

Лекция 6

Поверхности второго порядка

Пространственным аналогом кривых второго порядка являются поверхности второго порядка, имеющие уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — многочлен второй степени от x, y, z . Опишем возможные типы поверхностей второго порядка.

1. СПИСОК ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллиптический тип

1 Эллипсоид

В прямоугольной декартовой системе координат эллипсоид задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0, b > 0, c > 0$. Сечением эллипсоида плоскостью $z = h$ является линия

$$\begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \end{cases}$$

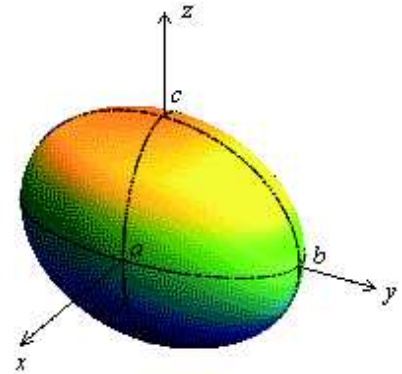
т.е.

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, плоскость $z = h$ при $|h| > c$ не пересекает эллипсоид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с эллипсоидом (это точка $(0, 0, c)$ при $h = c$ и точка $(0, 0, -c)$ при $h = -c$), а при $|h| < c$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, которые максимальны (и равны a и b соответственно) при $h = 0$ и монотонно уменьшаются до нуля, когда $|h|$ возрастает от нуля до c .

Аналогично анализируются сечения эллипсоида плоскостями $x = h$ и $y = h$; все такие сечения представляют собой эллипсы.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, начало координат — его центром симметрии. Эллипсоид целиком расположен в параллелепипеде с центром в точке $O(0, 0, 0)$, с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, равными $2a, 2b$ и $2c$.



2 Мнимый эллипсоид

Уравнение мнимого эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Эта поверхность не имеет ни одной вещественной точки.

3 Мнимый конус.

Уравнение мнимого конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Эта поверхность имеет единственную вещественную точку $O(0, 0, 0)$.

Гиперболический тип

4 Двуполостный гиперboloид

Уравнение двуполостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

или

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Плоскость $z = h$ при $|h| < c$ не пересекает гиперboloид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с гиперboloидом ($(0, 0, c)$ при $h = c$ и $(0, 0, -c)$ при $h = -c$) и при $|h| > c$ пересекает гиперboloид по эллипсу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1,$$

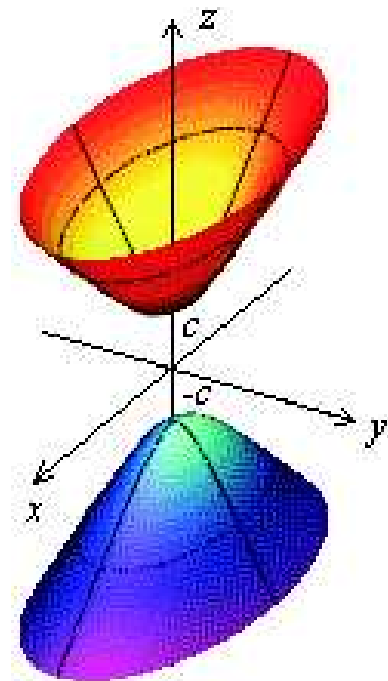
полуоси которого монотонно возрастают от 0 до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от c до $+\infty$.

Каждая плоскость $y = h$ пересекает гиперboloид по гиперболе

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой монотонно возрастают (от c и a соответственно) до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от 0 до $+\infty$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии двуполостного гиперboloида, начало координат — его центром симметрии. Поверхность состоит из двух симметричных частей, расположенных в полупространствах $z \geq c$ и $z \leq -c$.



5 Однополостный гиперболоид

Уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Каждая плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают от a и b соответственно до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от 0 до $+\infty$. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получающийся при $h = 0$, называется горловым эллипсом гиперболоида.

