Вопросы и задачи к экзамену по математическому анализу I семестр, 2009-2010.

Тема 1. Числовые множества и последовательности.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.
1.2. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.
1.3. Сформулируйте определение ограниченного снизу множества вещественных чисел.
1.4. Сформулируйте определение неограниченного множества вещественных чисел.
1.5. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.
1.6. Сформулируйте определение неограниченного сверху множества вещественных чисел.
1.7. Сформулируйте определение предельной точки числового множества.
1.8. Сформулируйте определение верхней грани числового множества.
1.9. Сформулируйте определение нижней грани числового множества.
1.10. Сформулируйте определение точной верхней грани числового множества.
1.11. Сформулируйте определение точной нижней грани числового множества.
1.12. Сформулируйте определение ограниченной последовательности.
1.13. Сформулируйте определение неограниченной последовательности.
1.14. Сформулируйте определение предела последовательности.
1.15. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности.
1.16. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.
1.17. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.
1.18. Сформулируйте два определения предельной точки последовательности.
1.19. Сформулируйте определение верхнего предела последовательности.
1.20. Сформулируйте определение нижнего предела последовательности.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о пределах суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей.
2.2. Сформулируйте теорему о «двух милиционерах».
2.3. Сформулируйте теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности.
2.4. Сформулируйте теорему о вложенных отрезках.
2.5. Сформулируйте теорему Больцано-Вейерштрасса.
2.6. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите, что сходящаяся последовательность имеет только один предел.
3.2. Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена.
3.3. Докажите теорему о пределе суммы двух последовательностей.
3.4. Докажите теорему о пределе разности двух последовательностей.
3.5. Докажите теорему о пределе произведения двух последовательностей.
3.6. Докажите теорему о пределе отношения двух последовательностей.
3.7. Докажите теорему о «двух милиционерах».
3.8. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что любая подпоследовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ сходится к $\boldsymbol{a}$.
3.9. Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.
3.10. Докажите, что убывающая ограниченная последовательность имеет предел.
3.11. Докажите теорему о вложенных отрезках.

3.12. Докажите теорему Больцано-Вейерштрасса.
3.13. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.
3.14. Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.
3.15. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Приведите примеры ограниченного и неограниченного множеств.
4.2. Докажите неравенство Бернулли, $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$.
4.3. Сформулируйте отрицание к определению ограниченной последовательности.
4.4. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется пределом последовательности".
4.5. Сформулируйте отрицание к определению бесконечно малой последовательности.
4.6. Сформулируйте отрицание к определению бесконечно большой последовательности.
4.7. Сформулируйте отрицание к определению фундаментальной последовательности.
4.8. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ – возрастающая.
4.9. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^{n+1}$ – убывающая.
4.10. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ сходится.
4.11. Пусть $\{a_n\}$ - бесконечно малая последовательность, $a_n \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Докажите, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ - бесконечно большая.

4.12. Пусть $\{a_n\}$ - бесконечно большая последовательность.

Докажите, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ – бесконечно малая.

4.13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \ a \neq 0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.
4.14. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$? Ответ обоснуйте.
4.15. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$? Ответ обоснуйте.
4.16. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ - расходится. Что можно сказать о пределе последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$? Ответ обоснуйте.
4.17. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$? Ответ обоснуйте.
4.18. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n / y_n\}$? Ответ обоснуйте.
4.19. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n / y_n\}$? Ответ обоснуйте.
4.20. Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\boldsymbol{a}$, то последовательность $\{|x_n|\}$ сходится к $|a|$.
4.21. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.
4.22. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)^n = 0$.
4.23. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

4.24. Пусть, начиная с некоторого номера n, $x_n \geq y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

4.25. Пользуясь определением предела последовательности, докажите что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (0.8)^n = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$.

4.26. Исследуйте сходимость последовательности $x_n = \dfrac{n^\alpha - 1}{2n^2 + n + 1}$

в зависимости от параметра α.

4.27. Найдите

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

4.28. Докажите, что последовательности являются бесконечно большими:

а) $a_n = \sqrt{n}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$

4.29. Докажите, что последовательность $\left\{\left(1 + (-1)^n\right)n\right\}$ неограниченная,

однако не является бесконечно большой.

4.30. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие подпоследовательности.

4.31. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие окрестности.

4.32. Приведите пример последовательности, у которой есть одна предельная точка, но она не является сходящейся.

