

# ЗАДАЧИ К ОБЩЕМУ ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, I СЕМЕСТР.

## Предел последовательности.

1. Пользуясь определением предела последовательности, докажите что  
а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (0.8)^n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n+1} = 0$ .
2. Докажите, что  
а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ ; в)  $x_n = \sqrt[n]{5} - 1$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ; д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .
3. Докажите, что последовательности являются бесконечно большими:  
а)  $a_n = \sqrt{n}$ ; б)  $a_n = (-1)^n \cdot n$
4. Докажите, что последовательность  $\{(1 + (-1)^n)n\}$  неограниченная, однако не является бесконечно большой.
5. Докажите сходимость последовательности  $\{x_n\}$  и вычислите ее предел, если она определяется рекуррентным соотношением:  
а)  $x_1$  - произвольное положительное число,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ,  $\forall n \geq 1$ ,  $a > 0$ .  
б)  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$ .
6. Найдите все предельные точки последовательностей  $\{x_n\}$ , а также  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ :  
а)  $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$ ; б)  $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$ ; в)  $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$ .
7. Исследуйте сходимость последовательности  $x_n = \frac{n^\alpha - 1}{2n^2 + n + 1}$  в зависимости от параметра  $\alpha$ .
8. Вычислите пределы  
а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{n}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$ .

## Предел и непрерывность функции.

9. Пусть  $R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ . Докажите, что  
$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ a_0/b_0, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$
10. Вычислите пределы  
а)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+1)}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^{40} (5x+1)^{10}}{(3x-2)^{25}}$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$ .

11. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  не существует.

12. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 1} x \operatorname{sgn}(x-1)$  или докажите, что он не существует.

13. Докажите, что функция Дирихле  $D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррац.} \\ 1, & x \text{ — рац.} \end{cases}$  не имеет предела ни в одной точке.

14. Вычислите а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

15. Докажите а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ,  $a > 0$ .

16. Пользуясь свойствами символа " $o$  — малое", запишите для функций  $\alpha(x)$  равенство вида  $\alpha(x) = o(1)$  или  $\alpha(x) = o((x-a)^k)$  при  $x \rightarrow a$  ( $k$  — натуральное):

а)  $\alpha(x) = o(-5x + x^2 - x^3 + o(-5x + x^2 - x^3))$ ,  $x \rightarrow 0$ ;

б)  $\alpha(x) = (x-1)o((x-1)^2 + o(x-1))$ ,  $x \rightarrow 1$ ;

в)  $\alpha(x) = \frac{1}{3x}o(5x + x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

г)  $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}o(2x^4 + o(x^4 + 2x^2))$ ,  $x \rightarrow 0$ ;

д)  $\alpha(x) = \frac{o(2(x+2)^3)}{(x+2)^2} + \frac{o(4(x+2)^5)}{(x+2)^4}$ ,  $x \rightarrow -2$ .

17. Пользуясь свойствами символа " $o$  — малое", запишите для функций  $\alpha(x)$

равенство вида  $\alpha(x) = o(1)$  или  $\alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $k$  — натуральное):

а)  $\alpha(x) = o\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ;

б)  $\alpha(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ ;

в)  $\alpha(x) = x^2 o\left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$ ;

г)  $\alpha(x) = x\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ ;

д)  $\alpha(x) = 5x \cdot o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ .

18. Напишите асимптотические разложения функций при  $x \rightarrow 0$  с остаточным членом  $o(x^\alpha)$ , где  $\alpha \geq 0$ :

а)  $\sin^2(5\sqrt{x} + x)$ ; б)  $\cos(4x^2 + x)$ ; в)  $\ln(1 - x^2 + x)$ ; г)  $\ln(\cos 2x)$ ;

д)  $\ln(e^x + \sqrt{x})$ ; е)  $\cos \sqrt{\sin x}$ ,  $x > 0$ .