Плоскость $y = h$ при $|h| < b$ пересекает гиперболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой монотонно убывают от a и c соответственно до 0, когда $|h|$ возрастает от 0 до b . При $|h| = b$ сечением является пара пересекающихся прямых

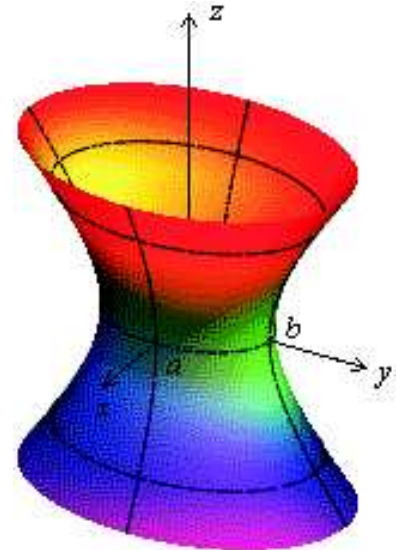
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

При $|h| > b$ сечение представляет собой гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} = 1,$$

полуоси которой возрастают от 0 до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от b до $+\infty$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии однополостного гиперболоида, начало координат — его центром симметрии.



6 Конус

Уравнение конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии конуса, начало координат — его центром симметрии.

Коническая поверхность — это поверхность, образованная прямыми (прямолинейными образующими), проходящими через одну точку, называемую вершиной конуса. Направляющая конической поверхности — это произвольная расположенная на ней линия, обладающая тем свойством, что любая прямолинейная образующая пересекает ее в одной и только одной точке.

Сечение конуса плоскостью $z = h$, $h \neq 0$, представляет собой эллипс

$$\frac{x^2}{a^2 h^2 / c^2} + \frac{y^2}{b^2 h^2 / c^2} = 1,$$

полуоси которого пропорциональны $|h|$. Прямая, проходящая через центры этих эллипсов, называется осью конуса. Рассматривая сечения конуса плоскостями, не перпендикулярными оси, можем получить окружность.

Сечение конуса плоскостью $z = 0$ состоит из одной точки $O(0, 0, 0)$.

Сечение конуса плоскостью $y = h$, $h \neq 0$, является гиперболой

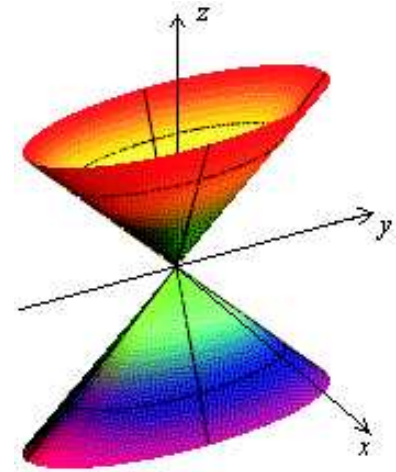
$$\frac{z^2}{c^2 h^2 / b^2} - \frac{x^2}{a^2 h^2 / b^2} = 1,$$

полуоси которой пропорциональны $|h|$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$. Таким образом, в качестве направляющей конуса может быть выбрана гипербола.

Сечение конуса плоскостью $y = 0$ представляет собой пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Парабола также может быть получена как плоское сечение конуса (см. задачу 2 для самостоятельной работы).



Параболический тип

7 Эллиптический параболоид

Уравнение эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

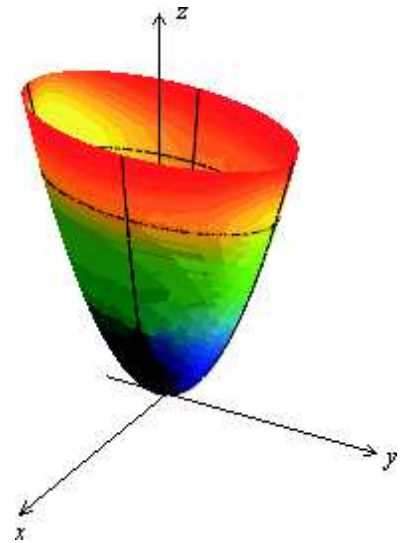
Плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид, при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку $O(0, 0, 0)$, при $h > 0$ пересекает параболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1,$$

полуоси которого монотонно возрастают вместе с h от 0 до $+\infty$.

Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам с фокальными параметрами a^2 и b^2 , с вершинами в точках $(0, h, h^2/2b^2)$ и $(h, 0, h^2/2a^2)$ и ветвями, направленными вверх.

