Экзамен по аналитической геометрии 2009/2010 учебный год I поток (лектор А. В. Овчинников)

Список вопросов к первой части экзамена

Цель первой части экзамена — проверка знания основных определений и формулировок теорем, умения доказательства простейших геометрических и алгебраических фактов, элементарных вычислительных навыков. Билет состоит из 9 вопросов; при ответе менее чем на 5 вопросов выставляется оценка «неудовлетворительно».

1. Алгебра векторов

1.1. Сформулируйте определение базиса на плоскости и в пространстве, координат вектора относительно базиса. Докажите, что разложение вектора по базису единственно.

1.2. Сформулируйте определение ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$. Выведите формулу для вычисления указанной проекции.

1.3. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов и перечислите его свойства.

1.4. Выведите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных координатами относительно ортонормированного базиса.

1.5. Сформулируйте определение векторного произведения векторов и перечислите его свойства.

1.6. Запишите формулы для вычисления векторного произведения векторов, заданных координатами относительно правого и левого ортонормированных базисов.

1.7. Запишите формулу двойного векторного произведения. С помощью этой формулы докажите тождество Якоби.

1.8. Сформулируйте определение смешанного произведения векторов и перечислите его свойства.

1.9. Запишите формулы для вычисления смешанного произведения векторов, заданных координатами относительно правого и левого ортонормированных базисов.

1.10. Сформулируйте определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Запишите матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$. Одинаковы ли ориентации базисов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$? Ответ обоснуйте.

1.11. Сформулируйте определение ориентации линейного пространства. матрицы перехода от одного базиса к другому. Одинаковы ли ориентации двумерного линейного пространства, определяемые базисами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$? Ответ обоснуйте.

1.12. Сформулируйте определение правой и левой тройки векторов. Выясните, правую или левую тройку образуют векторы $\boldsymbol{a}(0, 0, -1)$, $\boldsymbol{b}(0, -2, 3)$, $\boldsymbol{c}(-3, 1, 0)$ (координаты векторов указаны относительно правого ортонормированного базиса).

1.13. Сформулируйте определение правой и левой тройки векторов. Выясните, правую или левую тройку образуют векторы $\boldsymbol{a}(0, 0, -1)$, $\boldsymbol{b}(0, -2, 3)$, $\boldsymbol{c}(-3, 1, 0)$ (координаты векторов указаны относительно левого ортонормированного базиса).

2. Прямые и плоскости

2.1. На плоскости заданы две прямые $A_1x + B_1y = C_1$, $A_2x + B_2y = C_2$. Сформулируйте в терминах рангов условия на коэффициенты уравнений прямых, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые 1) совпадали; 2) были параллельны, но не совпадали; 3) пересекались в единственной точке.

2.2. В пространстве заданы две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$, $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$. Сформулируйте в терминах рангов условия на коэффициенты уравнений плоскостей, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости 1) совпадали; 2) были параллельны, но не совпадали; 3) имели единственную общую прямую.

2.3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором прямые на плоскости $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$: 1) пересекаются в единственной точке; 2) параллельны, но не совпадают; 3) совпадают.

2.4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором прямые в пространстве $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$: 1) пересекаются в единственной точке; 2) параллельны, но не совпадают; 3) совпадают; 4) скрещиваются.

2.5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором прямые $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ на плоскости пересекаются (в единственной точке), и найдите радиус-вектор точки пересечения этих прямых.

2.6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$: 1) пересекаются по прямой; 2) параллельны, но не совпадают; 3) совпадают.

2.7. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором прямые в пространстве $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$: 1) пересекаются в единственной точке; 2) скрещиваются; 3) параллельны, но не совпадают; 4) совпадают.

2.8. Даны прямая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что: 1) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку); 2) прямая и плоскость параллельны (не имеют общих точек); 3) прямая лежит в плоскости.

2.9. Запишите формулу вычисления расстояния от точки $M_1(x_1, y_1)$ на плоскости до прямой $Ax + By = C$.

2.10. Запишите формулу вычисления расстояния от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на плоскости до прямой $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

2.11. Запишите формулу вычисления расстояния от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в пространстве до плоскости $Ax + By + Cz = D$.

2.12. Запишите формулу вычисления расстояния от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ в пространстве до плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

2.13. Запишите формулу вычисления ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$.

3. Прямые и плоскости

3.1. Запишите уравнение плоскости $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ в виде $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

3.2. Напишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, в каноническом, параметрическом и общем виде.