19. Напишите асимптотические разложения функций при  $x \rightarrow \infty$  с остаточным членом  $o(1/x^\alpha)$ , где  $\alpha \geq 0$ :

а)  $\sqrt{x^2 + x} - x$ ; б)  $\sqrt[3]{x^3 + x} - x$ ; в)  $\ln \cos\left(\frac{2}{x}\right)$ ; г)  $e^{1/\sqrt{x}} - 1$ ,  $x > 0$ .

20. Вычислите пределы

- а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2 \cos x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + ax} - \sqrt[n]{1 + bx}}{x}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2})$ ;  
 е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1 + x}{2 + x} \right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}}$  при  $x \rightarrow +0$ ,  $x \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ;  
 з)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ ; и)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} 2x}{\ln \cos 3x}$ ; к)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n})$ ;  
 л)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$ ; м)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \log_x 2$ ;  
 н)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$ ,  $a > 0$ ; о)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ ;  
 п)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$ .

21. Найти все точки разрыва функций и определите их тип:  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ;

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}; f(x) = x \sin \frac{1}{x}; f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln |x|}.$$

**Дифференцирование.**

28. Пользуясь определением производной, найдите производные функций:

а)  $y = \sqrt{x}$  в точке  $x = 4$ , б)  $y = x|x|$  в точке  $x = 0$ .

29. Найдите односторонние производные  $f'(x_0 + 0)$  и  $f'(x_0 - 0)$  функций

30. а)  $y = |x|$ ,  $x_0 = 0$ ;  $x_0 = 1$ ; б)  $x \operatorname{sgn} x$ ,  $x_0 = 0$ ; в)  $x^2 \operatorname{sgn} x$ ,  $x_0 = 0$ ;

31. г)  $|x - 1|e^x$ ,  $x_0 = 1$ .

32. Найдите первые производные и первые дифференциалы функций:

а)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ;

б)  $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$ ; в)  $y = e^{x^2} \cos 2x$ ; г)  $y = x^{\sin x}$ ;

д)  $y = e^{e^x} + x^{e^x}$ ; е)  $y = \ln^3(\ln^2(\ln x))$ ; ж)  $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2})$ ;

з)  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x}$ ; и)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ ; к)  $y = \sin x^{\cos x}$ .

33. Пусть  $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0 \\ ax + b, & x > x_0 \end{cases}$ , где функция  $f(x)$  дифференцируема слева при

$x = x_0$ . При каком выборе коэффициентов  $a$  и  $b$  функция  $F(x)$  будет непрерывной и дифференцируемой в точке  $x_0$ ?

34. Часть кривой  $y = \frac{m^2}{|x|}$  ( $|x| > c$ ) дополнить параболой  $y = a + bx^2$  ( $|x| \leq c$ ) (где  $a$  и  $b$  – неизвестные параметры) так, чтобы получилась гладкая кривая.

35. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, найдите приближенное значение величины  $A$  без калькулятора: а)  $A = \sqrt[3]{1,01}$ ; б)  $A = \operatorname{arctg} 1,1$ ; в)  $A = e^{0,2}$ .
36. Для функции, заданной параметрически в виде  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , записать уравнение касательной и нормали к графику функции при  $t = \frac{\pi}{4}$ ,  $t = 0$ .
37. Для функции, заданной параметрически в виде  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ , записать уравнение касательной и нормали к графику функции при  $t = \frac{\pi}{4}$ ,  $t = 0$ .
38. Найдите дифференциалы  $n$ -го порядка: а)  $f(x) = \ln(x^2 + x)$ ; б)  $f(x) = x^2 \sin 2x$ ,  $n = 20$ ; в)  $f(x) = xe^{5x}$ ,  $n = 11$ ; г)  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ,  $n = 8$ .