Координатные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида, других плоскостей симметрии и центра симметрии у него нет.



8 Гиперболический параболоид

Уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Плоскость $z = h$ при $h < 0$ пересекает параболоид по гиперболе

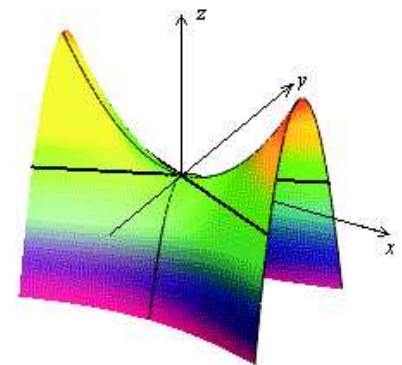
$$\frac{y^2}{-2hb^2} - \frac{x^2}{-2ha^2} = 1;$$

действительная ось этой гиперболы параллельна оси Oy , а мнимая — оси Ox . Плоскость $z = h$ при $h > 0$ пересекает параболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1;$$

действительная ось этой гиперболы параллельна оси Ox , а мнимая — оси Oy . Плоскость $z = 0$ пересекает параболоид по паре прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$



Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам с фокальными параметрами a^2 и b^2 и с вершинами в точках $\left(0, h, -\frac{h^2}{2b^2}\right)$ и $\left(h, 0, \frac{h^2}{2b^2}\right)$; ветви первой параболы направлены вверх, второй — вниз. Вершины парабол, высекаемых плоскостями $y = h$, лежат на параболе, высекаемой плоскостью $x = 0$, а вершины парабол, высекаемых плоскостями $x = h$, — на параболе, высекаемой плоскостью $y = 0$.

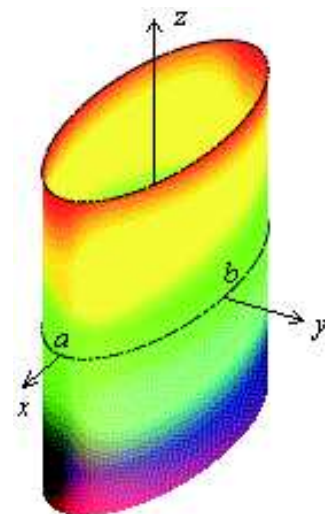
Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида; других плоскостей симметрии нет.

9 Эллиптический цилиндр

Уравнение эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Направляющей является эллипс, образующие параллельны оси Oz .



10 Мнимый эллиптический цилиндр

Уравнение мнимого эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Эта поверхность не содержит ни одной вещественной точки.

11 Пара мнимых пересекающихся плоскостей

Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

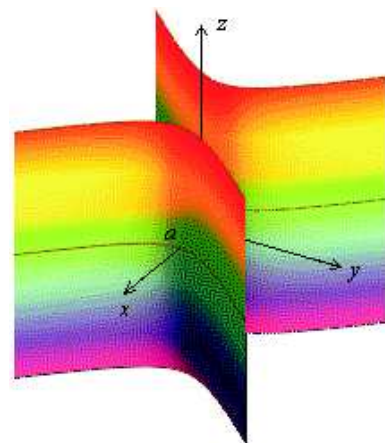
где $a > 0$, $b > 0$. Вещественные точки этой поверхности заполняют прямую (ось Oz).

12 Гиперболический цилиндр

Уравнение гиперболического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Направляющей является гипербола, образующие параллельны оси Oz .



13 Пара пересекающихся плоскостей

Уравнение пары пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

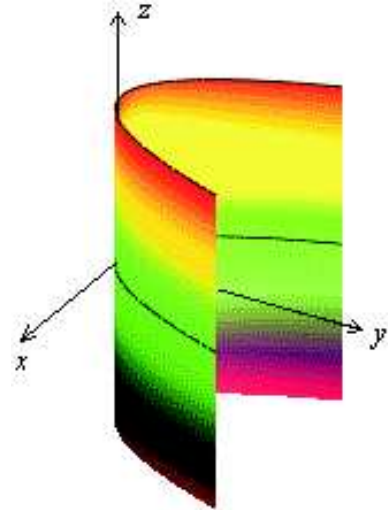
где $a > 0$, $b > 0$.

