Лекция 1

Вещественные числа.

§1. Рациональные числа.

Простейшими числами являются целые положительные числа $1, 2, \ldots$, используемые при счете. Они называются *натуральными* числами, и люди их знали так много тысячелетий назад, что знаменитый математик Леопольд Кронекер сказал: "Бог создал натуральные числа; все остальное —дело рук человека". Потребности практики привели к появлению простых дробей, т.е. чисел вида $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots$, и т.д. Значительно позднее индусы изобрели важное число 0, а в начале нашей эры итальянцы открыли отрицательные числа.

Вообще говоря, понятие *числа* является одним из основных неопределяемых понятий в математике. Мы будем исходить из того, что нам известны *рациональные* числа и действия над ними.

Определение : *рациональное число* —это число, которое можно представить в виде отношения

$$\frac{m}{n},$$

где m —целое, а n —натуральное.

Для рациональных чисел существуют три правила:

1) <u>правило сравнения:</u> если $a = \frac{m_1}{n_1} \geq 0, b = \frac{m_2}{n_2} \geq 0$, то a и b связаны тем же знаком, что и целые числа $m_1 n_2$ и $m_2 n_1$; если $a \leq 0, b \leq 0$, то a и b связаны тем же знаком, что $|b|$ и $|a|$; если $a \leq 0, b > 0$, то $a < b$.

Свойство множества рациональных чисел, состоящее в том, что любые два рациональных числа связаны между собой знаком $\geq$, называется *упорядоченностью.*

2) <u>правило сложения:</u>

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

3) <u>правило умножения:</u>

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Эти три правила обладают рядом свойств, например, правило сравнения обладает свойством транзитивности знака $>$ (если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$) и знака $=$ (если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$); правило сложения обладает перестановочным $(a+b = b+a)$, сочетательным $((a+b)+c = a+(b+c))$

и рядом других свойств; правило умножения также обладает перестановочным, сочетательным и прочими свойствами.

Рациональных чисел недостаточно для измерения физических величин, в частности, длин любых отрезков. Так, длина диагонали квадрата со стороной 1 не является рациональным числом. Возникает потребность расширить множество рациональных чисел и дополнить его так, чтобы иметь возможность измерять длины любых отрезков.

Отметим, что любое рациональное число с помощью процесса деления можно представить в виде *бесконечной десятичной периодической* дроби. Например,

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,(3); \frac{1}{6} = 0,16666\ldots = 0,1(6); \frac{1}{2} = 0,500\ldots 0 = 0,5(0).$$

Для отличных от нуля рациональных чисел, у которых десятичная дробь имеет 0 в периоде, существует иное представление в виде бесконечной десятичной дроби, например,

$$\frac{1}{2} = 0,499\ldots 9\ldots = 0,4(9).$$

Как правило, мы будем пользоваться для таких рациональных чисел тем способом представления в виде бесконечной десятичной дроби, в котором, начиная с некоторого разряда после запятой, все цифры равны нулю.

§2. Иррациональные числа.

Кроме периодических существуют и *непериодические* десятичные дроби, например

$$0,123456789101112\ldots 100101102\ldots,$$
$$1,414213\ldots \qquad (\sqrt{2}),$$
$$3,141592\ldots \qquad (\pi),$$
$$2,7182818284590452353\ldots \qquad (e).$$

Определение : *иррациональными числами* называются бесконечные непериодические десятичные дроби.

Определение : рациональные и иррациональные числа с введенными для них ниже правилами сравнения, сложения и умножения называются *вещественными (действительными)* числами.

Итак, любое вещественное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots,$$

где α_0 —целое неотрицательное число, α_k —цифры $(k = 1, 2, \dots)$.

Далее возникает задача введения для вещественных чисел трех правил (сравнения, сложения и умножения) с сохранением тех свойств, которые имели место для рациональных чисел.

§3. Сравнение вещественных чисел.

При сравнении вещественных чисел договоримся использовать только одно из двух представлений для рациональных чисел, имеющих 0 в периоде.

1) Если все $\alpha_k = 0$, то и само число равно нулю: $a = 0$. Если хотя бы одно $\alpha_k \neq 0$ и перед дробью стоит знак "$+$", то число a будем называть положительным и писать $a > 0$, если же стоит знак "$-$", то число a будем называть отрицательным и писать $a < 0$. Ниже мы считаем, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

2) Рассмотрим два вещественных числа: число $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ и число $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2 \dots \beta_n \dots$. Будем считать, что $a = b$, если их знаки одинаковы и $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. В противном случае считаем, что $a \neq b$.

3) Пусть $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$. Тогда найдется такое натуральное число k, что $\alpha_i = \beta_i \quad (i = 0, 1, \dots, k-1), \alpha_k \neq \beta_k$. Будем считать, что:

$$a > b, \quad \text{если} \quad \alpha_k > \beta_k,$$
$$a < b, \quad \text{если} \quad \alpha_k < \beta_k.$$

4) Пусть $a \leq 0, b > 0$. Тогда будем считать, что $a < b$.

5) Пусть $a < 0, b < 0$. Будем считать, что:

$$a > b, \quad \text{если} \quad |a| < |b|,$$
$$a < b, \quad \text{если} \quad |a| > |b|.$$

Домашнее задание: доказать, что сформулированное правило сравнения обладает свойством транзитивности знаков "="и ">", и что в применении к рациональным числам оно дает тот же результат, что и правило сравнения рациональных чисел.

Из правила сравнения следует, что если $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots \geq 0$, то

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \le a \le \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

(аналогичные неравенства имеют место для $a < 0$), т.е. любое вещественное число a можно приблизить рациональными числами с произвольной точностью до $1/10^n$ (n —любое натуральное число) по недостатку $(\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ и по избытку $(\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n + 1/10^n)$. Аналогично, если $a < 0$.

Для введения правил сложения и умножения вещественных чисел нам понадобится новое понятие —понятие точных граней ограниченного числового множества.

§4. Точные грани ограниченного числового множества.

Обозначим буквой X множество вещественных чисел, содержащее хотя бы одно число (такое множество называется *непустым*). Любое число $x \in X$ будем называть *элементом* множества X.

Определение : множество X называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует число M (m) такое, что для любого элемента $x \in X$ выполняется неравенство $x \le M \quad (x \ge m)$.

Число M (m) называется *верхней (нижней) гранью* множества X. Для краткости вместо слов "существует"и "для любого"будем использовать следующие логические символы (*кванторы*): $\exists$ —квантор существования (заменяет слово "существует"или "найдется") и $\forall$ —квантор всеобщности (заменяет слово "для любого").

Запишем данное выше определение с помощью кванторов. Итак, множество X ограничено сверху, если $\exists M, \quad \forall x \in X : x \le M$.

Отрицание этого предложения в позитивной форме выглядит так: X —неограниченное сверху множество, если $\forall M, \quad \exists x \in X : x > M$.

Домашнее задание: записать с помощью кванторов определение ограниченности снизу и отрицание этого определения.

Определение : множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу, т.е. если $\exists M \quad \text{и} \quad m, \quad \forall x \in X : m \le x \le M$.

Нетрудно видеть, что такое определение эквивалентно следующему: множество X ограничено, если $\exists A > 0, \quad \forall x \in X : |x| \le A$.

Пример: $X = \{x : x < 0\}$ —ограничено сверху, но не ограничено снизу. Очевидно, любое неотрицательное число является верхней гранью этого множества. Таким образом, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних граней. Среди этих верхних граней в данном примере имеется наименьшая —число 0.

Лекция 2

Вещественные числа (продолжение).

Определение : наименьшая из верхних граней ограниченного сверху множества X называется *точной верхней гранью* этого множества и обозначается

$$\sup X \qquad (\text{supr\textbf{e}mum}).$$

Иногда мы будем писать $\overline{x} = \sup X$. Аналогично, наибольшая из нижних граней ограниченного снизу множества X называется *точной нижней гранью* этого множества и обозначается

$$\inf X \qquad (\text{inf\textbf{i}mum}),$$

другое обозначение: $\underline{x} = \inf X$.

Определение точной верхней грани можно сформулировать еще и так: число $\overline{x}$ называется точной верхней гранью ограниченного сверху множества X, если:

1) $\forall x \in X : \quad x \leq \overline{x}$ (это означает, что $\overline{x}$ —одна из верхних граней множества X);

2) $\forall \widetilde{x} < \overline{x} \quad \exists x \in X : \quad x > \widetilde{x}$ (это означает, что $\overline{x}$ —наименьшая из верхних граней).

Домашнее задание: сформулировать аналогичное определение точной нижней грани.

Всегда ли среди верхних граней ограниченного сверху множества имеется наименьшая? Ответ на этот вопрос не очевиден. Например, множество $\{x : x > 0\}$ не имеет наименьшего числа.

Теорема. Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство:

Мы докажем теорему для точной верхней грани (для точной нижней доказательство аналогично). Пусть X —ограниченное сверху множество, т.е. $\exists M, \quad \forall x \in X : x \leq M$. Могут представиться 2 случая:

1) среди элементов X имеется хотя бы одно число $x \geq 0$;

2) $\forall x \in X : \quad x < 0$.

В случае 1) будем рассматривать только неотрицательные $x \in X$: $\{x \in X : x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \geq 0\} = X_+$. Т.к. $x_0 \leq M$, то

$$\exists \max_{X_+} \{x_0\} = \overline{x_0}.$$

Рассмотрим $\{x \in X : x = \overline{x_0}, x_1 x_2 \dots x_n \dots\} = X_0$. Положим

$$\max_{X_0}\{x_1\} = \overline{x_1}.$$

Рассмотрим $\{x \in X : x = \overline{x_0}, \overline{x_1} x_2 \dots x_n \dots\} = X_1$. Положим

$$\max_{X_1}\{x_2\} = \overline{x_2}.$$

На k-ом шаге рассмотрим $\{x \in X : x = \overline{x_0}, \overline{x_1} \dots \overline{x_{k-1}} x_k \dots\} = X_{k-1}$. Положим

$$\max_{X_{k-1}}\{x_k\} = \overline{x_k}.$$

Продолжая мысленно этот процесс, мы определим $\overline{x_k}$ для всех k.

Рассмотрим число

$$\overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1} \dots \overline{x_n} \dots$$

и докажем, что $\overline{x} = \sup X$. Для этого нужно показать, что

а) $\forall x \in X: \quad x \leq \overline{x}$;

б) $\forall \widetilde{x} < \overline{x} \quad \exists x \in X: \quad x > \widetilde{x}$.

Доказательство а): т.к. $\overline{x} \geq 0$, то для любого отрицательного $x \in X$: $x \leq \overline{x}$. Если же предположить, что существует неотрицательное число $x = x_0, x_1 \dots x_n \dots \in X : x > \overline{x}$, то по правилу сравнения вещественных чисел $\exists k : x_0 = \overline{x_0}, \dots, x_{k-1} = \overline{x_{k-1}}, x_k > \overline{x_k}$. С другой стороны $x \in X_{k-1}$, и, следовательно,

$$x_k \leq \overline{x_k} = \max_{X_{k-1}}\{x_k\}.$$

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Итак, $\forall x \in X: \quad x \leq \overline{x}$.

Доказательство б): пусть $0 \leq \widetilde{x} = \widetilde{x_0}, \widetilde{x_1} \dots \widetilde{x_n} \dots < \overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1} \dots \overline{x_n} \dots$ Тогда $\exists k : \quad \widetilde{x_0} = \overline{x_0}, \dots, \widetilde{x_{k-1}} = \overline{x_{k-1}}, \widetilde{x_k} < \overline{x_k}$. Возьмем любое $x \in X_k$. Оно имеет вид

$$\overline{x} = \overline{x_0}, \overline{x_1} \dots \overline{x_k} x_{k+1} \dots,$$

и, следовательно, удовлетворяет неравенству $x > \widetilde{x}$. Таким образом, мы доказали, что $\forall \widetilde{x} < \overline{x} \quad \exists x \in X: \quad x > \widetilde{x}$.

