\alpha)Q(\beta)\Bigr)_m^k = \delta_m^k$ при: $k, m = \overline{1, N+1}$, $k \geqslant 3 \vee m \geqslant 3$. Следовательно, $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha+\beta)$. Очевидно, $Q(0) = I$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда: $Q(\alpha)Q(-\alpha) = Q(0) = I$. Следовательно, $Q(\alpha)^{-1} = Q(-\alpha)$.

Пусть $A \in \Lambda_{1,N}$. Тогда можно указать такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $A = Q(\alpha)$. Следовательно: $A = Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\det(A) = \det\Big(Q(\alpha)\Big) = \Big(\mathrm{ch}(\alpha)\Big)^2 - \Big(\mathrm{sh}(\alpha)\Big)^2 = 1$. Тогда $A \in \mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$. Следовательно, $\Lambda_{1,N} \subseteq \mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$. Так как: $I = Q(0) \in \Lambda_{1,N}$, то $\Lambda_{1,N} \neq \varnothing$.

Пусть $A, B \in \Lambda_{1,N}$. Тогда можно указать такие числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что: $A = Q(\alpha)$, $B = Q(\beta)$. Следовательно: $AB = Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha+\beta) \in \Lambda_{1,N}$.

Пусть $A \in \Lambda_{1,N}$. Тогда можно указать такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $A = Q(\alpha)$. Следовательно: $A^{-1} = Q(\alpha)^{-1} = Q(-\alpha) \in \Lambda_{1,N}$. Итак, $\Lambda_{1,N}$ — подгруппа группы $\mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$.

Определение. Пусть: (G_1, F_1), (G_2, F_2) — алгебраические системы с умножением. Будем говорить, что ψ — гомоморфизм из (G_1, F_1) в (G_2, F_2), если: $\psi\colon G_1 \to G_2$; $xy \in \mathrm{D}(\psi)$ при $x, y \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ при $x, y \in \mathrm{D}(\psi)$.

Теорема (первая теорема о гомоморфизме). *Пусть: (G_1, F_1) — группа, (G_2, F_2) — алгебраическая система с умножением; ψ — гомоморфизм из (G_1, F_1) в (G_2, F_2), $\mathrm{D}(\psi) = G_1$. Тогда: $\Big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big)$ — группа; $\psi(e_1)$ — единица группы $\Big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big)$; $\psi(u^{-1})$ — обратный элемент к элементу $\psi(u)$ в группе $\Big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big)$ при $u \in G_1$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{R}(\psi) \subseteq G_2$. Тогда: $\mathrm{R}(\psi)$ — множество, $F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}$ — функция, $\mathrm{D}\Big(F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big) = \Big(\mathrm{R}(\psi) \times \mathrm{R}(\psi)\Big) \cap (G_2 \times G_2) = \mathrm{R}(\psi) \times \mathrm{R}(\psi)$. Пусть $x, y \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда можно указать такие элементы u, v, что: $u, v \in G_1$, $x = \psi(u)$, $y = \psi(v)$. Следовательно: $F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}(x, y) = F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big(\psi(u), \psi(v)\Big) = F_2\Big(\psi(u), \psi(v)\Big) = \psi\Big(F_1(u, v)\Big) \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда $\mathrm{R}\Big(F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big) \subseteq \mathrm{R}(\psi)$. Обозначим: $F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}(x, y) = x \otimes y$ при $x, y \in \mathrm{R}(\psi)$.

Пусть $u, v, w \in G_1$. Тогда:

$$\Big(\psi(u) \otimes \psi(v)\Big) \otimes \psi(w) = \Big(\psi(u)\psi(v)\Big)\psi(w) = \psi(uv)\psi(w) = \psi\Big((uv)w\Big) =$$
$$\psi\Big(u(vw)\Big) = \psi(u)\psi(vw) = \psi(u)\Big(\psi(v)\psi(w)\Big) = \psi(u) \otimes \Big(\psi(v) \otimes \psi(w)\Big).$$

Пусть $u \in G_1$. Тогда:

$$\psi(u) \otimes \psi(e_1) = \psi(u)\psi(e_1) = \psi(ue_1) = \psi(u);$$
$$\psi(u) \otimes \psi(u^{-1}) = \psi(u)\psi(u^{-1}) = \psi(uu^{-1}) = \psi(e_1).$$

Пусть $x, y, z \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда можно указать такие элементы u, v, w, что: $u, v, w \in G_1$, $x = \psi(u)$, $y = \psi(v)$, $z = \psi(w)$. Следовательно:

$$(x \otimes y) \otimes z = \Big(\psi(u) \otimes \psi(v)\Big) \otimes \psi(w) =$$
$$\psi(u) \otimes \Big(\psi(v) \otimes \psi(w)\Big) = x \otimes (y \otimes z).$$

Пусть $x \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда можно указать такой элемент u, что: $u \in G_1$, $x = \psi(u)$. Тогда:

$$x \otimes \psi(e_1) = \psi(u) \otimes \psi(e_1) = \psi(u) = x;$$
$$x \otimes \psi(u^{-1}) = \psi(u) \otimes \psi(u^{-1}) = \psi(e_1).$$

Итак: $\Big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big)$ — группа; $\psi(e_1)$ — единица группы $\Big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big)$; $\psi(u^{-1})$ — обратный элемент к элементу $\psi(u)$ в группе $\Big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\Big)$ при $u \in G_1$. $\square$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.