14 Параболический цилиндр

Уравнение гиперболического цилиндра

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Направляющей является парабола, образующие параллельны оси Oz .



15 Пара параллельных плоскостей

Уравнение пары параллельных плоскостей

$$y^2 = a^2,$$

где $a > 0$.

16 Пара мнимых параллельных плоскостей

Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей

$$y^2 = -a^2,$$

где $a > 0$.

17 Пара совпадающих плоскостей

Уравнение пары совпадающих плоскостей

$$y^2 = 0.$$

2. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность называется l -кратно линейчатой поверхностью, если через каждую ее точку проходит ровно l различных прямых, называемых прямолинейными образующими.

Примеры.

1. Все цилиндры являются 1-линейчатыми поверхностями.
2. Конус является 1-линейчатой поверхностью, все прямолинейные образующие которой проходят через одну точку — вершину конуса.

Однополостный гиперboloид

Теорема.

Однополостный гиперboloид является дважды линейчатой поверхностью.

Пусть (x_0, y_0, z_0) — точка, лежащая на однополостном гиперboloиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Рассмотрим прямую, проходящую через эту точку:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \quad (2)$$

Для краткости введем обозначения

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{a}, & Y &= \frac{y}{b}, & Z &= \frac{z}{c}, \\ X_0 &= \frac{x_0}{a}, & Y_0 &= \frac{y_0}{b}, & Z_0 &= \frac{z_0}{c}, \\ L &= \frac{l}{a}, & M &= \frac{m}{b}, & N &= \frac{n}{c}. \end{aligned}$$

Уравнение гиперboloида (1) в новых обозначениях

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1 \iff X^2 + Y^2 = 1 + Z^2, \quad (3)$$

а уравнение прямой (2) —

$$X = X_0 + Lt, \quad Y = Y_0 + Mt, \quad Z = Z_0 + Nt. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\begin{aligned} &(X_0 + Lt)^2 + (Y_0 + Mt)^2 - (Z_0 + Nt)^2 = 1 \iff \\ \iff &\underbrace{(X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2)}_{=1} + 2t(X_0L + Y_0M - Z_0N) + t^2(L^2 + M^2 - N^2) = 1 \\ \iff &2t(X_0L + Y_0M - Z_0N) + t^2(L^2 + M^2 - N^2) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение выполняется тождественно (т. прямая (4) целиком лежит на гиперboloиде (3)) тогда и только тогда, когда

$$X_0L + Y_0M - Z_0N = 0, \quad L^2 + M^2 - N^2 = 0.$$

Поскольку направляющий вектор прямой может быть выбран с точностью до произвольного ненулевого множителя, положим $n = c$, тогда $N = 1$, и получим

$$X_0L + Y_0M = Z_0, \quad L^2 + M^2 = 1.$$

Второе уравнение допускает параметризацию

$$L = \cos \varphi, \quad M = \sin \varphi,$$

после чего первое уравнение примет вид

$$X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi = Z_0 \iff \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \left(\underbrace{\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}}_{=\cos \theta} \cos \varphi + \underbrace{\frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}}_{=\sin \theta} \sin \varphi \right) = Z_0 \iff$$

$$\iff \cos(\varphi - \theta) = \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_0^2}};$$

последняя дробь строго меньше единицы по модулю, поэтому тригонометрическое уравнение имеет ровно 2 решения на $[0, 2\pi)$:

$$\varphi - \theta = \pm \arccos \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_0^2}} \iff \varphi = \theta \pm \arccos \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_0^2}}.$$

Пусть

$$\beta = \arccos \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_0^2}} \in [0, \pi] \Rightarrow \cos \beta = \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_0^2}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + Z_0^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\theta \pm \beta) = \cos \theta \cos \beta \mp \sin \theta \sin \beta \\ &= \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_0^2}} \mp \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + Z_0^2}} = \frac{X_0 Z_0 \mp Y_0}{1 + Z_0^2}, \\ \sin \varphi &= \sin(\theta \pm \beta) = \sin \theta \cos \beta \pm \cos \theta \sin \beta \\ &= \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_0^2}} \pm \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + Z_0^2}} = \frac{Y_0 Z_0 \pm X_0}{1 + Z_0^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем два решения

$$L_\varepsilon = \cos \varphi = \frac{X_0 Z_0 - \varepsilon Y_0}{1 + Z_0^2}, \quad M_\varepsilon = \sin \varphi = \frac{Y_0 Z_0 + \varepsilon X_0}{1 + Z_0^2}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Каждое из возможных значений ε определяет направляющий вектор.

