Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Содержание

Лекция 1. Общие сведения о функциях

Определение (прямое произведение множеств).

1. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$, $A_1, \ldots, A_N$ — множества. Обозначим:

$$A_1 \times \cdots \times A_N = \bigl\{(x_1, \ldots, x_N)\colon x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N\bigr\} =$$
$$\Bigl\{y\colon \exists x_1 \cdots \exists x_N\bigl(x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N \wedge y = (x_1, \ldots, x_N)\bigr)\Bigr\}.$$

Множество $A_1 \times \cdots \times A_N$ называют прямым произведением множеств $A_1, \ldots, A_N$.

2. Пусть: A — множество, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Обозначим: $A_1, \ldots, A_N = A$, $A^N = A_1 \times \cdots \times A_N$.
3. Пусть A — множество. Обозначим, $A^1 = A$.

Определение.

1. Пусть F — функция. Обозначим через $\mathrm{D}(F)$ область определения функции F.
2. Пусть F — функция. Обозначим:

$$\mathrm{R}(F) = \bigl\{F(x)\colon x \in \mathrm{D}(F)\bigr\} = \Bigl\{y\colon \exists x\bigl(x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\bigr)\Bigr\}.$$

Множество $\mathrm{R}(F)$ называют областью значений функции F (образом функции F). Иногда множество $\mathrm{R}(F)$ обозначают через $\mathrm{Im}(F)$.

3. Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \to B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Обозначим через $\mathrm{fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \to B$.

4. Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \implies B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Обозначим через $\mathrm{Fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \implies B$.

5. Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим через $F|_A$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F|_A) = \mathrm{D}(F) \cap A$, $F|_A(x) = F(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F) \cap A$. Функцию $F|_A$ называют ограничением функции F на множество A.

6. Пусть: F — функция, B — множество. Обозначим:

$$F^{-1}\{B\} = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) \in B\bigr\}.$$

Множество $F^{-1}\{B\}$ называют полным прообразом множества B под действием функции F.

7. Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$F[A] = \bigl\{F(x)\colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge x \in A\bigr\} = \Bigl\{y\colon \exists x\bigl(x \in \mathrm{D}(F) \wedge x \in A \wedge y = F(x)\bigr)\Bigr\}.$$

Множество $F[A]$ называют образом множества A под действием функции F.

8. Пусть F_1, F_2 — функции. Обозначим через $F_2 \circ F_1$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\bigr\}$, $(F_2 \circ F_1)(x) = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$ при: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$. Функцию $F_2 \circ F_1$ называют суперпозицией функций F_2, F_1 (композицией функций F_1, F_2; произведением функций F_2, F_1; сложной функцией, образованной функциями F_2, F_1). Иногда функцию $F_2 \circ F_1$ обозначают через $F_2 F_1$.

Утверждение. *Пусть F_1, F_2, F_3 — функции. Тогда $(F_3 \circ F_2) \circ F_1 = F_3 \circ (F_2 \circ F_1)$.*

Доказательство. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((F_3\circ F_2)\circ F_1\big)=\big\{x\colon x\in\mathrm{D}(F_1)\wedge F_1(x)\in\mathrm{D}(F_3\circ F_2)\big\}=$$
$$=\Big\{x\colon x\in\mathrm{D}(F_1)\wedge F_1(x)\in\mathrm{D}(F_2)\wedge F_2\big(F_1(x)\big)\in\mathrm{D}(F_3)\Big\}=$$
$$=\big\{x\colon x\in\mathrm{D}(F_2\circ F_1)\wedge(F_2\circ F_1)(x)\in\mathrm{D}(F_3)\big\}=\mathrm{D}\big(F_3\circ(F_2\circ F_1)\big).$$

Пусть $x\in\mathrm{D}\big((F_3\circ F_2)\circ F_1\big)$. Тогда: $\big((F_3\circ F_2)\circ F_1\big)(x)=(F_3\circ F_2)\big(F_1(x)\big)=F_3\Big(F_2\big(F_1(x)\big)\Big)=F_3\big((F_2\circ F_1)(x)\big)=\big(F_3\circ(F_2\circ F_1)\big)(x)$. В силу произвольности выбора x получаем, что $(F_3\circ F_2)\circ F_1=F_3\circ(F_2\circ F_1)$. □

Определение.

1. Пусть F — функция. Будем говорить, что F — обратимая функция, если: $F(x_1)=F(x_2)\implies x_1=x_2$ при $x_1,\ x_2\in\mathrm{D}(F)$.

2. Пусть F — обратимая функция. Будем говорить, что φ — обратная функция к функции F, если: φ — функция, $\mathrm{D}(\varphi)=\mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(\varphi)\subseteq\mathrm{D}(F)$, $F\big(\varphi(y)\big)=y$ при $y\in\mathrm{D}(\varphi)$.

Утверждение. *Пусть F — обратимая функция. Существует единственная функция φ, удовлетворяющая условию: φ — обратная функция к функции F.*

Доказательство. Так как F — обратимая функция, то $\forall y\in\mathrm{R}(F)\exists!x\big(x\in\mathrm{D}(F)\wedge F(x)=y\big)$. Тогда существует единственная функция φ, удовлетворяющая условиям: $\mathrm{D}(\varphi)=\mathrm{R}(F)$, $\varphi(y)\in\mathrm{D}(F)$, $F\big(\varphi(y)\big)=y$ при $y\in\mathrm{D}(\varphi)$. Следовательно, существует единственная функция φ, удовлетворяющая условию: φ — обратная функция к функции F. □

Определение. Пусть F — обратимая функция. Обозначим через F^{-1} обратную функцию к функции F.