3.3. Напишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в каноническом и параметрическом виде.

3.4. Напишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно прямой $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, в каноническом и параметрическом виде.

3.5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

3.6. Напишите уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно прямой $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$.

3.7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно прямым $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$. $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$.

3.8. Напишите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}(l_1, m_1, n_1)$ и $\boldsymbol{b}(l_2, m_2, n_2)$.

3.9. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$.

3.10. Найдите угол между прямыми на плоскости, заданными уравнениями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$.

3.11. Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$.

3.12. Найдите радиус-вектор точки пересечения прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

3.13. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.

3.14. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

3.15. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на этой прямой.

4. Линии второго порядка

4.1. Запишите каноническое уравнение гиперболы. Выразите фокальный параметр и эксцентриситет гиперболы через ее полуоси.

4.2. Запишите каноническое уравнение эллипса. Выразите фокальный параметр и эксцентриситет эллипса через его полуоси.

4.3. Сформулируйте фокальное свойство эллипса.

4.4. Сформулируйте фокальное свойство гиперболы.

4.5. Сформулируйте директориальное свойство эллипса.

4.6. Сформулируйте директориальное свойство гиперболы.

4.7. Сформулируйте определение асимптот гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы и уравнения ее асимптот.

4.8. Сформулируйте директориальное свойство параболы.

4.9. Запишите уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке (x_0, y_0).

4.10. Запишите уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0).

4.11. Запишите уравнение касательной к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0).

4.12. Сформулируйте оптическое свойство эллипса.

4.13. Сформулируйте оптическое свойство гиперболы.

4.14. Сформулируйте оптическое свойство параболы.

5. Поверхности второго порядка

5.1. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.2. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.3. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.4. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+\lambda(y^2+z^2) = 1$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.5. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+\lambda(y^2+z^2) = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.6. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda x^2+y^2 = z$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.7. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $\lambda(x^2 + y^2) = z$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.8. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2+y^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.9. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением $x^2-y^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

5.10. Сечения поверхности $x^2+2y^2-3z^2-1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

5.11. Сечения поверхности $x^2+2y^2-3z^2 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

5.12. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

5.13. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ спроектированы на плоскость Oxz. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

5.14. Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy. Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

5.15. Как называется поверхность, заданная уравнением $x^2 - y^2 = 1$? Изобразите поверхность и найдите уравнения ее прямолинейных образующих, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) поверхности.

5.16. Как называется поверхность, заданная уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$? Изобразите поверхность и найдите уравнения ее прямолинейных образующих, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) поверхности.

5.17. Сформулируйте определение прямолинейной образующей поверхности второго порядка. Запишите каноническое уравнение однополостного гиперболоида и опишите методику нахождения его прямолинейных образующих.

5.18. Сформулируйте определение прямолинейной образующей поверхности второго порядка. Запишите каноническое уравнение гиперболического параболоида и опишите методику нахождения его прямолинейных образующих.

5.19. Запишите канонические уравнения эллипсоида, мнимого эллипсоида, мнимого конуса. Изобразите поверхности вместе с системой координат.

5.20. Запишите канонические уравнения двуполостного гиперболоида, однополостного гиперболоида, конуса. Изобразите поверхности вместе с системой координат.

5.21. Запишите канонические уравнения эллиптического параболоида, гиперболического параболоида. Изобразите поверхности вместе с системой координат.

6. Системы линейных уравнений

6.1. Сформулируйте определение эквивалентных систем линейных уравнений. Перечислите преобразования, переводящие систему линейных уравнений в эквивалентную систему.

6.2. Докажите следующее утверждение: однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы ее основной матрицы линейно зависимы.

6.3. Докажите следующее утверждение: если X_1, X_2 — два решения однородной системы линейных уравнений $AX = 0$, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.

6.4. Сформулируйте определение фундаментальной совокупности решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Найдите ФСР системы $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ и запишите общее решение системы с помощью ФСР.

6.5. Сформулируйте определение фундаментальной матрицы (ФМ) однородной системы линейных уравнений. Найдите ФМ системы $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ и запишите общее решение системы с помощью ФМ.

6.6. Докажите следующее утверждение: если X_1, X_2 — решения неоднородной системы линейных уравнений $AX = B$, то $X_1 - X_2$ — решение соответствующей однородной системы $AX = O$. С помощью этого факта докажите, что общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения неоднородной системы и частного решения соответствующей однородной системы.