Обратимся к случаю 2). Если все $x < 0$, т.е. $x = -x_0, x_1 \dots x_n \dots$, то построение $\overline{x} = -\overline{x_0}, \overline{x_1} \dots \overline{x_n} \dots$ ведется аналогично, только теперь нужно положить

$$\overline{x_0} = \min_{X}\{x_0\},$$

далее рассмотреть $X_0 = \{x \in X : x = -\overline{x_0}, x_1 \dots x_n \dots\}$ и положить

$$\overline{x_1} = \min_{X_0}\{x_1\}$$

и т.д. Теорема полностью доказана.

Домашнее задание: доказать существование точной нижней грани у ограниченного снизу множества.

Отметим, что точная верхняя (нижняя) грань, вообще говоря, может и не принадлежать множеству X. Приведем пример: $X = \{x : x < 2,5\}$. Здесь $\overline{x} = 2,4(9) = 2,5 \notin X$. Еще один пример: $X = \{x : 1 < x \leq 2\}$. Здесь $\sup X = 2 \in X$, в то время как $\inf X = 1 \notin X$. Таким образом, нужно различать *существование* точных граней X и *принадлежность* их множеству X. Заметим также, что в последнем примере множество X имеет наибольшее (максимальное) число: $\max\{X\} = 2 = \sup X$, но не имеет минимального числа. Понятия sup и inf являются обобщениями понятий max и min. В отличие от max и min у ограниченного множества всегда имеются sup и inf.

§5. Арифметические операции над вещественными числами.

Сложение вещественных чисел.

Пусть x и y —произвольные вещественные числа, и пусть x_r и y_r — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$x_r \leq x, \quad y_r \leq y.$$

Рассмотрим множество $\{x_r + y_r\}$ (здесь x_r и y_r складываются по правилу сложения рациональных чисел). Оно ограничено сверху. Действительно, если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ —рациональные числа, такие, что $x \leq \overline{x}, y \leq \overline{y}$, то в силу транзитивности знака "$\leq$"имеем: $x_r \leq \overline{x}, y_r \leq \overline{y}$, откуда $x_r + y_r \leq \overline{x} + \overline{y}$. Следовательно, множество $\{x_r + y_r\}$ имеет точную верхнюю грань.

Определение : *суммой вещественных чисел* x и y назовем точную верхнюю грань множества $\{x_r + y_r\}$:

$$x + y = \sup_{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ x_r \leq x \\ y_r \leq y}} \{x_r + y_r\}.$$

Умножение вещественных чисел.

1) пусть $x > 0$ и $y > 0$ —произвольные вещественные числа, и пусть x_r и y_r —любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < x_r \leq x, \quad 0 < y_r \leq y.$$

Определение : *произведением положительных вещественных чисел* x и y назовем точную верхнюю грань множества $\{x_r \cdot y_r\}$:

$$x \cdot y = \sup_{\substack{x_r, y_r \in \mathbb{Q} \\ 0 < x_r \leq x \\ 0 < y_r \leq y}} \{x_r \cdot y_r\}.$$

2) $\forall x: \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

3) пусть $x \neq 0, y \neq 0$. Тогда полагаем по определению

$$x \cdot y = \begin{cases} |x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака,} \\ -|x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

Можно доказать, что сформулированные правила сложения и умножения вещественных чисел обладают такими же свойствами, как и правила сложения и умножения рациональных чисел, и что в применении к рациональным числам они дают тот же результат, что и правила сложения и умножения рациональных чисел.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению (разность чисел x и y —это такое число z, что $y + z = x$. Можно доказать, что $\forall x, y \quad \exists! z : y + z = x$.

Деление определяется как действие, обратное умножению (частное от деления x на $y \neq 0$ —это такое число z, что $y \cdot z = x$). Можно доказать, что $\forall x, \forall y \neq 0 \quad \exists! z : y \cdot z = x$.

§6. Некоторые числовые неравенства.

а) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad -|a| \leq a \leq |a|$. Данное неравенство непосредственно следует из правила сравнения вещественных чисел.

б) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a \pm b| \leq |a| + |b|$ (доказать самостоятельно).

в) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a - b| \geq |a| - |b|$. Доказательство этого неравенства сводится к неравенству б): $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$, откуда вытекает $|a - b| \geq |a| - |b|$.

§7. Геометрическое изображение вещественных чисел.

Введем в рассмотрение *координатную прямую* (или *ось координат*), т.е. прямую, на которой выбрано направление, начало отсчета (точка 0) и масштабный отрезок OE, длину которого полагаем равной 1.

Каждой точке M координатной прямой поставим в соответствие определенное вещественное число —длину отрезка OM, если точка M лежит на положительной полуоси, и взятую со знаком "$-$"длину отрезка OM, если точка M лежит на отрицательной полуоси.

Итак, каждой точке M координатной прямой соответствует некоторое вещественное число. Имеет место и обратное соответствие, т.е. каждому вещественному числу соответствует некоторая точка на координатной прямой. Доказательство этого утверждения основывается на аксиомах геометрии, а именно, на аксиоме непрерывности прямой. Мы не будем заниматься этим подробно.

Для наглядности мы будем часто пользоваться геометрическим изображением вещественных чисел в виде точек на координатной прямой. Поэтому сами числа часто будем называть точками.

Заметим, что если $\overline{x} = \sup X$, то каждая точка множества X лежит левее $\overline{x}$ или совпадает с $\overline{x}$, причем сколь угодно близко от $\overline{x}$ имеются точки множества X.

§8. Некоторые числовые множества.

1) *Интервал* $(a, b) = \{x : a < x < b\}$.

2) *Сегмент* (или отрезок) $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$; точки a и b называются *граничными* точками сегмента, остальные —*внутренними* точками.

3) *Окрестность точки c* —любой интервал, содержащий точку c.

4) *ε-окрестность точки c* —интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, или $|x - c| < \varepsilon$.

5) *Проколотая ε-окрестность точки c* — $\{x : 0 < |x - c| < \varepsilon\}$.

6) *Числовая прямая* $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

7) *Полупрямая* $[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$,$(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty, a)$.

Каждое из указанных здесь множеств называется также *числовым промежутком.*

Лекция 3

Предел функции.

§1. Понятие функции.

Пусть X —некоторое числовое множество.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое (единственное) число y, то говорят, что на множестве X определена (задана) *функция* и пишут $y = f(x)$ (или $y = y(x)$). При этом множество X называется *областью определения функции*; переменная числовая величина x, принимающая значения из X (пробегающая множество X) называется *независимой переменной* или *аргументом* функции. Число y, соответствующее данному значению x, называется *частным значением* функции в точке x; $\{y\}$ —*множество значений* функции.

Геометрически функция $y = f(x)$ изображается своим *графиком*. График функции —это множество точек $\{(x, f(x)), x \in X\}$.

Определение : функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве X, если $\exists M(m)$, такое, что $\forall x \in X : f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$. При этом число $M(m)$ называется *верхней (нижней) гранью* функции $f(x)$ на множестве X.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу, т.е. $\exists M$ и m такие, что $\forall x \in X : m \leq f(x) \leq M$. Другое (эквивалентное) определение: функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если $\exists A > 0, \forall x \in X :$ $|f(x)| \leq A$.

Определение : Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней ограниченной сверху (снизу) функции $f(x)$ на множестве X называется ее *точной верхней (нижней) гранью* на этом множестве и обозначается

$$\sup_X f(x) \quad (\inf_X f(x)).$$

Можно сказать иначе: точная верхняя грань функции $y = f(x)$ —это $\sup\{y\}$, где $\{y\}$ —множество значений функции.

Эквивалентное определение: число M называется точной верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X, если:

1) $\forall x \in X : f(x) \leq M$ (это условие показывает, что M —одна из верхних граней $f(x)$ на X);

2) $\forall \widetilde{M} < M \quad \exists \widetilde{x} \in X : f(\widetilde{x}) > \widetilde{M}$ (это условие показывает, что M — наименьшая из верхних граней).

Домашнее задание:

1) сформулировать аналогичное определение точной нижней грани функции,

2) сформулировать определения:

а) неограниченной сверху,

б) неограниченной снизу,

в) неограниченной на множестве X функций.

Пример точных граней: рассмотрим функцию $y = \sin x, \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\sup_{(0,\pi/2]} \sin x = 1 \in \{y\}, \qquad \inf_{(0,\pi/2]} \sin x = 0 \notin \{y\}.$$

§2. Определение предела функции.

Определение : число a называется *предельной точкой числового множества* X, если в любой проколотой ε-окрестности точки a содержатся точки из множества X. При этом сама точка a может принадлежать, а может и не принадлежать множеству X.

Примеры: 1) $X = \{x : a < x < b\}$. Любая точка интервала X, а также точки a и b —предельные точки интервала X. 2) $\mathbb{N}$ —множество натуральных чисел —не имеет предельных точек.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на X и a —предельная точка X.

Определение (по Коши): число b называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a (при $x \to a$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что для любого значения аргумента x из проколотой δ-окрестности точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ (иначе говоря, $|f(x) - b| < \varepsilon$, если только $0 < |x - a| < \delta$). Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Геометрическая иллюстрация определения предела функции.

Поскольку $|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, то существование предела b у функции $f(x)$ при $x \to a$ с геометрической точки зрения означает, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что в пределах проколотой δ-окрестности точки a график $f(x)$ лежит в полосе между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

Домашнее задание: построить отрицание определения предела, то есть сформулировать определение

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq b.$$

Замечание 1. Функция может иметь в данной точке не более одного предела.

В самом деле, если предположить, что функция имеет в точке a два предела — b и c, то, взяв непересекающиеся ε-окрестности точек b и c, получим, что в пределах некоторой проколотой δ-окрестности точки a график функции лежит одновременно в полосе между $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$ и также в полосе между $c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon$, чего не может быть.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Утверждение следует непосредственно из определения предела функции: $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$ при $0<|x-a|<\delta$.

Примеры:

1) пусть $f(x)=b=const$, тогда $\forall a:$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Действительно, $\forall \varepsilon>0$ возьмем любое $\delta>0$. Тогда $|f(x)-b| = 0 < \varepsilon$ при всех x и, значит, при $0<|x-a|<\delta$.

2) пусть

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a \\ c \neq b, & \text{если } x = a \end{cases},$$

тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

3) пусть

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \neq a \\ \text{не определена}, & \text{если } x = a \end{cases},$$

тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Замечание 3. В примерах 2) и 3), как и в примере 1), для любого $\varepsilon>0$ можно взять любое $\delta>0$, то есть δ не зависит от ε.

Замечание 4. Если в определении предела функции опустить неравенство $0<|x-a|$, т.е. потребовать выполнения неравенства $|f(x)-b|<\varepsilon$ $\forall x: |x-a|<\delta$, то в примере 3) ответ не изменится, а в примере 2) изменится: предел у функции $f(x)$ при $x\to a$ просто не будет существовать.

4) пусть $f(x)=x$, тогда для любого a

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

В самом деле, $\forall\varepsilon>0$ возьмем $\delta=\varepsilon$. Тогда если $|x-a|<\delta=\varepsilon$, то $|f(x)-a| = |x-a| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

5) пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Докажем, что эта функция не имеет предела при $x \to 0$.

Доказательство проведем от противного: предположим, что

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = b,$$

где b —некоторое число. Возьмем $\varepsilon = 1$. По определению предела $\exists\delta > 0$, такое, что $|\sin\frac{1}{x} - b| < 1$ при $0 < |x| < \delta$.

Возьмем

$$x_1 = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}.$$

При достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам: $0 < |x_i| < \delta, i = 1, 2$. При этом

$$|\sin\frac{1}{x_1} - b| = |1 - b| < 1 \quad \text{и} \quad |\sin\frac{1}{x_2} - b| = |-1 - b| = |1 + b| < 1.$$

Последние два неравенства не могут одновременно выполняться ни при каком b, следовательно, наше предположение неверно и предела у $f(x)$ при $x \to 0$ не существует.