Утверждение.

1. Пусть: $F_1,\ F_2$ — функции; $\mathrm{R}(F_1)\subseteq\mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big)=x$ при $x\in\mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1)\subseteq\mathrm{R}(F_2)$.

2. Пусть F — обратимая функция. Тогда: F^{-1} — функция, $\mathrm{D}(F^{-1})=\mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(F^{-1})=\mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big)=y$ при $y\in\mathrm{D}(F^{-1})$; $F^{-1}\big(F(x)\big)=x$ при $x\in\mathrm{D}(F)$.

3. Пусть: $F_1,\ F_2$ — функции; $\mathrm{R}(F_1)=\mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big)=x$ при $x\in\mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1, F_2 — обратимые функции, $F_2=F_1^{-1}$, $F_1=F_2^{-1}$.

4. Пусть: $F_1,\ F_2$ — функции; $\mathrm{R}(F_1)\subseteq\mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big)=x$ при $x\in\mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2)\subseteq\mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big)=y$ при $y\in\mathrm{D}(F_2)$. Тогда: $F_1,\ F_2$ — обратимые функции, $F_2=F_1^{-1}$, $F_1=F_2^{-1}$.

Доказательство.

1. Пусть: $x_1,\ x_2\in\mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x_1)=F_2(x_2)$. Тогда: $x_1=F_2\big(F_1(x_1)\big)=F_2\big(F_1(x_2)\big)=x_2$. В силу произвольности выбора $x_1,\ x_2$ получаем, что F_1 — обратимая функция.

Пусть $x\in\mathrm{D}(F_1)$. Тогда: $F_1(x)\in\mathrm{D}(F_2)$, $x=F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно, $x\in\mathrm{R}(F_2)$. В силу произвольности выбора x получаем, что $\mathrm{D}(F_1)\subseteq\mathrm{R}(F_2)$.

2. Очевидно: F^{-1} — функция, $\mathrm{D}(F^{-1})=\mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(F^{-1})\subseteq\mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big)=y$ при $y\in\mathrm{D}(F^{-1})$.

Пусть $x\in\mathrm{D}(F)$. Тогда $F(x)\in\mathrm{D}(F^{-1})$. Следовательно: $F^{-1}\big(F(x)\big)\in\mathrm{D}(F)$, $F\Big(F^{-1}\big(F(x)\big)\Big)=F(x)$. Так как F — обратимая функция, то $F^{-1}\big(F(x)\big)=x$.

Так как: $\mathrm{R}(F)=\mathrm{D}(F^{-1})$, $F^{-1}\big(F(x)\big)=x$ при $x\in\mathrm{D}(F)$, то $\mathrm{D}(F)\subseteq\mathrm{R}(F^{-1})$. Так как: $\mathrm{R}(F^{-1})\subseteq\mathrm{D}(F)$, $\mathrm{D}(F)\subseteq\mathrm{R}(F^{-1})$, то $\mathrm{R}(F^{-1})=\mathrm{D}(F)$.

3. Так как: $\mathrm{R}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция. Очевидно: $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{D}(F_1^{-1}) = \mathrm{R}(F_1)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(F_1)$. Тогда можно указать такой объект x, что: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Следовательно: $F_2(y) = F_2\big(F_1(x)\big) = x = F_1^{-1}\big(F_1(x)\big) = F_1^{-1}(y)$. В силу произвольности выбора y получаем, что $F_2 = F_1^{-1}$.

Так как $F_2 = F_1^{-1}$, то: $\mathrm{R}(F_2) = \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$. Тогда: F_2 — обратимая функция, $F_1 = F_2^{-1}$.

4. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция.

Так как: $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$, то $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$. Так как: $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, то $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$. Так как: $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$, то $F_2 = F_1^{-1}$.

Аналогично получаем, что: F_2 — обратимая функция, $F_1 = F_2^{-1}$. □

Утверждение.

1. Пусть F — обратимая функция. Тогда: F^{-1} — обратимая функция, $F = (F^{-1})^{-1}$.

2. Пусть F_1, F_2 — обратимые функции. Тогда: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $F_1^{-1} \circ F_2^{-1} = (F_2 \circ F_1)^{-1}$.

Доказательство.

1. Так как: $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$, то: F^{-1} — обратимая функция, $F = (F^{-1})^{-1}$.

2. Пусть $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Обозначим, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) = F_1(x)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big) = x$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) = x$. Итак: $(F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = x$.

Пусть $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$. Обозначим, $x = (F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $x = F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big)$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) = F_2^{-1}(z)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = z$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)(x) = z$. Итак: $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)\big((F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)\big) = z$.

Окончательно получаем, что: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $F_1^{-1} \circ F_2^{-1} = (F_2 \circ F_1)^{-1}$. □

Теорема (о базисном миноре)**.** *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.*

Пусть: $r = \overline{1, \min\{N_1, N_2\}}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A) \neq 0$.