Итак, через точку (X_0, Y_0, Z_0) гиперboloида (3) проходят ровно две прямые, целиком лежащие на гиперboloиде:

$$X = X_0 + \frac{X_0 Z_0 - \varepsilon Y_0}{1 + Z_0^2} t, \quad Y = Y_0 + \frac{Y_0 Z_0 + \varepsilon X_0}{1 + Z_0^2} t, \quad Z = Z_0 + t, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Эти прямые пересекаются с плоскостью $z = 0$ ($Z = 0$) в точках (X_1, Y_1, Z_1) , (X_{-1}, Y_{-1}, Z_{-1}) , отвечающих значению параметра $t_0 = -Z_0$:

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= X_0 - \frac{X_0 Z_0 - \varepsilon Y_0}{1 + Z_0^2} Z_0 = \frac{X_0 + \varepsilon Y_0 Z_0}{1 + Z_0^2} = \varepsilon \frac{Y_0 Z_0 + \varepsilon X_0}{1 + Z_0^2} = \varepsilon M_\varepsilon, \\ Y_\varepsilon &= Y_0 - \frac{Y_0 Z_0 + \varepsilon X_0}{1 + Z_0^2} Z_0 = \frac{Y_0 - \varepsilon X_0 Z_0}{1 + Z_0^2} = -\varepsilon \frac{X_0 Z_0 - \varepsilon Y_0}{1 + Z_0^2} = -\varepsilon L_\varepsilon, \\ Z_\varepsilon &= 0, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Ясно, что эти две точки лежат на горловом эллипсе гиперboloида. Теперь можно записать уравнения прямолинейных образующих в виде

$$X = X_\varepsilon - \varepsilon Y_\varepsilon t, \quad Y = Y_\varepsilon + \varepsilon X_\varepsilon t, \quad Z = t.$$

Обратно, пусть (X_*, Y_*) — точка горлового эллипса однополостного гиперboloида (3), т.е.

$$X_*^2 + Y_*^2 = 1.$$

Рассмотрим две прямых

$$X = X_* - \varepsilon Y_* t, \quad Y = Y_* + \varepsilon X_* t, \quad Z = t, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 - Z^2 &= (X_* - \varepsilon Y_* t)^2 + (Y_* + \varepsilon X_* t)^2 - t^2 = \\ &= \underbrace{(X_*^2 + Y_*^2)}_{=1} + 2t(X_\varepsilon Y_\varepsilon - X_\varepsilon Y_\varepsilon) + t^2 \underbrace{(X_*^2 + Y_*^2 - 1)}_{=0} = 1, \end{aligned}$$

обе эти прямые целиком лежат на гиперboloиде.

Итак, через любую точку гиперboloида проходит ровно две прямолинейные образующие, одна из которых отвечает значению $\varepsilon = 1$, а другая — значению $\varepsilon = -1$. Все прямолинейные образующие разбиваются на два семейства; к одному семейству относятся образующие, отвечающие $\varepsilon = 1$, к другому — отвечающие $\varepsilon = -1$.

Рассмотрим две образующие, проходящие через точки (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) горлового эллипса:

$$\begin{cases} X = X_1 - \varepsilon_1 Y_1 t, \\ Y = Y_1 + \varepsilon_1 X_1 t, \\ Z = t, \end{cases} \quad \begin{cases} X = X_2 - \varepsilon_2 Y_2 t, \\ Y = Y_2 + \varepsilon_2 X_2 t, \\ Z = t. \end{cases}$$

Выясним вопрос о взаимном расположении этих прямых. Рассмотрим определитель

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 & 1 \\ -\varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_2 X_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 Y_1 + \varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 & 0 \\ -\varepsilon_2 Y_2 & \varepsilon_2 X_2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon_2 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$; тогда $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \varepsilon \varepsilon_1$ и далее