6) пусть $f(x) = \sin x$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

Чтобы доказать это, воспользуемся известным неравенством $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (оно выражает тот факт, что площадь равнобедренного треугольника, вписанного в сектор единичной окружности, меньше площади этого сектора). В силу нечетности функций $\sin x$ и x имеем

$$|\sin x| < |x| \quad \text{при} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$. Тогда при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \delta = \varepsilon$, мы получим

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Односторонние пределы.

Может случиться так, что при стремлении аргумента x к точке a слева и справа функция $f(x)$ имеет разные предельные значения. В качестве примера приведем функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn}\, x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}.$$

Определение : число b называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a *справа (слева)*, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in (a, a+\delta)$ (соответственно, $\forall x \in (a-\delta, a)$) выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a+0) = b \quad (\lim_{x \to a-0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(a-0) = b).$$

Пример: рассмотрим функцию $f(x) = [x]$, где $[x]$ —целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$f(n-0) = n-1, \quad f(n+0) = n \quad \text{и} \quad f(n) = n.$$

Из определения предела функции и определений односторонних пределов следует

Теорема 1. Если у функции $f(x)$ существуют в точке a предел слева и предел справа, причем $f(a-0) = f(a+0) = b$, то в данной точке существует предел этой функции, равный b.

Предел функции при $x \to \infty$.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X и $\forall A \quad \exists x \in X : x > A$.

Определение : число b будем называть *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A$, такое, что для любого $x > A$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Аналогично определяется предел функции при $x \to -\infty$.

Если функция $f(x)$ имеет равный числу b предел при $x \to +\infty$ и равный этому же числу предел при $x \to -\infty$, то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Пример: рассмотрим функцию $f(x) = 1/x$ и докажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $A = 1/\varepsilon$. Тогда если $x > A = 1/\varepsilon$, то $1/x < \varepsilon$, т.е. $|1/x - 0| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Домашнее задание: доказать, что функция $f(x) = 1/x$ имеет равный нулю предел и при $x \to -\infty$.

Частный случай предела функции при $x \to +\infty$ —*предел числовой последовательности.*

Определение : *числовая последовательность* —это функция, определенная на множестве натуральных чисел: $f(n), n \in \mathbb{N}$. Обычно числовую последовательность обозначают так: $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Определение : число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$, такой, что $\forall n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то говорят, что она *сходится*, а если не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

Пример: $x_n = \frac{n+1}{n}$.

Домашнее задание: доказать, пользуясь определением предела числовой последовательности, что

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1.$$

Лекция 4

Предел функции (продолжение).

§3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение : функция $f(x)$ называется *бесконечно малой в точке* a, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Иначе говоря, функция $f(x)$ —бесконечно малая в точке a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Примеры:
1) функция $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой в точке $x = 0$.
2) функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

является бесконечно малой в точке $x = 0$.
3) функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не является бесконечно малой в точке $x = 0$, хотя $f(0) = 0$.

Аналогично определяется бесконечно малая при $x \to +\infty$ (или $-\infty$) функция, в частности, бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Примеры:
1) функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно малой при $x \to \infty$.
2) последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой при $n \to \infty$.

Определение : функция $f(x)$ называется *бесконечно большой в точке* a, если $\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} \Rightarrow |f(x)| > A$. Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Пример: функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно большой в точке $x = 0$ (для доказательства этого утверждения достаточно взять $\delta = 1/A$).

Аналогично определяется бесконечно большая при $x \to +\infty$ $(-\infty)$ функция, а также при $x \to a+0$ и $x \to a-0$.

Домашнее задание: доказать следующие утверждения (считая, что $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a):

1) если $f(x)$ —бесконечно большая в точке a функция, то в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $g(x) = 1/f(x)$ и она является бесконечно малой в точке a.

2) если $f(x)$ —бесконечно малая в точке a функция и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то $1/f(x)$ —бесконечно большая функция в точке a.

3) если $f(x) = c = \text{const}$ и

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,$$

то $c = 0$.

Теорема 2. Сумма и разность двух бесконечно малых в точке a функций являются бесконечно малыми в точке a функциями.

Следствие: алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке a функций является бесконечно малой в точке a функцией (доказательство проводится по индукции).

Теорема 3. Произведение бесконечно малой в точке a функции на ограниченную в окрестности точки a функцию есть бесконечно малая функция в точке a.

Следствие: произведение конечного числа ограниченных функций, из которых хотя бы одна —бесконечно малая в точке a, есть бесконечно малая в точке a функция.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ —бесконечно малые в точке a функции. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа* $\frac{0}{0}$.

Пример:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Определение : функция $f(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $g(x)$ (имеет *более высокий порядок малости*), если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Обозначение: $f = \mathrm{o}(g)$ при $x \to a$.

Пример: $x^2 = \mathrm{o}(x)$ при $x \to 0$.

Определение : функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* (имеют *одинаковый порядок малости*), если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0.$$

Обозначение: $f = \mathrm{O}(g)$ при $x \to a$.

Пример: $2x^2 + x^3 = \mathrm{O}(x^2)$ при $x \to 0$.

Определение : функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f \sim g$ при $x \to a$.

Примеры: 1) $x^2 + x^3 \sim x^2$ при $x \to 0$. 2) $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Определения для случаев $x \to a+0$, $x \to a-0$ и $x \to \infty$ аналогичны.

Свойства символа "о"-малое:

а) $\mathrm{o}(g) \pm \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(g)$.

б) если $f = \mathrm{o}(g)$, то $\mathrm{o}(f) \pm \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(g)$, пример: $\mathrm{o}(x^2) \pm \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(x)$.

в) $fg = \mathrm{o}(f), \quad fg = \mathrm{o}(g)$.

г) если $f \sim g$, то $fg = \mathrm{o}(f)$ и $fg = \mathrm{o}(g)$.

д) $\mathrm{o}(cg) = \mathrm{o}(g), \quad c = \mathrm{const} \neq 0$.

е) $\mathrm{o}(g + \mathrm{o}(g)) = \mathrm{o}(g)$, пример: $\mathrm{o}(x + 2x^2) = \mathrm{o}(x)$.

Замечание: равенства с символом "о"-малое верны только в одну сторону (слева направо).

2) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ —бесконечно большие в точке a функции. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется *неопределенностью типа* $\frac{\infty}{\infty}$.

Определение : говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ *более высокий порядок роста*, чем функция $g(x)$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Пример: функция $f(x) = 1/x^2$ имеет при $x \to 0$ более высокий порядок роста, чем функция $g(x) = 1/x$.

Определение : говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \to a$ *одинаковый порядок роста*, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0.$$

Пример: функции $f(x) = 1/x + 1$ и $g(x) = 1/x$ имеют при $x \to 0$ одинаковый порядок роста.

3) Существует много других типов неопределенностей: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Приведем примеры.

а)
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$$
является неопределенностью типа $\infty-\infty$.

б)
$$\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} x$$
является неопределенностью типа $0\cdot\infty$.

в)
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$
является неопределенностью типа 1^∞.

г)
$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$
является неопределенностью типа 0^0.

д)
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$$
является неопределенностью типа ∞^0.

§4. Свойства пределов функций.

Следующие две леммы предлагается доказать самостоятельно.

Лемма 1: Если
$$\lim_{x\to a} f(x)=b,$$
то $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ —бесконечно малая функция в точке a.

Лемма 2 (обратная): Если $f(x)=b+\alpha(x)$, где b —число, а $\alpha(x)$ —бесконечно малая функция в точке a, то
$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

Теорема 4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки a, и пусть
$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\quad \lim_{x\to a} g(x)=c.$$
Тогда:

1)
$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=b\pm c.$$

2)
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=bc.$$

3) если $c \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности a определена функция $f(x)/g(x)$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Доказательство: проводится на основании лемм 1 и 2.

Замечание: теорема 4 справедлива в отношении пределов функций при $x \to \infty$.

Лекция 5

Предел функции (продолжение).

Следствия теоремы 4:

1)

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x), \quad c = \text{const}.$$

2) пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ —многочлены степени n и m, тогда функция $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ называется *рациональной функцией* или *рациональной дробью.* Имеет место следующее утверждение: если $Q_m(a) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Теорема 5. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \geq c(f(x) \leq c)$ и существует

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

то $b \geq c(b \leq c)$.

Замечание 1: теорема 5 справедлива в отношении предела функции при $x \to \infty$.

Замечание 2: из условия $f(x) > c$ не следует, вообще говоря, что и предел функции будет больше c. Приведем пример: при $x > 0$ $1/x > 0$, тогда как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Замечание 3: о пределе последовательности. Если для любого номера n выполнено неравенство $c \leq x_n \leq b$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,$$

то $c \leq A \leq b$.

Теорема 6. Если в проколотой окрестности точки a выполняются неравенства $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и существуют при $x \to a$ пределы функций $f(x)$ и $h(x)$, причем

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b,$$

то

$$\exists \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

§5. Теорема о пределе монотонной функции.

Определение : функция $f(x)$ называется: а) *возрастающей*, б) *убывающей*, в) *невозрастающей*, г) *неубывающей* на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется следующее неравенство: а) $f(x_1) < f(x_2)$, б) $f(x_1) > f(x_2)$, в) $f(x_1) \geq f(x_2)$, г) $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функции а)-г) называются *монотонными*, а функции а) и б) —*строго монотонными* на множестве X.

Примеры:

1) функция $f(x) = x^2$ является возрастающей на полупрямой $(0; +\infty)$.

2) функция $f(x) = [x]$ не убывает на числовой прямой $(-\infty; +\infty)$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на полупрямой $x \geq a$, то существует

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ не убывает на полупрямой $x \geq a$ и ограничена сверху на этом множестве (другие случаи монотонного поведения рассматриваются аналогично). Тогда существует

$$\sup_{x\in[a;+\infty)} f(x) = b.$$

Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $b - \varepsilon$. По определению точной верхней грани функции $\exists A \in [a; +\infty) : f(A) > b - \varepsilon$. Поскольку $f(x)$ не убывает, то $f(x) \geq f(A)$ при $x > A$, и, следовательно, $f(x) > b - \varepsilon$. Отсюда получаем неравенство $b - f(x) < \varepsilon$ при $x > A$, или $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x > A$. Теорема 7 доказана.

Замечание: аналогично доказывается теорема для правого и левого пределов в точке a: если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в правой (левой) полуокрестности точки a, то существует

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad (\lim_{x\to a-0} f(x)).$$

Следствие: монотонная ограниченная последовательность сходится.

Пример: рассмотрим последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Докажем, что $\{x_n\}$ —монотонная ограниченная последовательность (тем самым будет доказано, что эта последовательность сходится).

Нам потребуется т.н. *неравенство Бернулли*: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (-1, +\infty)$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$, причем при $n > 1$ знак равенства возможен только в случае $x = 0$ (предлагается доказать это неравенство самостоятельно, используя метод математической индукции).

Покажем, используя неравенство Бернулли, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \cdot (1+\frac{1}{n}) =$$

$$= \frac{(n^2+2n+1-1)^{n+1}}{(n^2+2n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

откуда следует, что $x_{n+1} > x_n$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = x_n \cdot (1 + 1/n)$. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N} : y_n > x_n$. Вновь используя неравенство Бернулли, доказываем, что $y_n < y_{n-1}$, т.е. последовательность $\{y_n\}$ —убывающая.

Таким образом, $2 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < y_n < y_{n-1} < \ldots < y_1 = 4$, т.е. $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ —монотонные ограниченные последовательности. Значит, они сходятся, причем

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Предел числовой последовательности $\{x_n\}$ обозначается e:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828\ldots.$$

Непрерывность функции.

§1. Определение непрерывности. Точки разрыва функции.

Наглядное представление о непрерывной и разрывной функциях дают непрерывная и разрывная кривые —графики этих функций. Как сформулировать математическое определение непрерывности?

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a.

Определение 1: функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Примеры:

1) функция $\sin x$ непрерывна в точке $x = 0$, поскольку $\sin 0 = 0$ и было доказано, что

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Таким образом, выполнено условие непрерывности

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0.$$

2) рациональная функция $P_n(x)/Q_m(x)$ непрерывна в любой точке a, в которой $Q_m(a) \neq 0$, так как было доказано, что

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Определение 2 (эквивалентное определению 1): функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in \{|x-a| < \delta\} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Отметим, что в этом определении отсутствует условие $0 < |x - a|$ $(x \neq a)$, фигурирующее в определении предела функции, поскольку оно здесь является излишним —в точке $x = a$ неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ выполняется автоматически.