Пусть все миноры матрицы A порядка $r+1$ равны нулю (если они существуют).

Тогда: столбцы $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ образуют базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$; строки $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ образуют базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$.

Доказательство. Обозначим, $\delta = \Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A)$.

Предположим, что $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда:

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{i_1}^{j_1} & \cdot & A_{i_r}^{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_1}^{j_r} & \cdot & A_{i_r}^{j_r} \end{vmatrix} = 0 \text{ (что противоречит тому, что: } \delta = \Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A) \neq 0\text{)}.$$

Итак, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы.

Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$B(i,j) = \begin{pmatrix} A_{i_1}^{j_1} & \cdot & A_{i_r}^{j_1} & A_i^{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_1}^{j_r} & \cdot & A_{i_r}^{j_r} & A_i^{j_r} \\ A_{i_1}^{j} & \cdot & A_{i_r}^{j} & A_i^{j} \end{pmatrix}.$$

Пусть $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда последний столбец матрицы $B(i,j)$ равен одному из предыдущих столбцов матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть $j \in \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда последняя строка матрицы $B(i,j)$ равна одной из предыдущих строк матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть: $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда $\det\bigl(B(i,j)\bigr)$ равен (с точностью до знака) одному из миноров матрицы A порядка $r+1$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Итак, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$. Тогда:

$$0 = \det\bigl(B(i,j)\bigr) = (-1)^{r+1+1}\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_1}^j + \cdots + (-1)^{r+1+r}\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_r}^j + \\ (-1)^{r+1+r+1}\overline{\Delta}_{r+1}^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_i^j.$$

Так как: $(-1)^{r+1+r+1}\overline{\Delta}_{r+1}^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr) = \delta \neq 0$, то:

$$A_i^j = -(-1)^{r+1+1}\frac{\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_1}^j - \cdots - (-1)^{r+1+r}\frac{\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_r}^j.$$

Пусть $k = \overline{1, r}$. Число $-(-1)^{r+1+k}\frac{\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$ не зависит от номера j. Обозначим, $C^k(i) = -(-1)^{r+1+k}\frac{\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$. Тогда $A_i^j = C^1(i)A_{i_1}^j + \cdots + C^r(i)A_{i_r}^j$. В силу произвольности выбора j получаем, что $A_i = C^1(i)A_{i_1} + \cdots + C^r(i)A_{i_r}$.

Аналогично проводятся рассуждения для строк. □

Лекция 2. Подпространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq L$. Обозначим:

$$Q_1 + \cdots + Q_r = \{x_1 + \cdots + x_r \colon x_1 \in Q_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in Q_r\} = \\ \big\{y \colon \exists x_1 \cdots \exists x_r (x_1 \in Q_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in Q_r \wedge y = x_1 + \cdots + x_r)\big\}.$$

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. *Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Тогда: $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.*
2. *Пусть Q_1, Q_2, $Q_3 \subseteq L$. Тогда $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.*
3. *Пусть $Q \subseteq L$. Тогда $Q + \{\theta\} = Q$.*
4. *Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq L$. Тогда $Q_1 + \cdots + Q_r = (Q_1 + \cdots + Q_{r-1}) + Q_r$.*
5. *Пусть Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Тогда: $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L, Q_1, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.*
6. *Пусть: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Тогда $Q_1 + Q_2 = Q_1$.*
7. *Пусть: r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{r_1}$, $y_1, \ldots, y_{r_2} \in L$. Тогда: $L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}) = L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_2 + Q_1$.

Пусть $x \in Q_2 + Q_1$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_2$, $x_2 \in Q_1$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_1 + Q_2$.

2. Пусть $x \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, x_3, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = (x_1 + x_2) + x_3$. Следовательно: $x = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.

Пусть $x \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, x_3, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = x_1 + (x_2 + x_3)$. Следовательно: $x = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$.

3. Пусть $x \in Q + \{\theta\}$. Тогда можно указать такой вектор x_1, что: $x_1 \in Q$, $x = x_1 + \theta$. Следовательно: $x = x_1 + \theta = x_1 \in Q$.

Пусть $x \in Q$. Так как $\theta \in \{\theta\}$, то: $x = x + \theta \in Q + \{\theta\}$.

4. Пусть $x \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_r$, что: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Следовательно: $x = x_1 + \cdots + x_r = (x_1 + \cdots + x_{r-1}) + x_r \in (Q_1 + \cdots + Q_{r-1}) + Q_r$.

Пусть $x \in (Q_1 + \cdots + Q_{r-1}) + Q_r$. Тогда можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_r$, что: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = (x_1 + \cdots + x_{r-1}) + x_r$. Следовательно: $x = (x_1 + \cdots + x_{r-1}) + x_r = x_1 + \cdots + x_r \in Q_1 + \cdots + Q_r$.

5. Покажем, что $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L. Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$. Так как Q_1, $Q_2 \neq \varnothing$, то $Q_1 + Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, y_1, y_2, что: x_1, $y_1 \in Q_1$, x_2, $y_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Следовательно: $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in Q_1 + Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно: $\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L.