39. Найдите точку  $c$  в формуле конечных приращений Лагранжа для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad \text{на сегменте } [0; 2].$$

40. Используя правило Лопиталя, вычислите пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} 2x$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .
41. Напишите разложение по формуле Тейлора с центром в точке  $x = x_0$  до члена указанного порядка  $n$  включительно функций: а)  $f(x) = (2 + x)^3$ ,  $x_0 = 1$ ,  $n = 3$ ; б)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $n = 3$ ; в)  $f(x) = \sqrt{1 - x}$ ,  $x_0 = 0,36$ ;  $n = 2$ ; г)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 2$ ,  $n = 3$ ; д)  $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $n = 4$ ; е)  $f(x) = \frac{1}{1 + x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $n = 4$ .
42. Разложите по формуле Маклорена до члена указанного порядка  $n$  включительно функцию а)  $f(x) = \sin(\sin x)$ ,  $n = 3$ ; б)  $f(x) = \ln \cos x$ ,  $n = 4$ ; в)  $f(x) = e^{2x-x^2}$ ,  $n = 3$ ; г)  $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$ ,  $n = 4$ ; д)  $\sqrt[n]{a^n + x}$ ,  $n = 2$ .
43. С помощью формулы Тейлора найдите приближенные значения с указанной точностью  $\varepsilon$ : а)  $\sqrt[3]{9}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ; б)  $\ln 1,1$ ;  $\varepsilon = 10^{-3}$ ; в)  $e^{0,3}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
44. Вычислите а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\ln(1 + x^3)}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ .

### Исследование графиков функций.

45. Найдите области возрастания и убывания функции, точки локального экстремума, области сохранения знака выпуклости, точки перегиба и нарисуйте

эскиз графика функции а)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ ; б)  $f(x) = x \ln x$ ; в)  $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ ;  
 г)  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ .

46. Найдите наклонные асимптоты к графику функции а)  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ ;

б)  $f(x) = x \ln \frac{x+1}{x}$ ; в)  $f(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x}$ ; г)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ; д)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

### Интегрирование.

47. Вычислите неопределенные интегралы: а)  $\int (x^3 + 1)x^2 dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$ ;

в)  $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$ ; г)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}$ ; д)  $\int \sin^3 x dx$ ; е)  $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ .

48. Вычислите определенные интегралы: а)  $\int_0^1 x(1-x)^{10} dx$ ; б)  $\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$ ;

в)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$ ; г)  $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ ; д)  $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ ; е)  $\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1}$ .

49. Вычислите методом подстановки неопределенные интегралы:

а)  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ .

50. Вычислите методом подстановки определенные интегралы:

а)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ ; б)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

51. Вычислите методом интегрирования по частям неопределенные интегралы:

а)  $\int (x+1) \cos 2x dx$ ; б)  $\int x e^{-x} dx$ ; в)  $\int x^5 e^{x^3} dx$ ; г)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ ; д)  $\int e^x \cos x dx$ .

52. Вычислите методом интегрирования по частям определенные интегралы:

а)  $\int_1^e \ln x dx$ ; б)  $\int_0^{\pi/6} e^{2x} \cos 3x dx$ ; в)  $\int_0^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ .

53. Вычислите неопределенные интегралы от рациональных функций:

а)  $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ; б)  $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x-2}$ ; в)  $\int \frac{x^2 dx}{x^2+x-2}$ ;

г)  $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$

54. Вычислите определенные интегралы от рациональных функций: а)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ ;

б)  $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$ ; в)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-8}$ .

55. Вычислите неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а)  $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ ; б)  $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

56. Вычислите определенные интегралы от тригонометрических функций:

а)  $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$ ; б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ;

57. Вычислите интегралы от иррациональных функций: а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ ;

б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - x}}$ ; в)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$ ; г)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ ; д)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ .

58. Продифференцируйте определенные интегралы по параметру: а)  $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin(x^2) dx$ ;

б)  $\frac{d}{db} \int_a^b \sin(x^2) dx$ ; в)  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$ ; г)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ ; д)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{x dt}{\sqrt{1+t^2}}$ .

59. Найдите площадь фигуры, граница которой задана уравнениями в декартовых координатах: а)  $y = x^2$ ;  $x + y = 2$ ; б)  $y = x^2(a^2 - x^2)$ .