С помощью определения 2 установим одно важное свойство непрерывной функции. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$. Возьмем $\varepsilon = f(a)$, тогда согласно определению 2 существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x)-f(a)| < \varepsilon = f(a)$ в δ-окрестности a, т.е. $-f(a) < f(x)-f(a) < f(a)$. Отсюда вытекает, что $f(x) > 0$ в δ-окрестности точки a. Тем самым, если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и положительна в этой точке, то она будет положительной и в некоторой окрестности точки a (аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $f(x)$ отрицательна в точке a). Это свойство называется *устойчивостью знака* непрерывной функции.

Односторонняя непрерывность.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки a, т.е. при $a \leq x < a + \delta$.

Определение : функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке a, если

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad (\text{другая форма записи} : f(a+0) = f(a)).$$

Аналогичным образом определяется *непрерывность слева* в точке a:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad (\text{или} \quad f(a-0) = f(a)).$$

Пример: рассмотрим функцию $f(x) = [x]$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $f(n+0) = n$, $f(n-0) = n-1$ и $f(n) = n$, поэтому функция $[x]$ непрерывна в точках $x = n$ только справа, а в остальных точках —и справа, и слева.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева и справа, то она непрерывна в точке a.

Доказательство:

По условию

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a).$$

Согласно сформулированной ранее теореме, если у функции $f(x)$ существуют в точке a равные $f(a)$ пределы слева и справа, то

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

а это и означает, что $f(x)$ непрерывна в точке a. Теорема доказана.

Точки разрыва функции.

Определение : Предельная точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва* функции.

Примеры:

1) функция $f(x) = [x]$ разрывна в точках $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

разрывна во всех точках, т.к. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} D(x)$$

не существует (доказать самостоятельно).

3) функция $f(x) = x \cdot D(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0,$$

и разрывна во всех остальных точках (доказать самостоятельно).

Классификация точек разрыва.

1) Устранимый разрыв. Точка a называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b,$$

но в точке a функция $f(x)$ либо не определена, либо $f(a) \neq b$.

Если положить $f(a) = b$, то разрыв будет устранен, т.е. функция станет непрерывной в точке a.

Пример: рассмотрим функцию $f(x) = \sin x/x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

однако в точке $x = 0$ эта функция не определена. Если положить

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases},$$

то функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 0$.

2) Разрыв 1-ого рода. Точка a называется *точкой разрыва 1-ого рода* функции $f(x)$, если существуют

$$\lim_{x\to a+0} f(x), \quad \lim_{x\to a-0} f(x),$$

но они не равны (т.е. $f(a-0) \neq f(a+0)$).

Пример: рассмотрим функцию $f(x) = [x]$. Точки $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ являются точками разрыва 1-ого рода данной функции.

3) Разрыв 2-ого рода. Точка a называется *точкой разрыва 2-ого рода* функции $f(x)$, если в этой точке не существует по крайней мере один из односторонних пределов.

Примеры:

1) Точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-ого рода функции $\sin\frac{1}{x}$.

2) Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2-ого рода функции $2^{1/(x-1)}$, поскольку

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \text{но} \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \infty \quad \text{(т.е. не существует).}$$

Лекция 6

Непрерывность функции (продолжение).

Определение : функцию $f(x)$ называют *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример: рациональная функция $P_n(x)/Q_m(x)$ непрерывна на любом интервале, на котором $Q_m(x) \neq 0$.

В частности, $f(x)$ называется непрерывной на $[a, b]$ $(a < b)$, если она непрерывна в каждой внутренней точке $[a, b]$, непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

§2. Свойства непрерывных функций.

Теорема 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ (при условии $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a.

Доказательство:

По условию
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$
Отсюда следует (согласно **теореме 4** лекции 4), что
$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a), \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = f(a)g(a),$$
$$\text{и, если выполнено условие } g(a) \neq 0, \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)},$$
а это и означает справедливость утверждения теоремы.

Понятие сложной функции.

Пусть аргумент t функции $y = f(t)$ является не независимой переменной, а функцией некоторой переменной x: $t = \varphi(x)$. Тогда говорят, что переменная y является *сложной функцией* переменной x (или *суперпозицией* функций f и φ) и пишут $y = f(\varphi(x))$.

Пример: $y = \sin(x^2)$ —сложная функция: $y = \sin t$, где $t = x^2$.

Теорема 3. Пусть функция $t = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$, $\varphi(a) = b$, а функция $y = f(t)$ непрерывна в точке b. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Доказательство:

Нужно доказать, что

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)),$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(t)$ непрерывна в точке b, то $\exists \gamma > 0$, такое, что $|f(t) - f(b)| < \varepsilon$ при $|t - b| < \gamma$, откуда следует, что

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma. \tag{1}$$

В свою очередь, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке a для указанного γ существует $\delta > 0$, такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \gamma \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что если $|x - a| < \delta$, то $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство:

Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. В силу устойчивости знака непрерывной функции $f(x) < 0$ в некоторой правой полуокрестности точки a. Рассмотрим множество X таких чисел $\widetilde{x}$ сегмента $[a, b]$, что $f(x) < 0$ на $[a, \widetilde{x})$: $X = \{\widetilde{x} : f(x) < 0 \quad \text{при} \quad a \le x < \widetilde{x}\}$. Это множество ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Пусть $\sup X = c$. Отметим, что

$$\forall x < c : f(x) < 0. \tag{3}$$

Действительно, если $x_0 < c$, то x_0 не является верхней гранью X и поэтому существует число $\widetilde{x} \in X$, такое, что $\widetilde{x} > x_0$. Так как $f(x) < 0$ на $[a, \widetilde{x})$, то $f(x_0) < 0$.

Докажем, что $f(c) = 0$. Будем рассуждать от противного.

Допустим, что $f(c) < 0$. Тогда $f(x) < 0$ в некоторой окрестности точки c и, следовательно, $\exists \widetilde{x} > c$, такое, что $f(x) < 0$ на $[a, \widetilde{x})$, а это противоречит тому, что $\sup X = c$.

Допустим теперь, что $f(c) > 0$. Тогда $f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки c, и, следовательно, $\exists x < c : f(x) > 0$, что противоречит неравенству (3).

Итак, мы заключаем, что $f(c) = 0$. Теорема полностью доказана.

Следствие (**теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение**): пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда $\forall C \in (A, B)$ $\exists c \in (a, b)$: $f(c) = C$.

Доказательство:

Пусть $A < B$, $A < C < B$.

Введем функцию $g(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на сегменте $[a, b]$, причем $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$, $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$. По теореме 4 существует такое число $c \in (a, b)$, что $g(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, откуда $f(c) = C$, что и требовалось доказать.

§3. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и Y —множество ее значений. Пусть каждое $y \in Y$ соответствует ровно одному значению x из множества X. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между множествами X и Y.

Поставим в соответствие каждому y из Y то число x из X, для которого $f(x) = y$. Тем самым на Y будет определена функция. Она называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначается $x = f^{-1}(y)$.

Очевидно, обратной по отношению к функции $x = f^{-1}(y)$ является функция $y = f(x)$. Поэтому эти две функции называются *взаимно обратными.*

Примеры:

1) рассмотрим функцию $y = x^2$, $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, +\infty)$. Обратной по отношению к этой функции будет функция $x = \sqrt{y}$.

2) рассмотрим ту же функцию $y = x^2$, определенную на множестве $X = (-\infty, +\infty)$. В этом случае обратной функции не существует, поскольку соответствие, устанавливаемое данной функцией между множествами X и $Y = [0, +\infty)$, не является взаимно однозначным.

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда: 1) множеством ее значений является сегмент $Y = [f(a), f(b)]$; 2) на Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$; 3) обратная функция также строго монотонна; 4) обратная функция непрерывна на Y.

Доказательство:

Пусть для определенности функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$. С наглядной точки зрения все утверждения теоремы очевидны. Проведем аккуратное доказательство.

1) В силу непрерывности функция $y = f(x)$ принимает все значения от $f(a)$ до $f(b)$, а в силу возрастания не имеет значений, меньших $f(a)$ и больших $f(b)$. Таким образом, множество ее значений есть сегмент $Y = [f(a), f(b)]$.

2) Каждое число $y \in Y$ соответствует ровно одному числу $x \in [a, b]$. Действительно, если предположить, что некоторое y из Y соответствует двум числам x_1 и x_2 из $[a, b]$ (пусть ради определенности $x_1 < x_2$), то получим $f(x_1) = f(x_2) = y$, что противоречит возрастанию функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Следовательно, на Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

3) Докажем, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y. Пусть $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$. Нужно доказать, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Положим $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. Нужно доказать, что $x_1 < x_2$. Допустим, что $x_1 \geq x_2$. Тогда $f(x_1) \geq f(x_2)$, т.е. $y_1 \geq y_2$, что противоречит условию $y_1 < y_2$. Итак, функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y.

4) Остается доказать непрерывность функции $x = f^{-1}(y)$ на сегменте Y. Докажем непрерывность в произвольной внутренней точке $y_0 \in Y$. Пусть $f^{-1}(y_0) = x_0$. Нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ при $|y - y_0| < \delta$, или $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$ для любого значения y из δ-окрестности точки y_0.

Возьмем ε столь малым, что $x_0 - \varepsilon > a$, $x_0 + \varepsilon < b$.

Пусть $f(x_0 - \varepsilon) = y_1$, $f(x_0 + \varepsilon) = y_2$. Поскольку функция $y = f(x)$ возрастает, то $y_1 < y_0 < y_2$. Также в силу возрастания обратной функции $\forall y \in (y_1, y_2)$: $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Возьмем любую δ-окрестность точки y_0, которая лежит в интервале (y_1, y_2). Тогда для любого значения y из этой δ-окрестности точки y_0 значения обратной функции будут принадлежать ε-окрестности точки x_0, т.е. $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon\ \forall y : |y - y_0| < \delta$, что и требовалось доказать.

Непрерывность обратной функции в граничных точках сегмента Y доказывается аналогично.

Теорема 5 полностью доказана.

§4. Непрерывность элементарных функций.

1) рассмотрим функцию $y = \sin x$ (определение этой функции было дано в школе). Ранее было доказано, что

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0,$$

откуда следует непрерывность $\sin x$ в точке $x = 0$.

Докажем непрерывность функции $y = \sin x$ в произвольной точке $x = a \in \mathbb{R}$.

Нужно доказать, что $\sin x \to \sin a$ при $x \to a$, или, что то же самое, $\sin x - \sin a \to 0$ при $x \to a$. Имеем: $\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2} \to 0$ при $x \to a$, поскольку первый сомножитель представляет собой бесконечно малую функцию при $x \to a$, а второй —ограниченную функцию.

Рассмотрим нашу функцию $y = \sin x$ на сегменте $[-\pi/2, \pi/2]$. Она непрерывна и возрастает на этом множестве (возрастание следует из формулы $\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}$). По теореме 5 множеством значений функции является сегмент $Y = [-1, 1]$, на Y существует обратная функция (она обозначается $x = \arcsin y$) и эта функция возрастает и непрерывна на сегменте $[-1, 1]$.

2) функцию $y = \cos x$ и обратную по отношению к ней функцию $x = \arccos y$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

3) рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$. Поскольку $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ (где $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$), то данная функция непрерывна как частное двух непрерывных функций.

Исследуем $y = \operatorname{tg} x$ на сегменте $[-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta]$, где $\delta > 0$ — произвольно малое число. Возрастание функции $\operatorname{tg} x$ на этом сегменте вытекает из формулы $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \sin(x_2 - x_1)/\cos x_1 \cdot \cos x_2$. По теореме 5 множеством значений данной функции будет являться отрезок $Y = [\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta), \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta)]$, на Y существует обратная функция (она обозначается $x = \operatorname{arctg} y$), возрастающая и непрерывная.