Покажем, что Q_1, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$. Пусть $x \in Q_1$. Так как $\theta \in Q_2$, то: $x = x + \theta \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_1 \subseteq Q_1 + Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Так как $\theta \in Q_1$, то: $x = \theta + x \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.

6. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Так как $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = x_1 + x_2 \in Q_1$.

Пусть $x \in Q_1$. Так как $Q_2 \neq \varnothing$, то можно указать такой вектор x_2, что $x_2 \in Q_2$. Так как $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = x + \theta = x + \big(x_2 + (-x_2)\big) = \big(x_1 + (-x_2)\big) + x_2 \in Q_1 + Q_2$.

7. Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда можно указать такие числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1}$, $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, что $u = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2})$. Следовательно: $u = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$.

Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда можно указать такие числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1}$, $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, что $u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Следовательно: $u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2})$. $\square$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, если: $x_1 + \cdots + x_r = \theta \implies x_1 = \theta \wedge \cdots \wedge x_r = \theta$ при: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L. Обозначим, $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r = Q_1 + \cdots + Q_r$. Сумму линейно независимых подпространств называют прямой суммой.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ *— подпространства пространства* L*. Подпространства* $Q_1, \ldots, Q_r$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда:* $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r$ *при:* $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$*.*

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Пусть: $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Тогда: $x_1 - y_1 \in Q_1, \ldots, x_r - y_r \in Q_r$, $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_r - y_r) = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $x_1 - y_1 = \theta, \ldots, x_r - y_r = \theta$. Тогда: $x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r$.

Пусть: $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r$ при: $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Обозначим, $y_1, \ldots, y_r = \theta$. Тогда: $x_1, y_1 \in Q_1, \ldots, x_r, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Следовательно: $x_1 = y_1 = \theta, \ldots, x_r = y_r = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L*. Подпространства* Q_1, Q_2 *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$*.*

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. Так как: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$, то $\theta \in Q_1 \cap Q_2$. Пусть $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Следовательно: $x \in Q_1$, $-x \in Q_2$, $x + (-x) = \theta$. Так как Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства, то $x = \theta$. Итак, $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$.

Пусть $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_1 + x_2 = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1$, $x_1 = -x_2 \in Q_2$; $x_2 = -x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Следовательно: $x_1 \in Q_1 \cap Q_2$, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$, то: $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta$. Итак, Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L, $\sigma \in S_r$*. Тогда* $Q_{\sigma(1)}, \ldots, Q_{\sigma(r)}$ *— линейно независимые подпространства.*

2. *Пусть:* r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_{r_1}$, $D_1, \ldots, D_{r_2}$ *— линейно независимые подпространства пространства* L, $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_{r_1}$ *— подпространства пространства* L, $\tilde{Q}_1 \subseteq Q_1, \ldots, \tilde{Q}_{r_1} \subseteq Q_{r_1}$*. Тогда* $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_{r_1}$ *— линейно независимые подпространства.*

3. *Пусть:* r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_{r_1}$ *— линейно независимые подпространства пространства* L, $D_1, \ldots, D_{r_2} = \{\theta\}$*. Тогда* $Q_1, \ldots, Q_{r_1}$, $D_1, \ldots, D_{r_2}$ *— линейно независимые подпространства.*

4. *Пусть:* $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, $Q_1, \ldots, Q_r$ *— подпространства пространства* L*. Подпространства* $Q_1, \ldots, Q_r$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда: подпространства*

$Q_1, \ldots, Q_{r-1}$ линейно независимы, подпространства $Q_1 + \cdots + Q_{r-1}$, Q_r линейно независимы. Подпространства $Q_1, \ldots, Q_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда: подпространства $Q_2, \ldots, Q_r$ линейно независимы, подпространства Q_1, $Q_2 + \cdots + Q_r$ линейно независимы.

Доказательство.

1. Пусть: $x_1 \in Q_{\sigma(1)}, \ldots, x_r \in Q_{\sigma(r)}$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Тогда: $x_{\sigma^{-1}(1)} \in Q_1, \ldots, x_{\sigma^{-1}(r)} \in Q_r$, $x_{\sigma^{-1}(1)} + \cdots + x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Тогда $x_1, \ldots, x_r = \theta$. Итак, $Q_{\sigma(1)}, \ldots, Q_{\sigma(r)}$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $x_1 \in \tilde{Q}_1, \ldots, x_{r_1} \in \tilde{Q}_{r_1}$, $x_1 + \cdots + x_{r_1} = \theta$. Обозначим, $y_1, \ldots, y_{r_2} = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_{r_1} \in Q_{r_1}$, $y_1 \in D_1, \ldots, y_{r_2} \in D_{r_2}$, $x_1 + \cdots + x_{r_1} + y_1 + \cdots + y_{r_2} = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_{r_1}$, $D_1, \ldots, D_{r_2}$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \ldots, x_{r_1} = \theta$. Итак, $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_{r_1}$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_{r_1} \in Q_{r_1}$, $y_1 \in D_1, \ldots, y_{r_2} \in D_{r_2}$, $x_1 + \cdots + x_{r_1} + y_1 + \cdots + y_{r_2} = \theta$. Так как $D_1, \ldots, D_{r_2} = \{\theta\}$, то $y_1, \ldots, y_{r_2} = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_{r_1} \in Q_{r_1}$, $x_1 + \cdots + x_{r_1} = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_{r_1}$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \ldots, x_{r_1} = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_{r_1}$, $D_1, \ldots, D_{r_2}$ — линейно независимые подпространства.

4. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Тогда $Q_1, \ldots, Q_{r-1}$ — линейно независимые подпространства. Пусть: $y \in Q_1 + \cdots + Q_{r-1}$, $x_r \in Q_r$, $y + x_r = \theta$. Так как $y \in Q_1 + \cdots + Q_{r-1}$, то можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_{r-1}$, что: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_{r-1} \in Q_{r-1}$, $y = x_1 + \cdots + x_{r-1}$. Тогда: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \ldots, x_r = \theta$. Тогда: $y = x_1 + \cdots + x_{r-1} = \theta$, $x_r = \theta$. Итак, $Q_1 + \cdots + Q_{r-1}$, Q_r — линейно независимые подпространства.

Пусть: $Q_1, \ldots, Q_{r-1}$ — линейно независимые подпространства, $Q_1 + \cdots + Q_{r-1}$, Q_r — линейно независимые подпространства. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Тогда: $x_1 + \cdots + x_{r-1} \in Q_1 + \cdots + Q_{r-1}$, $x_r \in Q_r$, $(x_1 + \cdots + x_{r-1}) + x_r = \theta$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_{r-1}$, Q_r — линейно независимые подпространства, то: $x_1 + \cdots + x_{r-1} = \theta$, $x_r = \theta$. Так как: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_{r-1} \in Q_{r-1}$, $x_1 + \cdots + x_{r-1} = \theta$, $Q_1, \ldots, Q_{r-1}$ — линейно независимые подпространства, то $x_1, \ldots, x_{r-1} = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Аналогично доказывается второе утверждение рассматриваемого пункта. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.*

1. *Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы подпространства Q_k при $k = \overline{1,r}$. Тогда $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы.*

2. *Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k при $k = \overline{1,r}$. Тогда $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$.*

3. *Пусть: $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы пространства L; $Q_k = L(e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k})$ при $k = \overline{1,r}$. Тогда $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L.*

Доказательство.

1. Пусть: $\alpha^{k,m} \in \mathbb{K}$ при $k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,N_k}$; $\sum\limits_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$. Тогда: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} \in Q_k$ при $k = \overline{1,r}$; $\sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$ при $k = \overline{1,r}$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m} = 0$ при $m = \overline{1,N_k}$. Итак, $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы.

2. Очевидно: $Q_1 + \cdots + Q_r = L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}) + \cdots + L(e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}) = L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r})$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Тогда $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$.

3. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как $x_k \in Q_k$, то можно указать такие числа $\alpha^{k,1}, \ldots, \alpha^{k,N_k} \in \mathbb{K}$, что $x_k = \alpha^{k,1} e_{k,1} + \cdots + \alpha^{k,N_k} e_{k,N_k}$. Тогда:

$$\theta = \sum_{k=1}^{r} x_k = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \sum_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}} \alpha^{k,m} e_{k,m}.$$

Так как $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m} = 0$ при $k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,N_k}$. Тогда: $x_k = \alpha^{k,1} e_{k,1} + \cdots + \alpha^{k,N_k} e_{k,N_k} = \theta$ при $k = \overline{1,r}$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— подпространства пространства* L*;* $\dim(Q_k) \neq +\infty$ *при* $k = \overline{1,r}$*. Подпространства* $Q_1, \ldots, Q_r$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$*.*

Доказательство. Обозначим: $N_k = \dim(Q_k)$ при $k = \overline{1,r}$.

1. Пусть: $N_k \neq 0$ при $k = \overline{1,r}$. Фиксируем номер $k = \overline{1,r}$. Так как $N_k \in \mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$, что $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k.

Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Тогда $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$. Следовательно: $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r$.

Пусть $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r$. Предположим, что $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно зависимые векторы. Тогда:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim\bigl(L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}) + \cdots + L(e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r})\bigr) = \dim\bigl(L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r})\bigr) < N_1 + \cdots + N_r.$$

Итак, $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Так как: $Q_k = L(e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k})$ при $k = \overline{1,r}$, то $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $\exists k = \overline{1,r}(N_k \neq 0)$, $\exists k = \overline{1,r}(N_k = 0)$. Тогда можно указать такое число $p = \overline{1,r-1}$ и такие числа $k_1, \ldots, k_p = \overline{1,r}$, что: $k_1 < \cdots < k_p$, $N_{k_1}, \ldots, N_{k_p} \neq 0$; $N_k = 0$ при: $k = \overline{1,r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_p\}$. Следовательно: $Q_k = \{\theta\}$ при: $k = \overline{1,r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_p\}$.

Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Тогда $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_p}$ — линейно независимые подпространства. Следовательно, $\dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_p}) = N_{k_1} + \cdots + N_{k_p}$. Тогда: $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_p}) = N_{k_1} + \cdots + N_{k_p} = N_1 + \cdots + N_r$.