4.33. Приведите пример последовательности, у которой ровно две предельные точки.

4.34. Докажите, что монотонная неограниченная последовательность не имеет предельной точки.

4.35. Найдите все предельные точки последовательностей $\{x_n\}$. Найдите $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$:

а) $x_n = (-1)^n$; б) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$; в) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

г) $x_n = \cos^n \dfrac{2\pi n}{3}$; д) $x_n = \sin\left(\pi n/2 + 1/n\right)$

5. **Задачи повышенной трудности.**

5.1. Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

5.2. Докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$ и вычислите ее предел, если

а) x_1 - произвольное положительное число, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ $\forall n \geq 1$, $a > 0$.

б) $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$, $\forall n > 1$.

5.3. Найдите все предельные точки последовательности (обоснуйте ответ)

$1;\ 1/2;\ 1;\ 1/2;\ 1/3;\ 1;\ 1/2;\ 1/3;\ 1/4 \ldots$

5.4. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность

$x_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ при $\alpha > 0$ является бесконечно малой.

5.5. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность

$x_n = \dfrac{n^a}{b^n}$ при $b > 1$ является бесконечно малой.

5.6. Докажите, что $\forall b \ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}=0$.

5.7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

5.8. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность
$x_n=\frac{b^n}{n^a}$ при $b>1$ является бесконечно большой.

5.9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

5.10. Докажите, что последовательность $x_n=\sqrt[n]{n}-1$ является бесконечно малой.

5.11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $b_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

5.12. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $b_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

5.13. Приведите пример последовательности с бесконечным числом предельных точек.

Тема 2. Предел и непрерывность функции.

1. **Определения**.

1.1. Сформулируйте определение ограниченной на множестве X функции.
1.2. Сформулируйте определение ограниченной сверху на множестве X функции.
1.3. Сформулируйте определение ограниченной снизу на множестве X функции.
1.4. Сформулируйте определение неограниченной на множестве X функции.
1.5. Сформулируйте определение неограниченной сверху на множестве X функции.
1.6. Сформулируйте определение неограниченной снизу на множестве X функции.
1.7. Сформулируйте определение верхней грани функции на множестве X.
1.8. Сформулируйте определение нижней грани функции на множестве X.
1.9. Сформулируйте определение точной верхней грани функции на множестве X.
1.10. Сформулируйте определение точной нижней грани функции на множестве X.
1.11. Сформулируйте определение монотонной на промежутке функции.
1.12. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $f(x)$ в точке $x = a$.
1.13. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $f(x)$ при $x \to a+0$.
1.14. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $f(x)$ при $x \to a-0$.
1.15. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.
1.16. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.
1.17. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $f(x)$ в точке $x = a$.
1.18. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.
1.19. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.
1.20. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$.
1.21. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to a-0$.
1.22. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.
1.23. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$.
1.24. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$.
1.25. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$.
1.26. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to -\infty$ при $x \to a+0$.
1.27. Сформулируйте "по Коши" определение: $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$.
1.28. Сформулируйте "по Коши" определение: функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$.
1.29. Сформулируйте "по Коши" определение: функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to +\infty$.
1.30. Сформулируйте "по Гейне" определение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$.
1.31. Сформулируйте "по Гейне" определение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.
1.32. Сформулируйте "по Гейне" определение: $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$.
1.33. Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке.
1.34. Сформулируйте определение непрерывной на промежутке функции.
1.35. Сформулируйте определение точки разрыва функции $f(x)$.
1.36. Сформулируйте определение точки устранимого разрыва функции $f(x)$.
1.37. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.
1.38. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода функции $f(x)$.
1.39. Сформулируйте определение обратной функции.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.
2.2. Сформулируйте теорему о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке.
2.3. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции при $x \to a$.
2.4. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции при $x \to +\infty$.
2.5. Сформулируйте теорему о первом замечательном пределе.
2.6. Сформулируйте теорему о втором замечательном пределе.
2.7. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций.
2.8. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
2.9. Сформулируйте теорему о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите, что сумма двух бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.
3.2. Докажите, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию является бесконечно малой функцией.
3.3. Докажите теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.
3.4. Докажите теорему о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке.
3.5. Докажите теорему о пределе монотонной ограниченной функции.
3.6. Докажите эквивалентность определений по Гейне и по Коши предела функции $f(x)$ при $x \to a$.
3.7. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Докажите необходимость.
3.8. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Докажите достаточность.
3.9. Докажите теорему о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций.
3.10. Докажите теорему о непрерывности сложной функции.
3.11. Докажите теорему о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение
3.12. Докажите теорему о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции.
3.13. Докажите теорему о первом замечательном пределе.
3.14. Докажите теорему о втором замечательном пределе.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке $x = a$.
4.2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to a$".
4.3. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to \infty$".
4.4. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to -\infty$".
4.5. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a$".
4.6. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$".
4.7. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to -\infty$ при $x \to a - 0$".
4.8. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a + 0$".
4.9. Докажите, что сумма бесконечно малой функции и ограниченной функции является ограниченной функцией.