Поскольку $\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta) \to -\infty$ и $\operatorname{tg}(\pi/2 - \delta) \to +\infty$ при $\delta \to +0$, то $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$, такое, что $y \in [\operatorname{tg}(-\pi/2 + \delta), \operatorname{tg}(\pi/2 - \delta)]$. Поэтому функция $x = \operatorname{arctg} y$ определена, возрастает и непрерывна на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

4) функцию $y = \operatorname{ctg} x$ и обратную по отношению к ней функцию $x = \operatorname{arcctg} y$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

Лекция 7

Непрерывность функции (продолжение).

5) рассмотрим степенную функцию $y = x^n$, где n —натуральное число. Она непрерывна в каждой точке как произведение n непрерывных функций, равных x.

Исследуем данную функцию на сегменте $[0, a]$, где $a > 0$ —некоторое число. Она непрерывна и возрастает на этом сегменте. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент $Y = [0, a^n]$, на Y существует обратная функция (она обозначается $x = \sqrt[n]{y}$ или $x = y^{1/n}$), возрастающая и непрерывная.

Поскольку $\forall y > 0\ \exists a$, такое, что $y \in [0, a^n]$, то функция $x = \sqrt[n]{y}$ определена, возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$.

Итак, $\forall x \geq 0$ определена дробная степень $x^{1/n}$. Далее, по определению положим $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, где m —любое целое число.

6) рассмотрим показательную функцию $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Для рациональных $x = m/n$ показательная функция определена выше. Из школьного курса алгебры известно, что для рациональных показателей степени $r = m/n$ функция a^r обладает следующими свойствами:

а) если $r_1 > r_2$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;

б) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;

в) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

г) $a^0 = 1$ (по определению);

д) $a^{-r} = 1/a^r$ (по определению);

е) $a^r b^r = (ab)^r$;

ж) $\forall r$: $a^r > 0$.

Определим теперь a^x для любого вещественного числа x.

Пусть $a > 1$, x —произвольное вещественное число. Рассмотрим множество $\{a^r\}$, где r —любое рациональное число $\leq x$. Это множество ограничено сверху, например, числом $a^{\overline{r}}$, где $\overline{r}$ —любое рациональное число, превосходящее x. Следовательно, существует $\sup\{a^r\}$. Положим по определению

$$a^x = \sup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r \leq x}} \{a^r\}.$$

Можно определить a^x иначе:

$$a^x = \inf_{\substack{R \in \mathbb{Q} \\ R \geq x}} \{a^R\}.$$

Домашнее задание: доказать, что оба определения дают один и тот же результат.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$, и для любого x положим $a^x = (1/a)^{-x}$.

Итак, a^x определена для любого x. Можно доказать, что a^x обладает свойствами а)-ж) для любого вещественного числа x, в частности, функция a^x строго монотонна.

Докажем непрерывность функции a^x в произвольной точке c.

Пусть $a > 1$. Докажем сначала непрерывность функции a^x в точке c слева. Для этого нужно доказать, что $\forall\varepsilon > 0$ существует левая полуокрестность точки c, в которой $a^c - a^x < \varepsilon$. По определению

$$a^c = \sup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ r\le c}}\{a^r\}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $a^c - \varepsilon < a^c$. Согласно определению точной верхней грани $\exists\widetilde{r} < c$, такое, что $a^{\widetilde{r}} > a^c - \varepsilon$. В силу возрастания a^x имеем неравенство: $a^x > a^{\widetilde{r}}$ при $\widetilde{r} < x \le c$. Поэтому $a^x > a^c - \varepsilon$ при $\widetilde{r} < x \le c$, или, что то же самое, $a^c - a^x < \varepsilon$ при $\widetilde{r} < x \le c$, что и доказывает непрерывность функции a^x в точке c слева.

Аналогично доказывается непрерывность в точке c справа. Из непрерывности слева и справа следует непрерывность функции a^x в точке c.

Рассмотрим теперь функцию $y = a^x$ на произвольном сегменте $[b, c]$. По теореме 5 множеством ее значений является сегмент $Y = [a^b, a^c]$, на Y существует обратная функция (она обозначается $x = \log_a y$), строго монотонная и непрерывная.

Поскольку $\forall y > 0\ \exists b$ и c, такие, что $y \in [a^b, a^c]$, то функция $x = \log_a y$ определена, строго монотонна и непрерывна на полупрямой $(0, +\infty)$. Если $a = e$, то $\log_e y = \ln y$ называется *натуральным логарифмом*, а функция e^x называется *экспонентой.*

7) рассмотрим степенную функцию с произвольным вещественным показателем: $y = x^\alpha$, где $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку $x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$, то данная функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций $y = e^t$ и $t = \alpha\ln x$.

Рассмотренные функции 1)-7) называются *основными элементарными функциями.* Любая функция, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций, называется просто *элементарной функцией*, а множество всех элементарных функций называется *классом элементарных функций.* Из непрерывности основных элементарных функций следует, что *любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в окрестности которой она определена.*

§5. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел.

Первый замечательный предел (неопределенность типа $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство:

Возьмем известное неравенство (оно уже было доказано ранее):

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

из которого следует

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

В силу четности функций $\cos x$ и $\sin x/x$ выписанные неравенства верны также при $-\pi/2 < x < 0$. Перейдем к пределу при $x \to 0$. Поскольку $\cos x \to 1$ (в силу непрерывности функции $\cos x$) и $1 \to 1$ при $x \to 0$, то, согласно теореме о двух милиционерах, $\sin x/x \to 1$ при $x \to 0$, что и требовалось доказать.

Следствия:

1) $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, или $\sin x - x = o(x)$, откуда получаем простейшую асимптотическую формулу для функции $\sin x$ при $x \to 0$: $\sin x = x + o(x)$. Позднее мы покажем, что здесь $o(x) = -x^3/6 + o(x^3)$.

2) $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ при $x \to 0$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1,$$

откуда $1-\cos x \sim x^2/2 \Rightarrow 1-\cos x - x^2/2 = o(x^2) \Rightarrow \cos x = 1-x^2/2+o(x^2)$.

3) $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ (эту формулу предлагается доказать самостоятельно). Позднее мы узнаем, что здесь $o(x) = x^3/3 + o(x^3)$.

Примеры:

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x + 2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)) + 2(x+o(x))^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}+o(x^2)+2x^2+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{13}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{13}{2}.$$

2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}.$$
Первая попытка (использование простейших асимптотических формул):
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)-(x+o(x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^3}=\,?$$
Вторая попытка (применение первого замечательного предела):
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\cdot x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Второй замечательный предел.

Второй замечательный предел (неопределенность типа 1^∞):
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$
По определению
$$e=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$
Положим $1/n=x$, тогда $n=1/x$, $x\to 0$ при $n\to+\infty$ и мы получаем:
$$e=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$
Однако, это еще не доказывает, что второй замечательный предел имеет место, т.к. при таком подходе $x\to 0$, принимая лишь значения $1/n$, где $n\in\mathbb{N}$, а нужно доказать данное равенство при любом способе стремления x к нулю, в том числе и когда x принимает отрицательные значения.

Введем функцию
$$f(x)=(1+\frac{1}{[x]})^{[x]},$$
где $x\geq 1$. Так как $f(x)=(1+1/n)^n$ при $n\leq x<n+1$, то
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$$
Докажем, что
$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$
Воспользуемся неравенствами (при $x\geq 1$):
$$[x]\leq x\leq [x]+1=[x+1]\Rightarrow\frac{1}{[x+1]}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{[x]}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{[x+1]} \le 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{[x]} \Rightarrow (1+\frac{1}{[x+1]})^{[x]} \le (1+\frac{1}{x})^{x} \le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x+1]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x]}\right).$$

Перейдем к пределу при $x \to +\infty$. Левая и правая части последнего неравенства, очевидно, стремятся к e. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e.$$

Положим $y = 1/x$. Тогда $y \to +0$ при $x \to +\infty$ и мы получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = \lim_{y\to+0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Ради удобства перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Положим $y = -x$. Тогда $y \to +0$ при $x \to -0$ и

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Пусть $z = y/(1-y)$. Тогда если $y \to +0$, то $z \to +0$. Также $y = z/(1+z)$ и $1/y = 1/z + 1$. Итак, имеем:

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to+0}(1+z)^{\frac{1}{z}} \cdot (1+z) = e \cdot 1 = e.$$

Учитывая доказанное выше равенство

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

мы можем записать

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

что и требовалось доказать.

Примеры:

1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Отсюда вытекает, что $\log_a(1+x) \sim x/\ln a$ при $x \to 0$, или

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x) \quad \text{при } x \to 0.$$

Выпишем частный случай этой асимптотической формулы:

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{при } x \to 0.$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a.$$

Здесь была сделана замена $a^x - 1 = y \to 0$ при $x \to 0$. Выпишем соответствующую асимптотическую формулу: $a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \to 0$, или

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad \text{при } x \to 0.$$

Домашнее задание.

Верны ли утверждения:

1) если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то функция $|f(x)|$ также непрерывна в точке a?

2) если функция $|f(x)|$ непрерывна в точке a, то и функция $f(x)$ непрерывна в точке a?

Если утверждение верно, то его необходимо доказать, если же неверно —привести контрпример.

Лекция 8

Производные и дифференциалы.

§1. Определение производной. Производные некоторых основных элементарных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Зафиксируем какую-нибудь точку x из (a, b) и рассмотрим другую точку $x + \triangle x$ этого интервала. Величину $\triangle x$ назовем *приращением аргумента* функции в точке x. Составим разность

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$

При фиксированной точке x эта разность является функцией аргумента $\triangle x$. Она называется *приращением функции* $y = f(x)$ в точке x.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Оно также является функцией аргумента $\triangle x$.

Определение : если существует

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x},$$

то он называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x. Обозначение:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x), \quad y'(x),$$

в физике часто используется обозначение $\dot{y}(x)$, обычно в том случае, когда x —время. Несколько позже мы введем еще одно обозначение:

$$\frac{dy}{dx},$$

но это будет не единый символ, а дробь, в которой числитель и знаменатель имеют свой смысл.

Примеры:

1) рассмотрим функцию $y = c$, где c —некоторая константа. Имеем: $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = c - c = 0$, отсюда

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = 0 \Rightarrow c' = 0.$$

2) рассмотрим функцию $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдем приращение функции: $\triangle y = f(x+\triangle x) - f(x) = (x+\triangle x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \triangle x + n(n-1)x^{n-2} \times$ $\times (\triangle x)^2/2 + \ldots + (\triangle x)^n - x^n = nx^{n-1} \cdot \triangle x + o(\triangle x)$ при $\triangle x \to 0$. Отсюда

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = nx^{n-1} + \frac{o(\triangle x)}{\triangle x} \to nx^{n-1} \quad \text{при} \quad \triangle x \to 0,$$

т.е. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Позднее мы докажем, что эта формула верна для любого вещественного числа n.

3) найдем производную функции $y = \sin x$. Имеем:

$$\triangle y = \sin(x+\triangle x) - \sin x = 2\sin\frac{\triangle x}{2} \cdot \cos(x + \frac{\triangle x}{2}) =$$

$$= 2\left(\frac{\triangle x}{2} + o(\triangle x)\right) \cdot \cos(x + \frac{\triangle x}{2}) \quad \text{при} \quad \triangle x \to 0,$$

следовательно,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \cos(x + \frac{\triangle x}{2}) \cdot \left(1 + \frac{o(\triangle x)}{\triangle x}\right) \to \cos x \quad \text{при} \quad \triangle x \to 0.$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$.

4) доказать самостоятельно, что $(\cos x)' = -\sin x$.

5) найдем производную логарифмической функции $y = \log_a x$ $(x > 0)$. Получаем:

$$\triangle y = \log_a(x+\triangle x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right) =$$

$$= \frac{\triangle x}{x\ln a} + o(\triangle x) \quad \text{при} \quad \triangle x \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{x\ln a} + \frac{o(\triangle x)}{\triangle x} \to \frac{1}{x\ln a} \quad \text{при} \quad \triangle x \to 0.$$

Итак, $(\log_a x)' = 1/(x\ln a)$, в частности, $(\ln x)' = 1/x$.

