

**ЗАДАЧИ К ОБЩЕМУ ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ,
II СЕМЕСТР.**

I. Точки и множества в пространстве

Найдите все граничные и все предельные точки множества точек на плоскости.

1. $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$,
2. $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$,
3. $\left\{ \left(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n} \right), n \in N \right\}$

Нарисуйте семейство линий равного уровня функции

4. $u(x, y) = xy$,
5. $u(x, y) = \frac{y}{x}$,
6. $u(x, y) = \frac{y}{x^2}$,
7. $u(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
8. $u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$,
9. $u(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$,
10. $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

II. Предел функции нескольких переменных. Непрерывные функции.

Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке.

11. $u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
в точке $(0; 0)$,
12. $u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$
в точке $(0; 0)$,
13. $u(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ в
точках $(0; 0)$ и $(0; 1)$,
14. $u(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ в
точках $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$,
15. $u(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ в точке $(0; 0)$.

III. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Для функции $z = u(x, y)$ найдите частные производные первого и второго порядков, первый и второй дифференциалы, градиент. Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, найдите вектор нормали к этой плоскости. Найдите производную по направлению \vec{L} в точке $M_0(x_0, y_0)$.

16. $u(x, y) = 2x + 3y$, $M_0 = (3; 2)$, $\vec{L} = (3; -2)$,
17. $u(x, y) = 8x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$, $M_0 = (2; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$,
18. $u(x, y) = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$,
19. $u(x, y) = x^2y^3(6 - 2x - 3y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$,
20. $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$,
21. $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M_0 = (\sqrt{3}; 1)$, $\vec{L}_1 = (1; -\sqrt{3})$, $\vec{L}_2 = (\sqrt{3}; 1)$,
22. $u(x, y) = x^y - y^x$, $M_0 = (e; e)$, $M_1 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; -1)$,
23. $u(x, y) = x^3 - x^2y + y^3 - 1$, $\vec{L} = (\sqrt{3}; 1)$.
24. Для функции $u(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции

25. $u = f(\xi, \theta)$, $\xi = \sin t$, $\theta = \cos t$,
26. $u = f(\xi, \theta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\theta = x^2 - y^2$,
27. $u = f(\xi, \eta, \theta)$, $\xi = xy$, $\eta = x - y$, $\theta = x + y$,

Имеет ли функция $u(x, y)$ частные производные первого порядка в точке $(0; 0)$?
Если имеет, найдите их.

28. $u(x, y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$,
29. $u(x, y) = \sqrt[3]{x^2y}$,
30. $u(x, y) = \sqrt[3]{xy}$,
31. $u(x, y) = \sqrt[3]{xy(x^2 + y^2)}$,
32. $u(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
33. $u(x, y) = \sqrt[3]{x^5 - y^5}$,
34. $u(x, y) = \sqrt[3]{yx^4 + xy^4}$

IV. Формула Тейлора

Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 и с остаточным членом в форме Пеано, если

35. $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M_0(2, 3)$, $n = 2$
36. $u = x^y$, $M_0(e, e)$, $n = 2$,
37. $u = e^x \sin y$, $M_0(0, 0)$, $n = 3$

38. $u = \ln(1 + x + y), M_0(0, 0), n = 3$ 40. $u = x^3 + x + y + xyz, M_0(0; 0), n = 3.$
39. $u = x^3 + y^3 - 3xy, M_0(1; 1), n = 2$

Найдите все точки локального экстремума функций

41. $u(x, y) = x^2 + xy + y^2,$ 46. $u(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$ в области $x > 0 \cap y > 0 \cap z > 0,$
42. $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$
43. $u(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y},$ 47. $u(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$
44. $u(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y},$
45. $u(x, y, z) = xy + xz + yz,$
48. $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$
49. Исследуйте на экстремум функцию $u = x \cos y + z \cos x$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2}; 0; 1\right).$

V. Неявные функции

Найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$, если

50. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0,$
51. $F(x, y) = 8x^2y - x^4 - y^4 = 0, x > 0, y > 0,$
52. $F(x, y) = y^2 - ay - \sin x = 0, 0 \leq x \leq 2\pi.$

Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

53. $xyz = x^2 + y^2 + z^2;$ 54. $x^2 + zx + z^2 + y = 0.$
55. $z \cos x + y \cos z + x \cos y = 3;$

Функция $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Найдите указанные частные производные.

56. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
57. $F(x, y, z) = \arctg \frac{z}{x} - (z + x + y)$, найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
58. $F(x, y, z) = \ln(xy + yz) - (z^2 + x^2 + y^2 - 2)$, найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

59. Найдите первый и второй дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных

$$\text{ неявно системой уравнений } \begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

Преобразуйте уравнение, введя новые переменные.

60. $y^2 + (x^2 - xy) \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = tx, \quad y = y(t);$

61. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad x = e^t, \quad y = y(t).$

Приняв v за новую функцию $v(x,y)$, преобразуйте уравнение

62. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -u, \quad u = ve^{-x-y}.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v , преобразуйте уравнение

63. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4x, \quad u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z;$

64. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y}, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = y, \quad w = zy - x.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение

65. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x, \quad v = 2\sqrt{y}, \quad (y > 0).$

VI. Условный экстремум

Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума указанной функции при заданных условиях.

66. $u(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 2,$

67. $u(x,y) = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 2,$

68. $u(x,y) = x + y$ при условии $xy = 1,$

69. $u(x,y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ в области $x > 0 \cap y > 0.$

70. $u(x,y,z) = x + y + z$ при условии $xyz = 1,$

71. $u(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$ при условии $2x + 3y + 4z = 9,$

72. $u(x,y,z) = xyz$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$

VII. Кратные интегралы

Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл.