4.10. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а $g(x)$ не имеет предела в этой точке. Что можно сказать о существовании предела разности $f(x)-g(x)$ в точке x_0? Ответ обоснуйте.

4.11. Дайте определение функции, не являющейся непрерывной в точке x_0. Приведите пример разрывной функции.

4.12. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0. Что можно сказать о непрерывности суммы $f(x)+g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.13. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0. Что можно сказать о непрерывности произведения функций $f(x)\cdot g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.14. Пусть существует предел $f(x)$ в точке x_0 и не существует предел $g(x)$ в точке x_0. Что можно сказать о пределе отношения $f(x)/g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.15. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна, то и ее модуль также есть непрерывная функция.

4.16. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть функция разрывная? Ответ обоснуйте.

4.17. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ – разрывна в точке x_0. Что можно сказать о непрерывности суммы $f(x)+g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.18. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ – разрывна в точке x_0. Что можно сказать о непрерывности разности $f(x)-g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.19. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ – разрывна в точке x_0. Что можно сказать о непрерывности произведения $f(x)\cdot g(x)$ в точке x_0? Ответ обоснуйте.

4.20. Пусть $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ a_0/b_0, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

4.21. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует.

4.22. Найдите $\lim\limits_{x\to 1} x\,\mathrm{sgn}(x-1)$ или докажите, что он не существует.

4.23. Вычислите а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

4.24. Докажите а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$.

4.25. Пусть заданы две бесконечно малые при $x\to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Докажите справедливость свойств символа “o-малое” при $x\to a$:

$o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$;

$o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;

$o(c\beta)=o(\beta),\ \forall c\neq 0,\ c=const$

$co(\beta)=o(\beta),\ \forall c\neq 0,\ c=const.$

$\big(o(\beta)\big)^n=o(\beta^n),\quad \forall n\in\mathbb{N}$;

$\beta^n o(\beta)=o\big(\beta^{n+1}\big),\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\dfrac{o(\beta^n)}{\beta}=o\big(\beta^{n-1}\big),\quad \forall n\in\mathbb{N}$;

$o\big(o(\beta)\big)=o(\beta)$;

$o\big(\beta+o(\beta)\big)=o(\beta)$;

$\alpha\beta=o(\alpha),\ \ \alpha\beta=o(\beta)$;

если $\alpha\sim\beta$, то $\alpha-\beta=o(\alpha)$.

4.26. Пользуясь свойствами символа "o – малое", запишите для функций $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o\big((x-a)^k\big)$ при $x\to a$ (k-натуральное):

4.26.1. $\alpha(x)=o(-5x+x^2-x^3+o(-5x+x^2-x^3)),\ \ x\to 0$;

4.26.2. $\alpha(x)=(x-1)\,o((x-1)^2+o(x-1)),\ \ x\to 1$;

4.26.3. $\alpha(x)=\dfrac{1}{3x}o(5x+x^2),\ \ x\to 0\,.$

4.26.4. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2}o\left(2x^4+o\left(x^4+2x^2\right)\right),\ \ x\to 0\,;$

4.26.5. $\alpha(x)=\dfrac{o\left(2(x+2)^3\right)}{(x+2)^2}+\dfrac{o\left(4(x+2)^5\right)}{(x+2)^4},\ \ x\to -2\,.$

4.27. Пользуясь свойствами символа "o – малое", запишите для функций $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$ при $x\to\infty$ (k-натуральное):

4.27.1. $\alpha(x)=o\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right);$

4.27.2. $\alpha(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\,;$

4.27.3. $\alpha(x)=x^2 o\left(\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right);$

4.27.4. $\alpha(x)=x\left(o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right);$

4.27.5. $\alpha(x)=5x\cdot o\left(\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right).$

4.28. Напишите асимптотические разложения функций при $x\to 0$
с остаточным членом $o(x^\alpha)$, где $\alpha\ge 0$:

а) $\sin^2(5\sqrt{x}+x)$; б) $\cos(4x^2+x)$; в) $\ln(1-x^2+x)$;

г) $\ln(\cos 2x)$; д) $\ln\left(e^x+\sqrt{x}\right)$; е) $\cos\sqrt{\sin x}$, $x>0$.