6) найдем производную показательной функции $y = a^x$:

$$\triangle y = a^{x+\triangle x} - a^x = a^x(a^{\triangle x} - 1) = a^x(1 + \triangle x \cdot \ln a + o(\triangle x) - 1) \quad \text{при} \quad \triangle x \to 0,$$

откуда

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = a^x\left(\ln a + \frac{o(\triangle x)}{\triangle x}\right) \to a^x \cdot \ln a \quad \text{при} \quad \triangle x \to 0.$$

Итак, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, и, в частности, $(e^x)' = e^x$.

Односторонние производные.

Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} \quad \text{при} \quad \triangle x > 0.$$

Определение : если существует

$$\lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle y}{\triangle x},$$

то он называется *правой производной* функции $y = f(x)$ в точке x. Обозначение: $f'_{\text{пр}}(x)$.

Аналогично определяется *левая производная* функции $y = f(x)$ в точке x:

$$\lim_{\triangle x \to -0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'_{\text{лев}}(x).$$

Функция $y = f(x)$ может иметь в какой-то точке не равные односторонние производные.

Пример: рассмотрим функцию $y = |x|$. В точке $x = 0$ имеем:

$$\triangle y = y(0+\triangle x) - y(0) = \begin{cases} \triangle x, & \text{если } \triangle x > 0 \\ -\triangle x, & \text{если } \triangle x < 0 \end{cases},$$

следовательно,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \begin{cases} +1, & \text{если } \triangle x > 0 \\ -1, & \text{если } \triangle x < 0 \end{cases}.$$

Тем самым, правая производная в точке 0 равна 1, а левая производная равна -1. Производной в этой точке функция $y = |x|$ не имеет.

Частные производные.

Рассмотрим функцию не одной, а нескольких переменных, например, $z = f(x, y)$. Если зафиксировать значение одной из переменных, например y, то функция z станет функцией одной переменной x. Производная этой функции называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ по аргументу x и обозначается z'_x. Аналогично определяется частная производная z'_y по аргументу y.

Пример: рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $z'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = x^y \cdot \ln x$.

§2. Физический и геометрический смысл производной.

Физический смысл производной.

Пусть x —время, а $y = f(x)$ —координата точки, движущейся по оси Oy, в момент времени x.

Разностное отношение

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

называется *средней скоростью* точки на промежутке времени от момента x до момента $x + \triangle x$, а величина

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x) = v(x)$$

называется *мгновенной скоростью* точки в момент времени x.

В случае произвольной функции $y = f(x)$ производная $f'(x)$ характеризует *скорость* изменения переменной y (функции) по отношению к изменению аргумента x.

Геометрический смысл производной.

Углом между прямой l и осью Ox назовем угол α, на который нужно повернуть ось Ox, чтобы совместить ее положительное направление с одним из направлений прямой l, причем $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называется *угловым коэффициентом* прямой l.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, т.е. множество точек на плоскости $\{(x, f(x))\}, x \in X$, где X —область определения этой функции. Отметим на графике точки $M(x, f(x))$ и $N(x + \triangle x, f(x + \triangle x))$. Прямая MN называется *секущей* по отношению к графику функции. Угол между секущей MN и осью Ox обозначим $\varphi(\triangle x)$. Устремим теперь $\triangle x$ к нулю.

Определение : если существует

$$\lim_{\triangle x \to 0} \varphi(\triangle x) = \varphi_0,$$

то прямая l с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, проходящая через точку $M(x, f(x))$, называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке M.

Говорят также, что прямая l является предельным положением секущей MN при $\triangle x \to 0$. В соответствии с этим можно сказать, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$ есть предельное положение секущей MN при $\triangle x \to 0$.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, то график функции имеет в точке $M(x, f(x))$ касательную, причем угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$.

Доказательство:

Для секущей MN имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi(\triangle x) = \frac{\triangle y}{\triangle x} \Rightarrow \varphi(\triangle x) = \operatorname{arctg}\frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Перейдем к пределу при $\triangle x \to 0$ и воспользуемся тем, что

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x)$$

и $\operatorname{arctg} t$ —непрерывная функция. Получим:

$$\lim_{\triangle x\to 0}\varphi(\triangle x) = \lim_{\triangle x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \operatorname{arctg} f'(x).$$

Отсюда по определению касательной следует, что существует касательная к графику функции в точке $M(x, f(x))$. При этом

$$\varphi_0 = \lim_{\triangle x\to 0}\varphi(\triangle x) = \operatorname{arctg} f'(x),$$

и, следовательно, $k = \operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x)$. Теорема доказана.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

§3. Дифференцируемость и дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x. Введем функцию

$$\alpha(\triangle x) = \frac{\triangle y}{\triangle x} - f'(x) = \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} - f'(x). \qquad (4)$$

Функция $\alpha(\triangle x)$ определена при $\triangle x \neq 0$ и является бесконечно малой при $\triangle x \to 0$. Из равенства (4) получаем:

$$\triangle y = f'(x)\cdot\triangle x + \alpha(\triangle x)\cdot\triangle x \quad \text{при} \quad \triangle x \neq 0. \qquad (5)$$

Равенство (5) будет верным и для $\triangle x = 0$, если доопределить каким-нибудь образом функцию $\alpha(\triangle x)$ при $\triangle x = 0$. Для дальнейшего удобно положить $\alpha(0) = 0$, то есть доопределить $\alpha(\triangle x)$ в точке $\triangle x = 0$ по непрерывности. Отметим также, что $f'(x)$ не зависит от $\triangle x$, т.е. для данной точки x является некоторым числом.

Итак, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее приращение в этой точке можно представить в виде (5), где $\alpha(\triangle x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$, $\alpha(0) = 0$.

Пусть теперь дано, что приращение функции $y = f(x)$ в точке x имеет вид

$$\triangle y = A \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x, \tag{6}$$

где A —некоторое число, а $\alpha(\triangle x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$, $\alpha(0) = 0$. Покажем, что в этом случае функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, причем $f'(x) = A$. Из (6) получаем:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = A + \alpha(\triangle x),$$

откуда следует, что

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x) = A.$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее приращение в этой точке можно представить в виде (6), где $A = f'(x)$, и обратно, если приращение функции в точке x можно представить в виде (6), то она имеет в точке x производную, причем $f'(x) = A$, т.е. *существование производной функции в точке x и представление приращения функции в виде (6) являются эквивалентными свойствами.*

Определение : если приращение функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде (6), где A —некоторое число, а $\alpha(\triangle x)$ —бесконечно малая функция при $\triangle x \to 0$, $\alpha(0) = 0$, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x.

Из проведенного рассуждения следует, что *для дифференцируемости функции в точке x необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.*

Операцию вычисления производной называют *дифференцированием* функции.

Замечание: выписанное выше условие дифференцируемости (6) с учетом равенств $A = f'(x)$, $\alpha(\triangle x) \cdot \triangle x = o(\triangle x)$ при $\triangle x \to 0$, можно записать в виде:

$$\triangle y = f'(x) \cdot \triangle x + o(\triangle x). \tag{7}$$

Пример: рассмотрим функцию $y = x^2$. Имеем:

$$\triangle y = (x + \triangle x)^2 - x^2 = 2x \cdot \triangle x + \triangle x \cdot \triangle x, \quad A = f'(x) = 2x.$$

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Введем обозначение: $x-a = \triangle x$. Тогда $\triangle x \to 0$ при $x \to a$, $x = a+\triangle x$ и нужно доказать, что

$$\lim_{\triangle x\to 0} f(a+\triangle x) = f(a) \quad (\text{или} \quad \lim_{\triangle x\to 0}[f(a+\triangle x) - f(a)] = 0).$$

Но $f(a+\triangle x) - f(a) = \triangle y$ —приращение функции в точке a. Таким образом, требуется доказать, что

$$\lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0.$$

По условию теоремы, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a, поэтому

$$\triangle y = f'(a)\cdot\triangle x + o(\triangle x).$$

Следовательно,

$$\lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание: равенство

$$\lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0,$$

где $\triangle y = f(a+\triangle x)-f(a)$, называется *разностной формой условия непрерывности функции* $y = f(x)$ *в точке* a. Если это условие выполнено, то функция непрерывна в точке a, и обратно, если функция непрерывна в точке a, то это условие выполнено.

Отметим также, что обратное к теореме 2 утверждение неверно, т.е. непрерывная в некоторой точке функция, вообще говоря, не будет являться дифференцируемой в этой точке.

Пример: функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Существуют функции, которые непрерывны в каждой точке числовой прямой, но ни в одной точке не дифференцируемы. Впервые пример такой функции построил Карл Вейерштрасс (1815-1897) в 1872 году.

Лекция 9

Производные и дифференциалы (продолжение).

Дифференциал функции.

Обратимся снова к условию дифференцируемости, которое записано в виде (7): $\triangle y = f'(x) \cdot \triangle x + o(\triangle x)$. Приращение $\triangle y$ дифференцируемой в точке x функции $y = f(x)$ состоит из двух слагаемых: $f'(x) \cdot \triangle x + o(\triangle x)$. Оба слагаемых являются бесконечно малыми функциями при $\triangle x \to 0$. Если $f'(x) \neq 0$, то первое слагаемое является бесконечно малой того же порядка, что и $\triangle x$: $f'(x) \cdot \triangle x = O(\triangle x)$. Второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\triangle x : o(\triangle x)$.

Определение : *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x называется линейная функция аргумента $\triangle x$:

$$dy = f'(x) \cdot \triangle x. \tag{8}$$

Отметим, что если $f'(x) \neq 0$, то $dy = f'(x) \cdot \triangle x$ является главной частью $\triangle y$ при $\triangle x \to 0$. Если же $f'(x) = 0$, то $dy = 0$ и уже не является главной частью приращения функции $\triangle y$.

Дифференциалом независимой переменной x называют приращение этой переменной: $dx = \triangle x$. Формула (8) принимает вид: $dy = f'(x)dx$, откуда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

т.е. если x —независимая переменная, то производная функции в точке x равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной.

Пример: рассмотрим функцию $y = \sin x$. Найдем ее дифференциал: $dy = d(\sin x) = \cos x \cdot dx$ —линейная функция dx при фиксированном x. Имеем:

$$d(\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}dx; \quad d(\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}, dx=0,1} = 0,05; \quad \forall dx : d(\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Физический смысл дифференциала функции.

Пусть x —время, $y = f(x)$ —координата точки на оси Oy в момент времени x. Тогда $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$ —изменение (приращение) координаты за промежуток времени от момента x до момента $x + \triangle x$. При этом $dy = f'(x) \cdot \triangle x = v(x) \cdot \triangle x$ —дифференциал равен тому изменению координаты, которое имела бы точка, если бы ее скорость на отрезке времени $[x, x + \triangle x]$ была постоянной, равной $v(x)$.

Геометрический смысл дифференциала функции.

Дифференциал dy равен тому изменению функции $y = f(x)$ при изменении аргумента на $\triangle x$, которое имела бы функция, если бы на отрезке $[x, x + \triangle x]$ она была линейной с угловым коэффициентом прямой (ее графика), равным $f'(x)$.

Использование дифференциала для приближенных вычислений.

С помощью формулы $\triangle y = dy + o(\triangle x)$ можно приближенно вычислять $f(x + \triangle x)$ при малых $\triangle x$, если известны $f(x)$ и $f'(x)$. В самом деле, из равенства $f(x + \triangle x) - f(x) = f'(x) \cdot \triangle x + o(\triangle x)$ следует: $f(x + \triangle x) = f(x) + f'(x) \cdot \triangle x + o(\triangle x)$, откуда получаем приближенное равенство $f(x + \triangle x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \triangle x$.

§4. Правила дифференцирования.