73. $\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} 2y dy,$

74. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y dy,$

$$75. \int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y dy,$$

$$76. \int_0^1 dy \int_y^1 xy dx.$$

Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ к повторному двумя способами:

$$77. D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\};$$

$$78. D = \{(x, y) : y^2 \leq x + 2, y \geq x\}$$

Вычислите

$$79. \iint_G (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 6\};$$

$$80. \iint_G (x^2 - y^2) dx dy, \quad D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \left\{ \frac{\pi}{6} \leq \arctg \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{4} \right\} \cap x > 0.$$

81. Найдите замену переменных $(u, v) \leftrightarrow (x, y)$, при которой область D на плоскости (x, y) , ограниченная линиями $y^2 = 16x$, $y^2 = 9x$, $x = 2y$, $x = 4y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u, v) . Вычислите площадь области D , используя замену переменных в двойном интеграле.

82. Найдите замену переменных $(u, v) \leftrightarrow (x, y)$, при которой область D на плоскости (x, y) , ограниченная линиями $xe^y = 1$, $xe^y = 2$, $x = e^y$, $x = 2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u, v) . Вычислите площадь области D , используя замену переменных в двойном интеграле.

Вычислите массу $m = \iint_G dx dy$, статические моменты $M_x = \iint_G y dx dy$,

$M_y = \iint_G x dx dy$ и моменты инерции $I_x = \iint_G y^2 dx dy$, $I_y = \iint_G x^2 dx dy$ однородной

пластинки с плотностью $\rho = 1$, ограниченной линиями:

$$83. 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x;$$

$$85. 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x;$$

$$84. 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x(4 - x);$$

$$86. 10^{-3} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^{-1}.$$

87. Изобразите на плоскости (x, y) область D , для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_y^{3-2y} f(x, y) dx$. Измените порядок интегрирования.

88. Изобразите на плоскости (x, y) область D , для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-2y}^{1-y} f(x, y) dx$. Вычислите

указанный интеграл для $f(x, y) = y$.

89. Вычислите координаты центра масс и моменты инерции плоской фигуры относительно осей координат, если фигура ограничена линиями $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = x$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

90. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos x$, $y = \sin x$ ($\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$); поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

91. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \arcsin x$; поверхностная плотность $\rho(x) \equiv 1$.
92. Вычислите тройной интеграл $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.
93. Сведите тройной интеграл $\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$ к повторному, если G - область, ограниченная поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 2$.
94. Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$).
95. Пусть G – однородное тело с единичной плотностью, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$ ($z \geq 1$). Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0 , находящейся в начале координат.

VIII. Криволинейные интегралы первого рода

96. $\int_L ds$, где L – кривая $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$,
97. $\int_L y ds$, где L – кривая $y = e^x$, $0 \leq x \leq 2$,
98. $\int_L xy dl$, где L – часть ломаной линии
 $x + y = 1$, $x - y = -1$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
99. $\int_L x^2 y dl$, где $L = \left\{ (x, y) : x = 4 \cos t, y = \sin 2t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.
100. Вычислите длину кривой $y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$.
101. Вычислите массу кривой $y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$ с линейной плотностью
 $\rho(x) = 2\sqrt{1+x}$.
102. Вычислите x -координату центра масс кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,
 если линейная плотность постоянна.
103. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$,
 $0 \leq t \leq \pi$, если линейная плотность $\rho \equiv 1$.
104. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$,
 $0 \leq t \leq \pi$; линейная плотность $\rho(t) = \sin t$.
105. Найдите координаты силы притяжения материальной точки массы m
 однородной полуокружностью массой M и радиусом R ; точка помещена в центре соответствующей окружности.

IX. Криволинейные интегралы второго рода:

106. $\int_{AB} xdx + ydy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

107. $\int_L (2 - y)dx + xdy$, где кривая L задана уравнениями

$x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t .

108. $\oint_L xdy + 2ydx$, где кривая L задана соотношениями

$y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$, $0 \leq y \leq x$.

109. $\int_L xydx - x^3y^3dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением

$|x - y| + |x + y| = 1$.

110. $\int_L ydx + zdy + xdz$, где L – кривая $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

111. эллипсом $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$;

112. параболой $(x + y)^2 = 2ax$ ($a > 0$) и осью Ox .

113. астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

114. Вычислите моменты инерции относительно осей координат кривой, заданной как пересечение поверхности $2x^2 + y^2 - z^2 = -1$ и плоскости $z = x + 1$.

115. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{x - y, 2x + y^2\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$.

116. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{y, x\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,-3)$.

X. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке M :

114. $S: z = x^2 + y^2$; $M(3,4,25)$.

115. $S: x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2$; $M(1,1,0)$.

116. $S: x = 2uv$, $y = u + v$, $z = u^2 + v^2$,
 $M(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, где $u_0 = 1$, $v_0 = -1$.

XI. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого рода. Приложения.

Найдите площадь поверхности с помощью двойного интеграла:

114. $z = 3x + 4y$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

115. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1.$
 116. $2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1.$
 117. $z = xy, x^2 + y^2 \leq a^2.$
 118. $z = x^2 + y^2, (x^2 + y^2)^2 \leq xy, x \geq 0, y \geq 0.$
 119. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1.$
 120. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi.$

XII. Найдите поверхностные интегралы I рода.

121. $\iint_S dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1].$
 122. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1].$
 123. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cap z \geq 0.$
 124. $\iint_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}.$
 125. $\iint_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0.$
 126. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ с помощью поверхностного интеграла.
 127. Найдите момент инерции относительно оси Oz части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = x.$
 128. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, y \geq 0$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = zy.$

XIII. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения.

129. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью $Oz.$
 130. $\iint_S (y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq y \leq b$
 131. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz).
 132. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – часть внутренней стороны гиперboloида $x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 3.$
 133. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$