4.29. Напишите асимптотические разложения функций при $x\to\infty$
с остаточным членом $o(1/x^\alpha)$, где $\alpha\ge 0$:

а) $\sqrt{x^2+x}-x$; б) $\sqrt[3]{x^3+x}-x$; в) $\ln\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$; г) $e^{1/\sqrt{x}}-1,\ x>0$.

4.30. Вычислите пределы

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x-2)^{25}}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

$\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$;

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ при

$x\to +0,\ x\to 1,\ x\to +\infty$;

$\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{tgx}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{ch} 2x}{\ln\cos 3x}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$;

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right),\ a>0$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^{2}+e^{x}\right)}{\ln\left(x^{4}+e^{2x}\right)}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^{2}+e^{x}\right)}{\ln\left(x^{4}+e^{2x}\right)}$;

$\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{\sin bx}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(a-1)+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^{n}$;

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x}-x^{a}}{x-a}\quad(a>0)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}\quad(a>0,\,b>0)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^{2}\left(\pi\cdot 2^{x}\right)}{\ln\left(\cos\left(\pi\cdot 2^{x}\right)\right)}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^{x}\right)}{\ln\left(1+2^{x}\right)}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{n}\left(\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{x},\ a,c>0$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln(\mathrm{ch}x)\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{2}+x}-x\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\mathrm{ch}x}{\ln\cos x}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}^{n}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$;

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^{2}},\ a>0$;

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^{x}}{1+x3^{x}}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\quad a,b,c>0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1),\ x>0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\mathrm{ch}\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^{2}}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^{2}}}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.

4.31. Найдите все точки разрыва функций и определите их тип:

$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$; $\quad f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; $\quad f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$; $\quad f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{\ln|x|}$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1 Докажите, что если $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ "по Гейне", то $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ "по Коши".

5.2 Докажите, что если $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ "по Коши", то $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ "по Гейне".

5.3 Докажите, что если $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Гейне", то $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Коши".

5.4 Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$ "по Гейне", то $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$ "по Коши".

5.5 Пусть функция $y=f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $x\in(a;b)$. Докажите, что $\forall c\in(a;b)\ \exists\lim\limits_{x\to c-0}f(x)$.

5.6 Пусть функция $f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $(a;+\infty)$. Докажите, что $\exists\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

5.7 Пусть функция $f(x)$ убывает и ограничена на интервале $(a;b)$. Докажите, что $\exists\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

5.8 Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Докажите необходимость условия Коши.

5.9 Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Докажите достаточность условия Коши.

5.10 Докажите, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}0, & x - \text{иррац.}\\ 1, & x - \text{рац.}\end{cases}$ не имеет предела ни в одной точке.

5.11 Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$ и уравнение $f(x)=0$ не имеет корней на (a,b). Докажите, что функция не является непрерывной на $[a;b]$.

5.12 Пусть функция определена на $[a;b]$ и $\exists c\in\big(f(a);f(b)\big)$ такое, что уравнение $f(x)=c$ не имеет корней на (a,b). Докажите, что функция не является непрерывной на $[a;b]$.

5.13 Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ и в любой окрестности точки a найдутся точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, то $f(a)=0$.

5.14 Докажите, что если $f(a)>0$ и $\forall\delta>0\ \exists x$ такое, что $0<|x-a|<\delta$, $f(x)<0$, то функция $f(x)$ является разрывной в точке $x=a$.

5.15 Приведите пример функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых $\nexists\lim\limits_{x\to a} f(x)$, и $\nexists\lim\limits_{x\to a} g(x)$, но $\exists\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$.

5.16 Приведите пример функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых $\nexists\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, и $\nexists\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$.