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то и функции $u(x) \pm v(x), u(x) \cdot v(x), u(x)/v(x)$ (где $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в точке x, причем:

(1)
$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

(2)
$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

(3)
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство:

Докажем формулу (2) (формулы (1) и (3) доказать самостоятельно). Положим $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда:

$$\triangle y = y(x + \triangle x) - y(x) = u(x + \triangle x)v(x + \triangle x) - u(x)v(x) =$$
$$= u(x + \triangle x)v(x + \triangle x) - u(x)v(x) + u(x)v(x + \triangle x) - u(x)v(x + \triangle x) =$$
$$= [u(x + \triangle x) - u(x)]v(x + \triangle x) + u(x)[v(x + \triangle x) - v(x)] =$$
$$= \triangle u \cdot v(x + \triangle x) + \triangle v \cdot u(x),$$

отсюда
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} \cdot v(x + \triangle x) + \frac{\triangle v}{\triangle x} \cdot u(x).$$

Перейдем в последнем выражении к пределу при $\triangle x \to 0$:
$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = v(x)u'(x) + u(x)v'(x),$$

т.е. $y'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, что и требовалось доказать.

Следствия:
(1)
$$[c \cdot y(x)]' = c \cdot y'(x), \quad \text{где} \quad c = const;$$
(2)
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$
(3)
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{(доказать самостоятельно).}$$

§5. Производная обратной функции.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0, дифференцируема в самой точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Пусть $f(x_0) = y_0$. Тогда в некоторой окрестности точки y_0 существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, эта функция дифференцируема в точке y_0 и
$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство:

Рассмотрим любой сегмент $[a, b]$, расположенный в указанной окрестности точки x_0 и такой, что $a < x_0 < b$. Функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на этом сегменте. Поэтому, согласно теореме 5 из лекции 6, множеством значений функции $y = f(x)$, заданной на $[a, b]$, является сегмент $Y = [f(a), f(b)]$, на Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго монотонная и непрерывная. При этом $y_0 \in (f(a), f(b))$.

Дадим аргументу y обратной функции в точке y_0 приращение $\triangle y \neq 0$ столь малое, что $(y_0 + \triangle y) \in (f(a), f(b))$. Обратная функция получит приращение $\triangle x = f^{-1}(y_0 + \triangle y) - f^{-1}(y_0)$, которое отлично от нуля в силу строгой монотонности обратной функции: $\triangle x \neq 0$. Запишем равенство:
$$\frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{1}{\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)}. \tag{9}$$

Перейдем в (9) к пределу при $\triangle y \to 0$. Воспользуемся непрерывностью обратной функции $x = f^{-1}(y)$ и разностной формой условия непрерывности функции: $\triangle x \to 0$ при $\triangle y \to 0$. Но при $\triangle x \to 0$ знаменатель в правой части (9) стремится к $f'(x_0)$. Следовательно, существует предел и левой части равенства (9), который по определению производной равен $\Big(f^{-1}(y_0)\Big)'$. Таким образом, переходя к пределу при $\triangle y \to 0$ в равенстве (9), мы получаем:

$$\Big(f^{-1}(y_0)\Big)' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание: полученная формула для производной обратной функции имеет простой и ясный физический смысл. Производная $f'(x_0)$ есть скорость изменения переменной y по отношению к изменению переменной x в точки x_0. Это означает, что при малом изменении x от x_0 до $x_0 + \triangle x$, т.е. при изменении x на малую величину $\triangle x$, переменная y изменится на величину $\triangle y \approx f'(x_0) \cdot \triangle x$. Можно сказать, что y изменяется в $f'(x_0)$ раз "быстрее", чем x. Но тогда x изменяется в $1/f'(x_0)$ раз "медленнее", чем y: $\triangle x \approx \triangle y / f'(x_0)$, т.е. скорость изменения переменной x по отношению к изменению переменной y (а эта скорость и есть $\Big(f^{-1}(y_0)\Big)'$) равна $1/f'(x_0)$.

Примеры:

1) рассмотрим функцию $y = \sin x$ при $-\pi/2 < x < \pi/2$. Эта функция имеет обратную: $x = \arcsin y$, $-1 < y < 1$. Для любого $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполнены условия теоремы 4, согласно которой

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad -1 < y < 1.$$

В дальнейшем, как правило, мы будем записывать эту формулу в виде:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Замечание: при $x \to +1$ (или при $x \to -1$) имеем $(\arcsin x)' \to +\infty$. В таком случае говорят, что функция имеет в данной точке бесконечную производную. Геометрически это означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке —вертикальная прямая (т.е. $||Oy$).

2) самостоятельно вывести формулу

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

3) рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Эта функция имеет обратную: $x = \operatorname{arctg} y$, $-\infty < y < +\infty$. Для любого $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

выполнены условия теоремы 4, согласно которой

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Запишем эту формулу, заменив y на x:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

4) самостоятельно вывести формулу

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§6. Производная сложной функции.

Рассмотрим сложную функцию $y = f(t)$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами, $y = f(\varphi(x)) \equiv F(x)$.

Теорема 5. Пусть функция $t = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, $\varphi(x_0) = t_0$, и функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0. Тогда сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и выполняется равенство: $F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$.

Доказательство:

Согласно определению дифференцируемости функции нужно доказать, что приращение функции $y = F(x)$ в точке x_0 можно представить в виде:

$$\triangle y = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x, \tag{10}$$

где $\alpha(\triangle x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$ и $\alpha(0) = 0$.

Дадим аргументу x приращение $\triangle x$ в точке x_0. Функция $t = \varphi(x)$ получит приращение $\triangle t = \varphi(x_0 + \triangle x) - \varphi(x_0)$, которое можно представить в виде (в силу дифференцируемости функции $t = \varphi(x)$ в точке x_0):

$$\triangle t = \varphi'(x_0) \cdot \triangle x + \beta(\triangle x) \cdot \triangle x, \tag{11}$$

где $\beta(\triangle x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$ и $\beta(0) = 0$.

Данному приращению $\triangle t$ переменной t соответствует приращение $\triangle y = f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)$ функции $y = f(t)$. Поскольку функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0, то $\triangle y$ можно представить в виде

$$\triangle y = f'(t_0) \cdot \triangle t + \gamma(\triangle t) \cdot \triangle t, \tag{12}$$

где $\gamma(\triangle t) \to 0$ при $\triangle t \to 0$ и $\gamma(0) = 0$.

Подставив выражение (11) для $\triangle t$ в равенство (12), получим:

$$\triangle y = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \triangle x + [\beta \cdot f'(t_0) + \gamma \cdot \varphi'(x_0) + \gamma\beta]\triangle x =$$

$$= f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x,$$

т.е. мы получили равенство (10), причем $\alpha(\triangle x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$ и $\alpha(0) = 0$. Теорема полностью доказана.

Замечание: полученная формула имеет простой и ясный физический смысл: $\varphi'(x_0)$ —скорость изменения переменной t по отношению к изменению переменной x, $f'(t_0)$ —скорость изменения y по отношению к изменению t, а $F'(x_0)$ —скорость изменения y по отношению к изменению x. Ясно, что эти скорости связаны равенством: $F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

Примеры:

1) рассмотрим функцию

$$y = x^\alpha,$$

где α —произвольное вещественное число, $x > 0$. Для этой функции справедливо представление: $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = \exp t$, где $t = \alpha \ln x$. Тогда

$$(x^\alpha)' = (\exp t)' \cdot (\alpha \ln x)' = \exp t \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Итак, при $x > 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Частные случаи этой формулы:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

и

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2) найдем производную функции

$$y = \ln\cos(\operatorname{arctg} e^x).$$

Имеем:

$$y' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arctg} e^x)} \cdot (-\sin(\operatorname{arctg} e^x)) \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x =$$

$$= -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} e^x) \cdot \frac{e^x}{1+e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}.$$

3) вычислим производную так называемой степенно-показательной функции

$$y(x) = u(x)^{v(x)}, \quad \text{где} \quad u(x) > 0.$$

Имеем:

$$y = e^{v \ln u}, \quad y' = e^{v \ln u}(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u') = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u',$$

или

$$(u^v)' = (u^v)'\Big|_{u=const} + (u^v)'\Big|_{v=const}.$$

Лекция 10

Производные и дифференциалы (продолжение).

§7. Инвариантность формы первого дифференциала.

Дифференциал функции

$$dy = f'(x)dx \tag{13}$$

называется также *первым дифференциалом функции.* Как мы помним, здесь $dx = \triangle x$ является приращением независимой переменной x.

Покажем, что формула (13) остается в силе и тогда, когда x будет являться не независимой переменной, а дифференцируемой функцией некоторого аргумента t: $x = \varphi(t)$. Теперь $y = f(\varphi(t)) \equiv F(t)$ —сложная функция независимой переменной t, дифференцируемой в силу теоремы 5 предыдущей лекции. Согласно определению дифференциала функции $dy = F'(t)dt$, а по теореме 5 $F'(t) = f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, поэтому $dy = f'(\varphi(t))\times$ $\times\varphi'(t)dt$. Так как $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, то выражение для dy можно записать в виде

$$dy = f'(x)dx,$$

то есть формула (13) имеет место и в том случае, когда x —функция некоторого аргумента t.

Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала.* Отметим, что инвариантной (не изменяющейся) является только форма (вид) первого дифференциала, а суть меняется, поскольку теперь $dx = \varphi'(t)dt \neq \triangle x$. Из (13) следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \tag{14}$$

т.е. производная функции равна отношению дифференциалов функции и аргумента и в том случае, когда аргумент x —не независимая переменная, а функция некоторой независимой переменной t.

Следствие из формулы (14): пусть переменные x и y заданы как функции аргумента t, который назовем *параметром*:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{15}$$

Пусть параметр t изменяется на некотором промежутке и пусть существует функция $t = \varphi^{-1}(x)$, обратная к функции $x = \varphi(t)$. Тогда можно записать: $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) \equiv f(x)$.

Таким образом, уравнения (15) определяют функцию $y = f(x)$. Такой способ задания функции называется *параметрическим* заданием функции.

Вычислим $f'(x)$. По формуле (14):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Итак, мы получили формулу производной функции, заданной параметрически:

$$f'(x) = \left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Эту же формулу можно получить иначе, если использовать правило дифференцирования сложной функции:

$$y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \Rightarrow f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \Big(\varphi^{-1}(x)\Big)' =$$

$$= \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \left.\frac{1}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Физическая интерпретация.

Уравнения (15) можно рассматривать как уравнения, задающие движение точки на плоскости: t —время, $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ —координаты точки в момент времени t.

При такой интерпретации график функции $y = f(x)$ представляет собой траекторию движения точки на плоскости. Вектор скорости этой точки $\vec{v}(t) = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}$ направлен по касательной к траектории, т.к.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f'(x).$$

§8. Производные высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда производная $f'(x)$ является функцией, определенной на интервале (a, b). Если $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке x из (a, b), то *производная от* $f'(x)$ *в точке* x *называется второй производной функции* $f(x)$ *в точке* x (или *производной второго порядка*) и обозначается $f''(x)$ (другие обозначения: $f^{(2)}(x)$, $y''(x)$ или $y^{(2)}(x)$).

Производная n*-ого порядка* (или n*-я производная*) функции $y = f(x)$ определяется как производная от производной $(n-1)$-ого порядка:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Физический смысл второй производной.

Если x —время, а $y = f(x)$ —координата точки на оси Oy в момент времени x, то $f'(x) = v(x)$ —мгновенная скорость точки в момент x, а $f''(x) = [f'(x)]' = v'(x) = a(x)$ —ускорение точки в момент x.

Геометрический смысл второй производной.

Позже будет установлено, что знак $f''(x)$ определяет направление выпуклости графика функции $y = f(x)$.

Примеры:

0) Смысл производной 6-ого порядка: ускорение темпов роста повышения производительности труда.