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon_2 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon \varepsilon_1 Y_2 - \varepsilon_1 Y_1 & \varepsilon_1 X_1 - \varepsilon \varepsilon_1 X_2 \end{vmatrix} = \\ &= \varepsilon_1 \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 \\ \varepsilon Y_2 - Y_1 & X_1 - \varepsilon X_2 \end{vmatrix} = -\varepsilon_1 \left[(X_2 - X_1)(\varepsilon X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(\varepsilon Y_2 - Y_1) \right]. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon = 1$, т.е. образующие принадлежат к одному семейству, то

$$D = -\varepsilon_1 \left[(X_2 - X_1)(X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(Y_2 - Y_1) \right] = -\varepsilon_1 \left[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 \right] \neq 0,$$

т.е. рассматриваемые две прямые скрещиваются. Если $\varepsilon = -1$, т.е. образующие принадлежат к разным семействам, то

$$\begin{aligned} D &= -\varepsilon_1 \left[(X_2 - X_1)(-X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(-Y_2 - Y_1) \right] = -\varepsilon_1 \left[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 \right] = \\ &= \varepsilon_1 [X_2^2 - X_1^2 + Y_2^2 - Y_1^2] = 0, \end{aligned}$$

т.е. рассматриваемые две прямые лежат в одной плоскости.

Рассмотрим три попарно различные одноименные прямолинейные образующие, проходящие через точки (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) горлового эллипса. Рассмотрим определитель, составленный из координат направляющих векторов указанных прямых:

$$\begin{vmatrix} -Y_1 & X_1 & 1 \\ -Y_2 & X_2 & 1 \\ -Y_3 & X_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку точки (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) не лежат на одной прямой. Таким образом, рассматриваемые три прямолинейные образующие не компланарны.

Доказана следующая теорема.

Теорема.

Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида обладают следующими свойствами:

1. *Через каждую точку гиперboloида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.*
2. *Каждая образующая пересекает горловой эллипс гиперboloида.*
3. *Любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются.*
4. *Любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, лежат в одной плоскости.*

При решении задач более удобен иной метод нахождения прямолинейных образующих. Запишем уравнение однополостного гиперboloида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \left(1 - \frac{y}{b} \right) \left(1 + \frac{y}{b} \right).$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперboloиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) = \beta \left(1 - \frac{y_0}{b} \right), \\ \beta \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = \alpha \left(1 + \frac{y_0}{b} \right), \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) = \delta \left(1 + \frac{y_0}{b} \right), \\ \delta \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = \gamma \left(1 - \frac{y_0}{b} \right) \end{cases}$$

относительно неизвестных (α, β) для первой системы и (γ, δ) для второй. Определители этих систем равны нулю; например, для первой системы

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} & -\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) & \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) - \left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) = 0.$$

Таким образом, каждая из систем обладает нетривиальным решением; обозначим эти решения через (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) соответственно. Рассмотрим теперь системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \beta_0 \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta_0 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \alpha_0 \left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_0 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \delta_0 \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \delta_0 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \gamma_0 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

относительно неизвестных (x, y, z) . Точка (x_0, y_0, z_0) является решением каждой из систем, и при этом каждая из систем определяет прямую, проходящую через указанную точку. Поскольку при перемножении уравнений каждой из систем получается уравнение гиперboloида, любое решение (x, y, z) каждой из систем представляет точку, лежащую на гиперboloиде. Таким образом, обе прямые, представляемые данными системами, целиком лежат на гиперboloиде.

Гиперболический параболоид

Теорема.

Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью.

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (5)$$

Рассмотрим прямую, проходящую через эту точку:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \quad (6)$$

Для краткости введем обозначения

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{a}, & Y &= \frac{y}{b}, & Z &= z, \\ X_0 &= \frac{x_0}{a}, & Y_0 &= \frac{y_0}{b}, & Z_0 &= z_0, \\ L &= \frac{l}{a}, & M &= \frac{m}{b}, & N &= n. \end{aligned}$$

Уравнения параболоида (7) и прямой (6) в новых обозначениях имеют вид

$$X^2 - Y^2 = 2Z, \quad \begin{cases} X = X_0 + Lt, \\ Y = Y_0 + Mt, \\ Z = Z_0 + Nt. \end{cases}$$