5.17 Пусть функция $y=f(x)$ определена и возрастает на промежутке $x\in(a;b)$ и $\forall c\in(a;b)$ $\exists\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$, $\exists\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$ и эти пределы равны друг другу.

Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна на указанном промежутке.

Тема 3. Производные и дифференциалы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение производной функции $f(x)$.

1.2. Сформулируйте определение правой производной функции $f(x)$.

1.3. Сформулируйте определение левой производной функции $f(x)$.

1.4. Сформулируйте определение производной вектор-функции.

1.5. Сформулируйте определение дифференцируемой в данной точке функции.

1.6. Сформулируйте определение функции $f(x)$, дифференцируемой на множестве X.

1.7. Сформулируйте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ и запишите уравнение касательной.

1.8. Сформулируйте определение дифференциала функции.

1.9. Сформулируйте определение n-ной производной функции $f(x)$.

1.10. Сформулируйте определение n раз дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

1.11. Сформулируйте определение бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$.

1.12. Сформулируйте определение n-ной производной вектор-функции.

1.13. Сформулируйте определение n-ного дифференциала функции.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций.

2.2. Запишите формулы для дифференциалов суммы, разности, произведения и частного двух функций.

2.3. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.

2.4. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.

2.5. Запишите формулу для производной функции, заданной параметрически.

2.6. Запишите формулу n – ой производной произведения двух функций.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций.

3.2. Докажите теорему о производной сложной функции.

3.3. Докажите теорему о производной обратной функции.

3.4. Выведите формулу производной функции, заданной параметрически.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Докажите, что если $\exists f'\left(x_0\right)$ то $f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

4.2. Докажите, что если существует число A такое, что $f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(x_0\right) + A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $\exists f'\left(x_0\right)$.

4.3. Пользуясь определением производной, выведите формулы производных функций:
а) x^n, $n \in \mathbb{N}$; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $\log_a x$; д) a^x.

4.4. Пользуясь теоремой о производных суммы, разности, произведения и частного выведите формулы производных функций:

а) $\operatorname{tg} x$; б) $\operatorname{ctg} x$; в) $\operatorname{sh} x$; г) $\operatorname{ch} x$; д) $\operatorname{th} x$; е) $\operatorname{cth} x$.

4.5. Пользуясь теоремой о производной сложной функции, выведите формулу производной функции x^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.6. Пользуясь определением производной, выведите формулы для производных функций

а) $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$; б) $y = x|x|$ в точке $x = 0$.

4.7. Найдите односторонние производные $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$ функций

а) $y = |x|,\ x_0 = 0;\ x_0 = 1$; б) $x \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$; в) $x^2 \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$; г) $|x-1|e^x,\ x_0 = 1$.

4.8. Найдите первые производные и первые дифференциалы функций:

а) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

б) $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$;

в) $y = e^{x^2} \cos 2x$;

г) $y = x^{\sin x}$;

д) $y = e^{e^x} + x^{e^x}$; е) $y = \ln^3\left(\ln^2(\ln x)\right)$;

ж) $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

з) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$;

и) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$;

к) $y = \sin x^{\cos x}$.

4.9. Пусть $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \le x_0 \\ ax + b, & x > x_0 \end{cases}$, где функция $f(x)$ дифференцируема слева при $x = x_0$.

При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в точке x_0?

4.10. При каких a и b функция

$$f(x) = \begin{cases} y = \dfrac{1}{|x|}, & |x| > 2, \\ y = a + bx^2, & |x| \le 2 \end{cases}$$ является непрерывной и дифференцируемой?

4.11. Найдите дифференциалы *n*-го порядка:

а) $f(x) = \ln(x^2 + x)$; б) $f(x) = x^2 \sin 2x$, $n = 20$;

в) $f(x) = xe^{5x}$, $n = 11$; г) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, $n = 8$.

4.12. Используя теорему о производной обратной функции, найдите производные функций

а) $f(x) = \arcsin x$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

4.13. Найдите производную функции $f(x) = \ln x$, используя формулу $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$.

4.14. Найдите производную *n*-го порядка функции

а) $f(x) = x \ln x,\ n = 20$;

б) $f(x) = \sqrt{x},\ n = 30$;

в) $f(x) = xe^x,\ n = 30$;

г) $f(x) = 1/\sqrt{x},\ n = 40$;

д) $f(x) = x \sin x, n = 12$;

е) $f(x) = x^2 e^x,\ n = 100$;

ж) $f(x) = x^2 \sin x, n = 200$;

з) $f(x) = x \cos x,\ n = 60$;

и) $f(x) = x^2 \cos x,\ n = 71$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Используя теорему о производной сложной функции и тождество $f(f^{-1}(x)) = x$, выведите формулу производной обратной функции.