Пусть $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r$. Тогда: $\dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_p}) = \dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r = N_{k_1} + \cdots + N_{k_p}$. Следовательно, $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_p}$ — линейно независимые подпространства. Тогда $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $N_k = 0$ при $k = \overline{1,r}$. Тогда: $Q_k = \{\theta\}$ при $k = \overline{1,r}$. Следовательно: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства; $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim\bigl(\{\theta\}\bigr) = 0 = N_1 + \cdots + N_r$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$. Будем говорить, что D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства Q_2, если: D — подпространство пространства L, $Q_2 = Q_1 + D$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. *Тогда можно указать линейное дополнение* D *подпространства* Q_1 *до подпространства* Q_2.

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Так как $Q_1 \subseteq Q_2$, то $N_1 \leqslant N_2$.

1. Пусть: $N_1 \neq 0$, $N_1 \neq N_2$. Так как $N_1 \in \mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, что $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — базис подпространства Q_1. Так как: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$, то можно указать такие векторы $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}$, что $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — базис пространства Q_2. Обозначим, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}) = L(e_1, \ldots, e_{N_2}) = Q_2$. Так как: $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы, $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_{N_1})$, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$, то Q_1, D — линейно независимые подпространства.

2. Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Обозначим, $D = Q_2$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = \{\theta\} + Q_2 = Q_2$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

3. Пусть $N_1 = N_2$. Так как: $N_1 = N_2$, $N_2 \neq +\infty$, то $Q_1 = Q_2$. Обозначим, $D = \{\theta\}$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = Q_2 + \{\theta\} = Q_2$; Q_1, D — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. *Тогда* $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$.

Доказательство. Так как: $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то можно указать линейное дополнение D подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2. Тогда: $\dim(D) = \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$, $(Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$.

Так как: $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$, то: $Q_1 + Q_2 = Q_1 + (Q_1 \cap Q_2 + D) = (Q_1 + Q_1 \cap Q_2) + D = Q_1 + D$. Так как $D \subseteq Q_2$, то: $Q_1 \cap D = Q_1 \cap (D \cap Q_2) = (Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$. Тогда Q_1, D — линейно независимые подпространства. Следовательно: $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1 + D) = \dim(Q_1) + \dim(D) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$. □

Лекция 3. Тензорная алгебра

3.1. Числовые наборы

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.

1. Обозначим через $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ множество всех функций A, удовлетворяющих условию $A\colon \{1, \ldots, N_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, N_r\} \implies \mathbb{K}$.
2. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Будем говорить, что A — числовой набор степени r.
3. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать $A_{i_1, \ldots, i_r}$ вместо $A(i_1, \ldots, i_r)$.
4. Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(A+B)_{i_1, \ldots, i_r} = A_{i_1, \ldots, i_r} + B_{i_1, \ldots i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.
5. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(\lambda A)_{i_1, \ldots, i_r} = \lambda A_{i_1, \ldots, i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.
6. Очевидно, $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.
7. Нетрудно показать, что $\dim\bigl(\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}\bigr) = N_1 \cdots N_r$.

Утверждение. *Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — различные объекты, $D = \{x_1, \ldots, x_r\}$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Фиксируем номер $i = \overline{1, r}$. Пусть: $F_i(x) = 1$ при $x = x_i$; $F_i(x) = 0$ при: $x \in D$, $x \neq x_i$. Тогда $F_1, \ldots, F_r$ — базис пространства* $\mathrm{Fun}(D, \mathbb{K})$.

Доказательство. Пусть i, $k = \overline{1, N}$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — различные объекты, то $F_i(x_k) = \delta^i_k$.

Покажем, что $F_1, \ldots, F_r$ — линейно независимые функции. Пусть: $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} C^i F_i = \Theta$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{r} C^i F_i(x) = \Theta(x), \quad x \in D,$$

$$\sum_{i=1}^{r} C^i F_i(x_k) = \Theta(x_k),$$

$$\sum_{i=1}^{r} C^i \delta^k_i = 0,$$

$$C^k = 0.$$

Пусть $F \in \mathrm{Fun}(D, \mathbb{K})$. Покажем, что $F = \sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) F_i$. Пусть $x \in D$. Тогда можно указать такой номер $k = \overline{1, r}$, что $x = x_k$. Следовательно: $\sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) F_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) F_i(x_k) = \sum\limits_{i=1}^{r} F(x_i) \delta^k_i = F(x_k) = F(x)$. Итак, $F_1, \ldots, F_r$ — базис пространства $\mathrm{Fun}(D, \mathbb{K})$. □

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать $A^{i_1, \ldots, i_r}$ вместо $A(i_1, \ldots, i_r)$.
2. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_{p+q} \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_{p+q}}$. Далее часто будем писать $A^{j_1, \ldots, j_q}_{i_1, \ldots, i_p}$ вместо $A(j_1, \ldots, j_q, i_1, \ldots, i_p)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим: $N_1, \ldots, N_r = N$, $\mathbb{K}^{(N,r)} = \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,0)} = \mathbb{K}$.
2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$, $A \in \mathbb{K}^{(N,r)}$. Будем говорить, что A — числовой набор степени r.
3. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $\mathbb{K}^{(N,r)}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.
4. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $\dim\bigl(\mathbb{K}^{(N,r)}\bigr) = N^r$.

3.2. Геометрические объекты

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: $x \in L$, e — базис пространства L. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x, если: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $x = \tilde{x}^j e_j$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.