6.7. Найдите общее решение неоднородной системы $x^1 + x^2 + x^3 = 1$. Ответ представьте в виде суммы общего решения неоднородной системы и частного решения соответствующей однородной системы.

6.8. Сформулируйте определение базисной и свободной неизвестной в системе линейных уравнений. Докажите следующее утверждение: если в однородной системе число неизвестных больше числа уравнений, то она имеет нетривиальное решение.

6.9. Сформулируйте и докажите теорему Кронекера—Капелли.

6.10. Методом Гаусса решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

6.11. Методом Гаусса решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

6.12. Методом Гаусса решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^3 = 0, \\ 2x^1 + x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

6.13. Методом Гаусса решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 2. \end{cases}$$

6.14. Методом Гаусса решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^3 = 2, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 1. \end{cases}$$

6.15. Методом Гаусса решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 + x^2 - x^3 = 1. \end{cases}$$

6.16. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений равен сумме столбцов ее основной матрицы. Укажите какое-либо частное решение системы.

6.17. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений совпадает с последним столбцом ее основной матрицы. Укажите какое-либо частное решение системы.

6.18. Пусть X, Y — столбцы решений систем уравнений $AX = P$, $AY = Q$ соответственно, α, β — некоторые числа. Какой системе уравнений удовлетворяет столбец $Z = \alpha X + \beta Y$? Ответ обоснуйте.

7. Матрицы

7.1. Сформулируйте определение матрицы. Сформулируйте определение суммы матриц и произведения матрицы на число. Перечислите свойства Указанных операций над матрицами.

7.2. Сформулируйте определение произведения матриц. Перечислите свойства операции умножения матриц.

7.3. Сформулируйте определение транспонирования матриц. Перечислите свойства операции транспонирования.

7.4. Пусть A, B — матрицы. При каком условии существует произведение AB? Докажите соотношение $(AB)^T = B^T A^T$.

7.5. Пусть A, B — матрицы. При каком условии существует произведение AB? Докажите соотношение $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

7.6. Сформулируйте определение обратной матрицы. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.

7.7. Сформулируйте определение обратной матрицы. Докажите соотношение $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7.8. Докажите, что k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.

7.9. Докажите, что k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.

7.10. Докажите, что k-я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам k-й строки матрицы A.

7.11. Докажите, что k-я строка матрицы AB равна произведению k-й строки матрицы A на матрицу B.

7.12. Сформулируйте определения симметричной и кососимметричной матриц. Докажите, что любую матрицу можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц.

7.13. Докажите, что если для матрицы A существует обратная A^{-1}, то она единственна.

7.14. Опишите метод вычисления обратной матрицы, основанный на элементарных преобразованиях строк (метод Гаусса). Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}^{-1}$.

7.15. Опишите метод вычисления обратной матрицы, основанный на вычислении присоединенной матрицы. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}^{-1}$.

7.16. Пусть $f(t)$ — многочлен. Докажите, что $f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$.

7.17. Докажите, что если A — невырожденная симметрическая матрица, то A^{-1} — также симметрическая матрица.

7.18. Докажите, что если A — невырожденная кососимметрическая матрица, то A^{-1} — также кососимметрическая матрица.

7.19. Пусть A, B — симметрические матрицы. Докажите, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

7.20. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Докажите, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

7.21. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Докажите, что AB является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = -BA$.

8. Комплексные числа и многочлены

8.1. Опишите полярную систему координат на плоскости. Приведите формулы перехода от декартовых координат к полярным и наоборот, укажите диапазоны изменения полярных координат.

8.2. Опишите цилиндрическую систему координат в пространстве. Приведите формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим и наоборот, укажите диапазоны изменения цилиндрических координат.

8.3. Опишите сферическую систему координат в пространстве. Приведите формулы перехода от декартовых координат к сферическим и наоборот, укажите диапазоны изменения сферических координат.

8.4. Сформулируйте определение комплексного числа, его вещественной и мнимой частей, модуля и аргумента, запишите формулы, связывающие эти понятия. Сформулируйте определения суммы, разности, произведения, частного и сопряжения комплексных чисел и свойства этих операций (без доказательства).

8.5. Докажите, что для комплексных чисел z_1 и z_2 выполняются соотношения $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

8.6. Запишите формулу Эйлера. С помощью формулы Эйлера получите формулы, связывающие тригонометрические $(\cos, \sin)$ и гиперболические $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ функции.

8.7. Запишите формулу Муавра. С помощью формулы Муавра получите формулы косинуса и синуса тройного аргумента.