5.2. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.3. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^{x+1}, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.4. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x\cdot\left(1-x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.5. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^{1-2x}, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.6. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^{1+\sqrt{2x}}, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.7. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.8. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.9. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.10. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.11. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(e^{-\frac{1}{x}}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Докажите, что $\forall x\ \exists\ f'(x)$, $\nexists\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Найдите $f'(0)$.

5.12. Пусть $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Найдите $f'(0)$.

5.13. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-\left|\frac{1}{x^3}\right|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Найдите $f'(0)$.

5.14. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

5.15. Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

5.16. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0,

то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$,

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

5.17. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$,

то существует число A такое, что $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$,

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Тема 4. Неопределенный и определенный интегралы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение первообразной.
1.2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.
1.1. Сформулируйте определение интегральной суммы
1.2. Сформулируйте определение предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.
1.3. Сформулируйте определение нижней суммы (Дарбу).
1.4. Сформулируйте определение верхней суммы (Дарбу).
1.5. Сформулируйте определение предела верхних (нижних) сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.
1.6. Сформулируйте определение верхнего (нижнего) интеграла Дарбу.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.
2.2. Сформулируйте теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.
2.3. Перечислите свойства сумм Дарбу.
2.4. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижних и верхних сумм.
2.5. Запишите формулу среднего значения для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.6. Запишите формулу Ньютона – Лейбница и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.7. Запишите формулу замены переменной для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.8. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.
2.9. Перечислите известные Вам классы интегрируемых функций.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.
3.2. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для определенного интеграла.
3.3. Докажите теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.
3.4. Докажите теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.
3.5. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему новых точек. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не меньше, чем нижняя сумма для разбиения T.
3.6. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему новых точек. Докажите, что верхняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не больше, чем верхняя сумма для разбиения T.
3.7. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ не превосходит верхней суммы той же функции $f(x)$ для любого другого разбиения T' отрезка $[a;b]$.

3.8. Докажите, что множество верхних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено снизу.

3.9. Докажите, что множество нижних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено сверху.

3.10. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

3.11. Докажите теоремы об интегрируемости суммы и разности двух интегрируемых функций.

3.12. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a;b]$. Докажите, что $cf(x)$, где $c = const$, тоже интегрируема на $[a;b]$, причем $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3.13. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a;b]$. Докажите, что эта функция интегрируема на любом сегменте $[c,d]$, содержащемся в сегменте $[a;b]$.

3.14. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a;c]$ и $[c;b]$, $a < c < b$. Докажите, что эта функция интегрируема на сегменте $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

3.15. Докажите теорему об интегрируемости непрерывной на сегменте функции.

3.16. Докажите теорему об интегрируемости некоторых разрывных на сегменте функций.

3.17. Докажите теорему об интегрируемости монотонной на сегменте функции.

3.18. Докажите теорему о формуле среднего значения.

3.19. Докажите теорему о существовании первообразной непрерывной функции.

3.20. Докажите теорему о формуле Ньютона – Лейбница.

3.21. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Докажите, что $|f(x)|$ тоже интегрируема на $[a,b]$.

3.22. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Докажите, что $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

4. **Вопросы и задачи**.

4.1. Вычислите

$\int (x^3+1)x^2dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;

$\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}$;

$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$;

$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

$\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x-2}$;

$\int \frac{x^2dx}{x^2+x-2}$;

$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$;

$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$;

$\int \sin^3 xdx$;

$\int (x+1)\cos 2xdx$;

$\int xe^{-x}dx$;

$\int x^5e^{x^3}dx$;

$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$;

$\int e^x\cos xdx$;

$\int \sqrt{x}\ln xdx$;

$\int x\ln\sqrt{x}dx$;

$\int \sin(\ln x)\,dx$;

$\int \ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)dx$;

$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$;

$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

4.2. Вычислите

$\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$; $\int_0^1 x(1-x)^{10}\,dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1}$; $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$; $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}$; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-8}$; $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$; $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$; $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3xdx$; $\int_1^e \ln xdx$; $\int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$; $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot\sin^2 xdx$;