2. Пусть e, e' — базисы пространства L. Обозначим: $\alpha^i_{i'}(e, e') = [e'_{i'}]^i(e)$ при i, $i' = \overline{1, N}$. Матрицу $\alpha(e, e')$ называют матрицей перехода от базиса e к базису e'.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. *Пусть e — базис пространства L. Тогда $\alpha(e, e) = \tilde{I}$ (здесь: $\tilde{I} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{I}$ — единичная матрица).*

2. *Пусть e, e', e'' — базисы пространства L. Тогда $\alpha(e, e'') = \alpha(e, e')\alpha(e', e'')$.*

3. *Пусть e, e' — базисы пространства L. Тогда:* $\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) \neq 0$, $\bigl(\alpha(e, e')\bigr)^{-1} = \alpha(e', e)$.

4. *Пусть: e — базис пространства L, $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$; $e'_{i'} = A^i_{i'} e_i$ при $i' = \overline{1, N}$. Тогда: e' — базис пространства L, $\alpha(e, e') = A$.*

5. *Пусть: $x \in L$, e, e' — базисы пространства L. Тогда $[x](e') = \alpha(e', e)[x](e)$ ($[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)$ при $j' = \overline{1, N}$).*

Доказательство.

1. Пусть $i = \overline{1, N}$. Тогда $e_i = \delta^j_i e_j$. Следовательно: $\alpha^j_i(e, e) = \delta^j_i$ при $j = \overline{1, N}$.

2. Пусть $i'' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$e''_{i''} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'')e'_{i'} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\bigl(\alpha^i_{i'}(e, e')e_i\bigr) = \bigl(\alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\bigr)e_i.$$

Следовательно: $\alpha^i_{i''}(e, e') = \alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'')$ при $i = \overline{1, N}$.

3. Очевидно: $\alpha(e, e')\alpha(e', e) = \alpha(e, e) = \tilde{I}$. Тогда: $\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) \neq 0$, $\bigl(\alpha(e, e')\bigr)^{-1} = \alpha(e', e)$.

4. Очевидно, $e'_1, \ldots, e'_N \in L$. Пусть: $C^1, \ldots, C^N \in \mathbb{K}$, $C^{i'} e'_{i'} = \theta$. Тогда: $\theta = C^{i'} e'_{i'} = C^{i'}(A^i_{i'} e_i) = (A^i_{i'} C^{i'})e_i$. Так как $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, то: $A^i_{i'} C^{i'} = 0$ при $i = \overline{1, N}$. Так как $\det(A) \neq 0$, то: $C^{i'} = 0$ при $i' = \overline{1, N}$. Итак, $e'_1, \ldots, e'_N$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim(L) = N$, то e' — базис пространства L. Так как: $e'_{i'} = A^i_{i'} e_i$ при $i' = \overline{1, N}$, то $\alpha(e, e') = A$.

5. Очевидно:

$$x = [x]^j(e)e_j = [x]^j(e)\bigl(\alpha^{j'}_j(e', e)e'_{j'}\bigr) = \bigl(\alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)\bigr)e'_{j'}.$$

Тогда: $[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)$ при $j' = \overline{1, N}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — геометрический объект степени r в пространстве L, если A это отображение, которое каждому базису e пространства L ставит в соответствие числовой набор $A(e) \in \mathbb{K}^{(N,r)}$.

2. Обозначим через $(GL)_r$ множество всех геометрических объектов степени r в пространстве L.

3. Далее часто будем писать $A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ вместо $\bigl(A(e)\bigr)_{i_1,\ldots,i_r}$.

4. Пусть A, $B \in (GL)_r$. Тогда: $(A+B)(e) = A(e) + B(e)$ при: e — базис пространства L; $(A+B)_{i_1,\dots,i_r}(e) = A_{i_1,\dots,i_r}(e) + B_{i_1,\dots,i_r}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1,\dots,i_r = \overline{1,N}$.

5. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (GL)_r$. Тогда: $(\lambda A)(e) = \lambda A(e)$ при: e — базис пространства L; $(\lambda A)_{i_1,\dots,i_r}(e) = \lambda A_{i_1,\dots,i_r}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1,\dots,i_r = \overline{1,N}$.

6. Очевидно, $(GL)_r$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

3.3. Тензоры

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть p, $q \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени $p+q$ в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e').$$

Здесь: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p,j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$.

2. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{0}{p}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени p в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = A_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e').$$

Здесь: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p = \overline{1,N}$.

3. Пусть $q \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{q}{0}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени q в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A^{j'_1,\dots,j'_q}(e') = A^{j_1,\dots,j_q}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e).$$

Здесь: e, e' — базисы пространства L, $j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$.

4. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{0}{0}$ в пространстве L, если A это геометрический объект степени 0 в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A(e') = A(e).$$

Здесь e, e' — базисы пространства L.

5. Пусть $p,q \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $(TL)^q_p$ множество всех тензоров порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $p,q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $(TL)^q_p$ — подпространство пространства $(GL)_{p+q}$.*

Доказательство.