Подставляя параметрические уравнения прямой в уравнение параболоида, получим

$$\begin{aligned} (X_0 + Lt)^2 - (Y_0 + Mt)^2 &= 2(Z_0 + Nt) \iff \\ \iff \underbrace{(X_0^2 - Y_0^2)}_{=2Z_0} + 2t(X_0L - Y_0M) + t^2(L^2 - M^2) &= 2Z_0 + 2Nt \iff \\ \iff 2t(X_0L - Y_0M) + t^2(L^2 - M^2) &= 2Nt. \end{aligned}$$

Это уравнение выполняется тождественно, т.е. прямая целиком лежит на параболоиде, тогда и только тогда, когда

$$X_0L - Y_0M = N, \quad L^2 - M^2 = 0.$$

Поскольку направляющий вектор прямой определен лишь с точностью до ненулевого множителя, положим $L = 1$; тогда $M = \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$, $N = X_0 - \varepsilon Y_0$. Итак, через точку (X_0, Y_0, Z_0) параболоида проходят ровно две прямых

$$\begin{cases} X = X_0 + t, \\ Y = Y_0 + \varepsilon t, \\ Z = Z_0 + (X_0 - \varepsilon Y_0)t, \end{cases} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Выясним взаимное расположение двух одноименных прямолинейных образующих, проходящих через две различные точки (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) параболоида; для этого рассмотрим определитель

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ 1 & 1 & X_1 - Y_1 \\ 1 & 1 & X_2 - Y_2 \end{vmatrix} = \\ &= X_2^2 - 2Y_2X_2 - 2X_2X_1 + 2Y_1X_2 + 2Y_2X_1 + X_1^2 - 2Y_1X_1 + Y_2^2 - 2Y_1Y_2 + Y_1^2 = \\ &= (X_2 - Y_2 - X_1 + Y_1)^2 \neq 0; \end{aligned}$$

таким образом, эти образующие скрещиваются.

Выясним взаимное расположение двух разноименных прямолинейных образующих, проходящих через две различные точки (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) параболоида; для этого рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ 1 & 1 & X_1 - Y_1 \\ 1 & -1 & X_2 + Y_2 \end{vmatrix} = X_2^2 - Y_2^2 - 2Z_2 - (X_1^2 - Y_1^2 - 2Z_1) = 0;$$

таким образом, эти образующие лежат в одной плоскости. Поскольку при этом направляющие векторы $(1, 1, X_1 - Y_1)$ и $(1, -1, X_2 + Y_2)$ этих образующих неколлинеарны, рассматриваемые образующие пересекаются.

Наконец, направляющие векторы всех образующих одного семейства имеют вид $(1, \varepsilon, X_0 - \varepsilon Y_0)$ параллельны плоскости $X - \varepsilon Y = 0$.

Доказана следующая теорема.

Теорема.

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида обладают следующими свойствами:

1. Через каждую точку гиперболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.
2. Любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются.
3. Любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, пересекаются.
4. Все образующие одного семейства параллельны одной плоскости.

Имеется другой метод нахождения уравнений прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Запишем уравнение параболоида (7) в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z. \quad (7)$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ) :

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = \beta, \\ \beta \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = 2\alpha z_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = \delta, \\ \delta \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = 2\gamma z_0. \end{cases}$$

Определители этих систем равны нулю (проверьте!). поэтому каждая из систем нетривиально разрешима; пусть (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) — их решения. Рассмотрим теперь системы

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \beta_0, \\ \beta_0 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2\alpha_0 z, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_0 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \delta_0, \\ \delta_0 \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2\gamma_0 z; \end{cases}$$

каждая из них определяет прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) параболоида. Перемножая уравнения каждой из систем, обнаруживаем, что любое решение системы является также и решением уравнения (7), т.е. прямая целиком лежит на параболоиде.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением, содержащим параметр λ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ .

(а) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$; (в) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$; (д) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$;

(б) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; (г) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$; (е) $\lambda x^2 + y^2 = z$;

$$(ж) \lambda(x^2 + y^2) = z;$$

$$(з) x^2 + y^2 = \lambda;$$

$$(и) x^2 - y^2 = \lambda;$$

Ответ. (а) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид;

(б) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара мнимых пересекающихся плоскостей (прямая), при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид;

(в) при $\lambda > 0$ однополостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ конус, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид;

(г) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид;

(д) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара совпадающих плоскостей, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид;

(е) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид;

(ж) при $\lambda \neq 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ плоскость (уравнение первой степени!);

(з) при $\lambda > 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda = 0$ пара мнимых пересекающихся плоскостей (прямая), при $\lambda < 0$ мнимый эллиптический цилиндр (пустое множество);

(и) при $\lambda \neq 0$ гиперболический цилиндр, при $\lambda = 0$ пара пересекающихся плоскостей.

Задача 2. Докажите, что сечение конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ плоскостью $az - cx = h$, $h \neq 0$, является параболой.

Задача 3. Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 4. Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 5. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 6. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ спроектированы на плоскость Oxz . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 7. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $z = -1, z = 0, z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

Задача 8. Найдите уравнения проекций линии пересечения поверхностей $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 36$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

Ответ. $x^2 - z^2 = 0$ ($|x| \leq 3/\sqrt{2}$); $y^2 + 2z^2 = 9$; $2x^2 + y^2 = 9$. Сечение представляет собой пару окружностей, лежащих в плоскостях $x = \pm z$.

Задача 9. Найдите уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ и $3x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 10$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

Ответ. $x^2 + y^2 = 2$; $y^2 + 3z^2 = 2$; $3z^2 - x^2 = 0$ ($|x| \leq \sqrt{2}$). Сечение представляет собой пару эллипсов, лежащих в плоскостях $x = \pm\sqrt{3}z$.

Задача 10. Найдите уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и $x^2 - y^2 = 2z$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия? Найдите ее параметрические уравнения.

Ответ. $x \pm y \pm \sqrt{2} = 0$; $z \pm x\sqrt{2} + 1 = 0$; $z \pm y\sqrt{2} - 1 = 0$. Сечение состоит из четырех прямых $x = t, y = \pm(t + \sqrt{2}), z = -1 - t\sqrt{2}$ и $x = t, y = \pm(t - \sqrt{2}), z = -1 + t\sqrt{2}$.

Задача 11. Изобразите поверхность $x^2 - y^2 = 1$ и найдите уравнение семейства ее прямолинейных образующих.

Ответ. $\alpha(x - y) = \beta, \beta(x + y) = \alpha$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Задача 12. Изобразите поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и найдите уравнение семейства ее прямолинейных образующих.

Ответ. $\alpha(z - y) = \beta x, \beta(z + y) = \alpha x$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Задача 13. Найдите прямолинейные образующие поверхности $4x^2 - y^2 = 16z$, пересекающиеся в точке $M(2, 0, 1)$.

Ответ. $x = t, y = 2t - 4, z = t - 1$; $x = t, y = 4 - 2t, z = t - 1$.

Задача 14. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 0, 2)$ и пересекающей гиперболический параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ по паре прямых.

Ответ. $3x + y - 2z - 2 = 0$.

Задача 15. Найдите уравнение плоскости, пересекающей однополостный гиперболоид $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ по паре прямых, проходящих через точку $M(6, -3, 2)$.

Ответ. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

Задача 16. Даны гиперболический параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ и плоскость $x + y + z = 1$. Найдите уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей параболоид по паре прямых. Найдите уравнения прямых и угол между ними.

Ответ. Плоскость $x + y + z = 0$; прямые $x = t - 2, y = t, z = 2 - 2t$ и $x = t, y = -t, z = 0$. Угол $\pi/2$.

Задача 17. Две прямолинейные образующие однополостного гиперboloида вращения $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ пересекаются в точке, принадлежащей плоскости $z = h$. Найдите угол между ними.

Ответ. $\arccos \frac{h^2}{h^2 + 1}$.

Задача 18. Найдите множество точек поверхности, в которых пересекаются ее взаимно ортогональные прямолинейные образующие: (а) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; (б) $x^2 - y^2 = 2z$; (в) $x^2 - 4y^2 = 2z$.

Ответ. (а) окружность $x^2 + y^2 = 1, z = 0$; (б) пара прямых $y \pm x = 0, z = 0$; (в) гипербола $4x^2 - 16y^2 + 3 = 0, z = -3/8$.