$\int_0^{\pi} \cos^4 xdx$; $\int_0^{\pi/2} \sin^5 xdx$; $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; $\int_1^e \ln xdx$; $\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cos 3xdx$; $\int_0^2 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

4.3. Следует ли из интегрируемости суммы двух функций $f(x)+g(x)$ интегрируемость $f(x)$ и $g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.4. Следует ли из интегрируемости разности двух функций $f(x)-g(x)$ интегрируемость $f(x)$ и $g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.5. Следует ли из интегрируемости произведения двух функций $f(x)\cdot g(x)$ интегрируемость $f(x)$ и $g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.6. Пусть $f(x)$ интегрируема, а $g(x)$ неинтегрируема.
Что можно сказать об интегрируемости $f(x)+g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.7. Пусть $f(x)$ интегрируема, а $g(x)$ неинтегрируема.
Что можно сказать об интегрируемости $f(x)-g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.8. Пусть $f(x)$ интегрируема, а $g(x)$ неинтегрируема.
Что можно сказать об интегрируемости $f(x)\cdot g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.9. Пусть $f(x)$ неинтегрируема и $g(x)$ неинтегрируема.
Что можно сказать об интегрируемости $f(x)+g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.10. Пусть $f(x)$ неинтегрируема и $g(x)$ неинтегрируема.
Что можно сказать об интегрируемости $f(x)-g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.11. Пусть $f(x)$ неинтегрируема и $g(x)$ неинтегрируема.
Что можно сказать об интегрируемости $f(x)\cdot g(x)$? Ответ обоснуйте.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; $\int \frac{\cos(\ln x)\,dx}{x^2}$; $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$; $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$.

5.2. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом сегменте.

5.3. Приведите пример функции $f(x)$, такой, что $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ существует, а $\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует.

5.4. Докажите интегрируемость произведения интегрируемых функций.

5.5. Известно, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $f(x)\ge 0$.

Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

5.6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a,b]$.

Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)dx > \int\limits_a^b g(x)dx$.

5.7. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$. Следует ли отсюда, что $f(x)\ge 0$? Ответ обоснуйте.

5.8. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx > \int\limits_a^b g(x)dx$. Следует ли отсюда, что $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a,b]$? Ответ обоснуйте.

5.9. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} f(x) > 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ также интегрируема на этом сегменте.

5.10. Вычислите:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \sin\left(t^2\right)dt;\qquad \frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt;\qquad \frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin\left(x^2\right)dx;\qquad \frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt;\qquad \frac{d}{dx}\int\limits_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}dt;$$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \ln\left(\frac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt.$$

Тема 5. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определения точной верхней и точной нижней граней функции на заданном множестве.
1.2. Сформулируйте определение равномерно непрерывной на промежутке X функции.
1.3. Сформулируйте определение функции, возрастающей (убывающей) в данной точке.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства)

2.1. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, непрерывной в данной точке.
2.2. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в данной точке.
2.3. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.
2.4. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.
2.5. Сформулируйте теорему Кантора.
2.6. Сформулируйте достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции в точке.
2.7. Сформулируйте теорему Ролля.
2.8. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.
2.9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие невозрастания (неубывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b).
2.10. Сформулируйте достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b).
2.11. Сформулируйте теорему о формуле Коши.
2.12. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
2.13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
2.14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке.
3.2. Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.
3.3. Докажите теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.
3.4. Докажите первую теорему Вейерштрасса.
3.5. Докажите вторую теорему Вейерштрасса.
3.6. Докажите теорему Кантора.
3.7. Докажите теорему о достаточном условии возрастания (убывания) в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.
3.8. Докажите теорему Ролля.
3.9. Докажите теорему Лагранжа (о формуле конечных приращений).
3.10. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии невозрастания (неубывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b).
3.11. Докажите теорему о достаточном условии возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b).
3.12. Докажите теорему о формуле Коши.

3.13. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
3.14. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
3.15. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
3.16. Докажите теорему о правиле Лопиталя вычисления $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите точку *c* в формуле конечных приращений Лагранжа для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(3-x^2\right), & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x\le\infty\end{cases}$$ на сегменте $[0;2]$.