8.8. Сформулируйте правило извлечения корней из комплексных чисел. Пользуясь этим правилом, найдите $\sqrt[3]{-1}$.

8.9. Сформулируйте правило извлечения корней из комплексных чисел. Пользуясь этим правилом, найдите $\sqrt[3]{i}$.

8.10. Сформулируйте правило извлечения корней из комплексных чисел. Пользуясь этим правилом, найдите $\sqrt[3]{-i}$.

8.11. Запишите формулу деления многочленов с остатком. Сформулируйте и докажите теорему Безу.

8.12. Докажите следующее утверждение: если число $x = c$ является корнем кратности p многочлена $A_n(x)$, то оно является корнем кратности $p-1$ производной $A_n'(x)$.

8.13. Докажите, что для любого многочлена $A(z)$ с вещественными коэффициентами имеет место соотношение $A(\bar{z}) = \overline{A(z)}$ при любом $z \in \mathbb{C}$. Пользуясь этим фактом, докажите, что если $z = c$ — корень рассматриваемого многочлена $A(z)$, то $\bar{z}$ также является корнем многочлена $A(z)$.

9. Линейные пространства

9.1. Сформулируйте определение линейного пространства. Приведите примеры.

9.2. Сформулируйте определения линейной комбинации и линейной оболочки. Приведите примеры.

9.3. Сформулируйте определения линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Приведите пример трех линейно зависимых столбцов, каждые два из которых являются линейно независимыми.

9.4. Сформулируйте определение линейно зависимой системы векторов. Докажите, что если в системе векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ имеется нулевой столбец, то эта система линейно зависима.

9.5. Сформулируйте определение линейно зависимой системы векторов. Докажите, что если система векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ линейно зависима, то один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

9.6. Сформулируйте определение линейно зависимой системы векторов. Докажите, что если в системе векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ линейно зависимы, то и вся система также линейно зависима.

9.7. Сформулируйте определение линейного подпространства линейного пространства. Докажите, что подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является линейным подпространством в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$. Найдите размерность и укажите какой-либо базис этого подпространства.

9.8. Сформулируйте определение линейного подпространства линейного пространства. Докажите, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $S\mathbb{K}^{n\times n}$ симметричных матриц является линейным подпространством. Найдите размерность и укажите какой-либо базис этого подпространства.

9.9. Сформулируйте определение линейного подпространства линейного пространства. Докажите, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество $A\mathbb{K}^{n\times n}$ кососимметричных матриц является линейным подпространством. Найдите размерность и укажите какой-либо базис этого подпространства.

9.10. Сформулируйте определение прямой суммы линейных подпространств линейного пространства. Докажите, что $\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}$, где $S\mathbb{K}^{n\times n}$ и $A\mathbb{K}^{n\times n}$ — подпространства симметричных и кососимметричных матриц в пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}$ квадратных матриц.

9.11. Сформулируйте определение линейного подпространства линейного пространства. Докажите, что в линейном пространстве $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n подмножество матриц с нулевым следом является линейным подпространством. Найдите размерность и укажите какой-либо базис этого подпространства.

9.12. Сформулируйте и докажите теорему о пополнении базиса.

9.13. Сформулируйте определение линейного подпространства линейного пространства. Докажите, что пересечение двух линейных подпространств линейного пространства также является линейным подпространством.

9.14. Сформулируйте определение суммы двух линейных подпространств линейного пространства. Докажите, что сумма двух линейных подпространств линейного пространства также является линейным подпространством.

9.15. Запишите формулу, выражающую размерность суммы линейных подпространств P, Q линейного пространства через размерности подпространств P, Q.

9.16. Сформулируйте определение изоморфизма линейных пространств. Приведите примеры изоморфных пространств.

9.17. Сформулируйте определение изоморфизма линейных пространств. Докажите следующее утверждение: если $f : V \to W$ — изоморфизм и $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in V$ — линейно независимые векторы, то векторы $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_p) \in W$ также линейно независимы.

9.18. Докажите, что все линейные пространства над одним и тем же числовым полем, имеющие одинаковую размерность, изоморфны.

9.19. Сформулируйте определение ранга матрицы. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

9.20. Сформулируйте определение ранга матрицы. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

9.21. Докажите неравенство $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A$.

9.22. Докажите неравенство $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} B$.

Список вопросов ко второй части экзамена

Цель второй части экзамена — проверка навыков доказательства теорем и решения задач в общем виде. Билет состоит из двух вопросов, полный список которых приведен в конспекте лекций.