1) рассмотрим функцию $y = x^\alpha$:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

и т.д. В общем случае имеем:

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

(строгое доказательство провести самостоятельно по индукции). В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)\times\ldots\times 1\cdot x^0 = m!, \quad (x^m)^{(n)} = 0 \quad \forall n > m.$$

2) рассмотрим функцию $y = a^x$:

$$y' = a^x \ln a,$$

$$y'' = a^x(\ln a)^2,$$

и т.д. В общем случае имеем:

$$y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$$

(строгое доказательство провести самостоятельно по индукции). В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

3) рассмотрим функцию $y = \sin x$:

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2),$$

$$y'' = \sin(x + 2\pi/2),$$

и т.д. В общем случае имеем:

$$y^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$$

(строгое доказательство провести самостоятельно по индукции).

4) доказать самостоятельно, что $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$.

Две формулы для производных n-ого порядка.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные n-ого порядка, то и функции $u(x) \pm v(x)$, $u(x)v(x)$ также имеют n-ые производные, причем:

(1)
$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x).$$

Справедливость этой формулы установить самостоятельно методом математической индукции. Докажем ее при $n = 2$:

$$(u(x) \pm v(x))^{(2)} = \Big[(u(x) \pm v(x))'\Big]' = \Big[u'(x) \pm v'(x)\Big]' = u^{(2)}(x) \pm v^{(2)}(x).$$

(2)
$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)}v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots +$$
$$+ C_n^k \cdot u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + u \cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $u^{(0)} \equiv u$, $C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n$, $0! = 1$. Эта формула называется *формулой Лейбница.*

Заметим, что (2) по форме похожа на формулу бинома Ньютона:

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{n-k}v^k.$$

Формулу Лейбница предлагается доказать самостоятельно по индукции. Предварительно требуется доказать (также по индукции) следующую формулу:
$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Пример: рассмотрим функцию $y = x^2 \cdot e^{3x}$. Используя формулу (2), найдем $y^{(10)}$:

$$y^{(10)} = (e^{3x})^{(10)} \cdot x^2 + C_{10}^1 \cdot (e^{3x})^{(9)} \cdot (x^2)' + C_{10}^2 \cdot (e^{3x})^{(8)} \cdot (x^2)'' + \ldots =$$

$$= 3^{10} \cdot e^{3x} \cdot x^2 + 10 \cdot 3^9 \cdot e^{3x} \cdot 2x + \frac{10 \cdot 9}{2} e^{3x} \cdot 3^8 \cdot 2 = 3^9 \cdot e^{3x}(3x^2 + 20x + 30).$$

§9. Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), т.е. дифференцируема в каждой точке этого интервала. Если x —независимая переменная, то первый дифференциал функции выражается формулой

$$dy = f'(x)dx.$$

Если $x = \varphi(t)$ —дифференцируемая функция независимой переменной t, то

$$dy = f'(x)dx = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

В каждом из двух случаев dy является функцией двух переменных — независимой переменной (x или t) и ее дифференциала (dx или dt), который входит в виде сомножителя. При введении дифференциала второго порядка мы будем рассматривать dy как функцию только независимой переменной (x или t), т.е. дифференциал независимой переменной (dx или dt) будем рассматривать как постоянный множитель в выражении для dy. Такую же договоренность примем при определении дифференциалов более высокого порядка.

При этом условии определим *дифференциал второго порядка* (или *второй дифференциал*) d^2y функции $y = f(x)$ как дифференциал от первого дифференциала, т.е.

$$d^2y = d(dy).$$

Дифференциал n-ого порядка $d^n y$ $(n \geq 2)$ определим формулой

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Рассмотрим два случая.

(1) Пусть x является независимой переменной, тогда $dy = f'(x)dx$, где $dx = \triangle x$ —приращение независимой переменной. Далее,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = dx \cdot \Big[d(f'(x))\Big] = dx \cdot \Big[(f'(x))'dx\Big] = f^{(2)}(x)(dx)^2,$$

$$d^3y = d(d^2y) = (dx)^2 d\Big[f^{(2)}(x)\Big] = (dx)^2 \cdot f^{(3)}(x)dx = f^{(3)}(x)(dx)^3,$$

и т.д. По индукции несложно доказать общую формулу:

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Из этой формулы вытекает, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

т.е. производная n-го порядка функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала n-го порядка функции к n-й степени дифференциала независимой переменной.

<u>Пример</u>: рассмотрим функцию $y = \sin x$. Найдем $d^{20}y$:

$$d^{20}(\sin x) = (\sin x)^{(20)} \cdot (dx)^{(20)} = \sin(x + 20 \cdot \pi/2)(dx)^{20} = \sin x \cdot (dx)^{20}.$$

(2) Пусть теперь x —функция некоторой независимой переменной t, то есть $x = \varphi(t)$. В этом случае $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ и мы можем записать:

$$d^2y = d(dy) = dt \cdot d\Big(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\Big) = dt \cdot \Big(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\Big)' dt =$$

$$= \Big[f''(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t))^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)\Big] dt^2 =$$

$$= f''(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t)dt)^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)dt^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким образом, *форма второго дифференциала не инвариантна*. Это же относится к дифференциалам более высокого порядка.

§10. Производные вектор-функции.

Если каждому числу t из множества T поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{r}$, то говорят, что на множестве T задана векторная функция (или *вектор-функция*) $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Модуль вектора $\vec{r}(t)$ будем обозначать, как обычно, $|\vec{r}(t)|$. Отметим, что $|\vec{r}(t)|$ —скалярная функция аргумента t.

Определение : вектор $\vec{a}$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{r}(t) \to \vec{a} \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Зафиксируем значение аргумента t и дадим ему приращение $\triangle t \neq 0$. Вектор-функция получит при этом приращение

$$\triangle \vec{r} = \vec{r}(t + \triangle t) - \vec{r}(t).$$

Определение : если существует

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t},$$

то он называется *производной* вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t.

Обозначение: $\Big(\vec{r}(t)\Big)'$ или $d\vec{r}/dt$.

Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$ и введем базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Разложим вектор $\vec{r}(t)$ по этому базису:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \{x(t), y(t), z(t)\};$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}.$$

Справедливо утверждение: для того, чтобы $\vec{r}(t) \to \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ при $t \to t_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$x(t) \to a_1, \quad y(t) \to a_2, \quad z(t) \to a_3 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Доказательство несложно провести, используя равенство

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}.$$

Из этого утверждения, в частности, следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\},$$

т.е. вычисление производной вектор-функции сводится к вычислению производных ее координат.

Определение : множество концов всех векторов $\vec{r}(t)$ $(t \in T)$, отложенных от начала координат (точки О), называется *годографом* вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Физический смысл годографа —это траектория точки, движение которой в пространстве задано уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Физический смысл производной $d\vec{r}/dt$ —скорость точки. Можно доказать, что вектор $d\vec{r}/dt$ является касательным к годографу.

Некоторые правила дифференцирования вектор-функций.

1) $\Big[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)\Big]' = (\vec{r}_1(t))' \pm (\vec{r}_2(t))';$

2) $\Big[f(t) \cdot \vec{r}(t)\Big]' = f'(t) \cdot \vec{r}(t) + f(t) \cdot (\vec{r}(t))';$

3) $\Big(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\Big)' = \Big(\vec{r}_1(t)\Big)' \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \Big(\vec{r}_2(t)\Big)';$

4) $\Big[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)\Big]' = \Big[(\vec{r}_1(t))' \times \vec{r}_2(t)\Big] + \Big[\vec{r}_1(t) \times (\vec{r}_2(t))'\Big].$

Выписанные правила 1)-4) нетрудно доказать, используя выражения для $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2, \ldots, [\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]$ в координатах.

Лекция 11

Производные и дифференциалы (продолжение).

Производные высших порядков вектор-функций.

Производные высших порядков вектор-функции вводятся, как и для скалярной функции:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right), \ldots, \vec{r}^{(n)}(t) = \left[\vec{r}^{(n-1)}(t)\right]'.$$

В координатах:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \{x''(t), y''(t), z''(t)\}.$$

Пример 1: рассмотрим прямую (ось вращения) и вектор $\vec{a}$ с началом на этой прямой, составляющий угол α с прямой. Пусть вектор $\vec{a}$ вращается вокруг прямой с постоянной угловой скоростью ω, причем угол α и длина вектора $\vec{a}$ остаются неизменными. Положим $|\vec{a}| = a$ и введем вектор $\vec{\omega}$, у которого $|\vec{\omega}| = \omega$, а направление совпадает с положительным направлением оси вращения. Вектор $\vec{a}$ зависит от времени: $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Докажем, что

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы положительное направление оси Oz совпало с положительным направлением оси вращения (и, следовательно, с направлением вектора $\vec{\omega}$). Имеем:

$$\vec{a}(t) = \{a\sin\alpha \cdot \cos\omega t, a\sin\alpha \cdot \sin\omega t, a\cos\alpha\}.$$

Введем обозначения: $a\sin\alpha = b, a\cos\alpha = c$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \{-b\omega\sin\omega t, b\omega\cos\omega t, 0\},$$

$$[\vec{\omega} \times \vec{a}(t)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ b\cos\omega t & b\sin\omega t & c \end{vmatrix} = \{-b\omega\sin\omega t, b\omega\cos\omega t, 0\},$$

то есть

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

Если начало вектора $\vec{a}$ не лежит на оси вращения, то доказанная формула остается в силе, поскольку такой вектор можно представить в виде разности двух векторов с началами на оси вращения:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}_1}{dt} - \frac{d\vec{a}_2}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{a}_1] - [\vec{\omega} \times \vec{a}_2] = [\vec{\omega} \times (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)] = [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

Пример 2: рассмотрим твердое тело (например, Земной шар), вращающееся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно неподвижной системы координат с базисом $\{\vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0}\}$. Введем на этом твердом теле свой базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Он вращается вместе с твердым телом с угловой скоростью $\vec{\omega}$, поэтому

$$\vec{i} = \vec{i}(t), \quad \vec{j} = \vec{j}(t), \quad \vec{k} = \vec{k}(t), \quad \frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{i}], \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{j}], \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{k}].$$

Рассмотрим точку M, движущуюся внутри тела или по его поверхности. Ее положение относительно неподвижной системы координат в каждый момент времени можно задать радиус-вектором $\vec{OM}$, который обозначим $\vec{r}(t)$. Выведем формулу скорости точки M относительно неподвижной системы координат, т.е. формулу для $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. С этой целью разложим вектор $\vec{r}(t)$ по (вращающемуся) базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\right) + x \cdot [\vec{\omega} \times \vec{i}] + y \cdot [\vec{\omega} \times \vec{j}] + z \cdot [\vec{\omega} \times \vec{k}].$$

Замечая, что выражение в скобках представляет собой относительную скорость $\vec{v}_{\text{отн.}}$, перепишем (после группировки оставшихся слагаемых) выражение для $d\vec{r}/dt$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн.}} + [\vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})] = \vec{v}_{\text{отн.}} + [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

В полученном равенстве векторное произведение $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$ представляет собой переносную скорость $\vec{v}_{\text{пер.}}$.

Итак, можно заключить, что абсолютная скорость (т.е. скорость относительно неподвижной системы координат) равна сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн.}} + \vec{v}_{\text{пер.}}.$$

Получим теперь формулу для ускорения точки M. Имеем:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\text{пер.}}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\text{отн.}}}{dt} = [\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}] + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\right) =$$

$$= [\vec{\omega} \times (\vec{v}_{\text{отн.}} + \vec{v}_{\text{пер.}})] + \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{dx}{dt} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{i}] + \frac{dy}{dt} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{j}] + \frac{dz}{dt} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{k}]\right) =$$

$$= [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] + \vec{a}_{\text{отн.}} + [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}] = \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{отн.}} + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}].$$

В этом равенстве слагаемые

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \equiv \vec{a}_{\text{отн.}} \quad \text{и} \quad [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] \equiv \vec{a}_{\text{пер.}}$$

являются соответственно относительным и переносным ускорениями, а слагаемое $2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн.}}]$ —так называемым *кориолисовым* ускорением $\vec{a}_{\text{кор.}}$.

Итак, можно заключить, что абсолютное ускорение равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пер.}} + \vec{a}_{\text{отн.}} + \vec{a}_{\text{кор.}}$$

Отметим, что $\vec{a}_{\text{пер.}} = [\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{пер.}}] = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$ представляет собой т.н. *двойное векторное произведение.*