4.2. Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}2x$;

д) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\sin\alpha x)}{\ln(\sin\beta x)}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

4.3. Выпишите разложение по формуле Маклорена с остаточным членом $o(x^n)$:

а) $f(x)=\cos x$;

б) $f(x)=e^x$;

в) $f(x)=e^{-x}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

е) $f(x)=-\ln(1-x)$;

ж) $f(x)=\ln(1+x)$;

з) $f(x)=\sin x$.

4.4. Разложите по формуле Маклорена до члена указанного порядка *n* включительно функцию

а) $f(x)=\sin(\sin x)$, $n=3$;

б) $f(x)=\ln\cos x$, $n=4$;

в) $f(x)=e^{2x-x^2}$, $n=3$;

г) $f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$, $n=4$;

д) $\sqrt[n]{a^n+x}$, $n=2$.

4.5. Вычислите

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\operatorname{tg}x}{\ln\left(1+x^3\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

5. **Задачи повышенной трудности.**

5.1. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой *n* раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные до n -го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f\left(x_0\right)$ и $f^{(k)}\left(x_0\right)$, $k=1,2,\ldots n$.

5.2. Докажите, что если $\exists f''(0)$, то $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+o\left(x^2\right)$ при $x\to 0$.

5.3. Докажите, что если $\exists f'''(0)$, то $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+\dfrac{1}{6}f'''(0)\cdot x^3+o\left(x^3\right)$ при $x\to 0$.

5.4. Пусть $P_n(x)$ - многочлен Тейлора дифференцируемой *n* раз в точке x_0 функции $f(x)$. Докажите, что $f(x_0+\Delta x)=P_n(x_0)+o\left((\Delta x)^n\right)$.

5.5. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы в точке x_0,

$f(x_0)=0,\ g(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\quad g'(x_0)=0,\ g''(x_0)\neq 0$, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$.

5.6. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0,

$f(x_0)=0,\ g(x_0)=0,\ \ g'(x_0)\neq 0$, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

5.7. Объясните, в каком месте нарушится ход доказательства первой теоремы Вейерштрасса, если в условии теоремы заменить "сегмент" на "интервал".

5.8. Приведите пример функции $f(x)$, непрерывной и ограниченной на промежутке $x\in[a;+\infty)$, которая не достигает своей точной верхней грани на этом промежутке.

5.9. Докажите, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0;+\infty)$.

5.10. Докажите, что функция $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0;+\infty)$.

5.11. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном интервале.

5.12. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(0;+\infty)$ и имеет наклонную асимптоту, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном интервале.

5.13. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $x\in[a;+\infty)$, $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ и $f(a)=b$.

Докажите, что функция достигает своей точной верхней грани на промежутке $x\in[a;+\infty)$.

Тема 6. Графики функций.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение точки локального максимума (минимума) функции $f(x)$.

1.2. Сформулируйте определение точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

1.3. Сформулируйте определение наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

1.4. Сформулируйте определение вертикальной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.

2.2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума дифференцируемой функции.

2.3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

2.4. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

2.5. Сформулируйте теорему о необходимых условиях перегиба графика дважды непрерывно дифференцируемой функции.

2.6. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика функции, использующих вторую производную.

2.7. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика функции, использующих третью производную.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.

3.2. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума дифференцируемой функции.

3.3. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

3.4. Докажите теорему о необходимом условии перегиба графика дважды непрерывно дифференцируемой функции.

3.5. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

3.6. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

3.7. Докажите, что если $f''(x) < 0$ на интервале $x \in (a;b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом интервале направлен выпуклостью вверх.

3.8. Докажите, что если $f''(x) > 0$ на интервале $x \in (a;b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом интервале направлен выпуклостью вниз.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите области возрастания и убывания функции, точки локального экстремума, промежутки сохранения направления выпуклости, точки перегиба и нарисуйте эскиз графика функции:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; б) $f(x) = x\ln x$; в) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$; г) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.

4.2. Найдите наклонные асимптоты графика функции:

а) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$;

б) $f(x) = x \ln \dfrac{x+1}{x}$;

в) $f(x) = x^2 \ln \dfrac{x+1}{x}$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$;

д) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

4.3. Для функции, заданной параметрически в виде $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$,

запишите уравнение касательной к графику функции при $t = \dfrac{\pi}{4}, \quad t = 0$.

4.4. Для функции, заданной параметрически в виде $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$,

запишите уравнение касательной к графику функции при $t = \dfrac{\pi}{4}, \quad t = 0$.