1. Очевидно, $(TL)^q_p \subseteq (GL)_{p+q}$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $(GL)_{p+q}$. Покажем, что $\Theta \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p,j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\Theta^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = 0 = \Theta^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e').$$

3. Пусть A, $B \in (TL)^q_p$. Покажем, что $A+B \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p,j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(A+B)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$\big(A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) + B^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') + B^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = (A+B)^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e').$$

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (TL)^q_p$. Покажем, что $\lambda A \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p, j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\lambda A)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$\big(\lambda A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$\lambda A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e') = (\lambda A)^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e'). \quad \square$$

Замечание (примеры). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть $x \in L$. Очевидно, $[x] \in (TL)^1_0$.

2. Пусть: $\delta^j_i(e) = \delta^j_i$ при: e — базис пространства L, i, $j = \overline{1, N}$. Покажем, что $\delta \in (TL)^1_1$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, i', $j' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\delta^j_i(e)\alpha^{j'}_j(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \delta^j_i\alpha^{j'}_j(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') =$$
$$\alpha^{j'}_i(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \delta^{j'}_{i'} = \delta^{j'}_{i'}(e').$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* p*,* $q \in \mathbb{Z}_+$*,* e_0 *— базис пространства* L*.*

1. *Пусть:* A*,* $B \in (TL)^q_p$*,* $A(e_0) = B(e_0)$*. Тогда* $A = B$*.*

2. *Пусть* $A_0 \in \mathbb{K}^{(N,p+q)}$*. Обозначим:*

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = (A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e).$$

Здесь: e *— базис пространства* L*,* $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$*. Тогда:* $A \in (TL)^q_p$*,* $A(e_0) = A_0$*.*

Доказательство.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e) =$$
$$B^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e) = B^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e).$$

2. Покажем, что $A \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p, j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$\big((A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e)\big)$$
$$\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$(A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j'_1}_{j^0_1}(e',e_0)\cdots\alpha^{j'_q}_{j^0_q}(e',e_0)\alpha^{i^0_1}_{i'_1}(e_0,e')\cdots\alpha^{i^0_p}_{i'_p}(e_0,e') = A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\cdots,i'_p}(e').$$

Покажем, что $A(e_0) = A_0$. Пусть $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e_0) = (A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e_0,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e_0,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e_0)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e_0) =$$
$$(A_0)^{j^0_1,\ldots,j^0_q}_{i^0_1,\ldots,i^0_p}\delta^{j_1}_{j^0_1}\cdots\delta^{j_q}_{j^0_q}\delta^{i^0_1}_{i_1}\cdots\delta^{i^0_p}_{i_p} = (A_0)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; p, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть e_0 — базис пространства L. Обозначим: $\varphi(A) = A(e_0)$ при $A \in (TL)^q_p$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства $(TL)^q_p$ на пространство $\mathbb{K}^{(N,p+q)}$. Тогда: $\dim\big((TL)^q_p\big) = \dim\big(\mathbb{K}^{(N,p+q)}\big) = N^{p+q}$.

Определение. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим через S_r множество всех перестановок множества $\{1, \ldots, N\}$. Обозначим через S_0 множество всех перестановок множества $\varnothing$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$, $p_2, q_2 \geqslant 0$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$. Обозначим:

$$(A \otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e) B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Геометрический объект $A \otimes B$ называют прямым произведением тензоров A, B.

2. Факультативный материал. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$; $p_k, q_k \in \mathbb{Z}_+$, $A_k \in (TL)^{q_k}_{p_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Обозначим: $\tilde{p}_k = p_1 + \cdots + p_k$, $\tilde{q}_k = q_1 + \cdots + q_k$ при $k = \overline{1, r}$;

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e) (A_2)^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}(e) \cdots (A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Геометрический объект $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$ называют прямым произведением тензоров $A_1, \ldots, A_r$.

3. Пусть: $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. Обозначим:

$$\big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}, j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Геометрический объект $\langle A\rangle^m_k$ называют свёрткой тензора A.

4. Пусть: $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. Обозначим:

$$\big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Геометрический объект $[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$ называют результатом транспонирования тензора A.

5. Пусть: $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma \in S_p$. Обозначим:

$$\big([A]_\sigma\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Геометрический объект $[A]_\sigma$ называют результатом транспонирования тензора A.

6. Пусть: $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma \in S_q$. Обозначим:

$$\big([A]^\sigma\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}_{i_1,\ldots,i_p}(e).$$

Здесь: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Геометрический объект $[A]^\sigma$ называют результатом транспонирования тензора A.

Утверждение (факультативный материал). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$; $p_k, q_k \in \mathbb{Z}_+$, $A_k \in (TL)^{q_k}_{p_k}$ *при* $k = \overline{1, r}$. *Тогда:* $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r$, $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)$.

Доказательство.

1. Обозначим: $\tilde{p}_k = p_1 + \dots + p_k$, $\tilde{q}_k = q_1 + \dots + q_k$ при $k = \overline{1, r}$. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \dots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((A_1 \otimes \dots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r\big)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e) =$$
$$\big((A_1)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_1}}(e) \dots (A_{r-1})_{i_{\tilde{p}_{r-2}+1},\dots,i_{\tilde{p}_{r-1}}}^{j_{\tilde{q}_{r-2}+1},\dots,j_{\tilde{q}_{r-1}}}(e)\big)(A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e) =$$
$$(A_1)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_1}}(e) \dots (A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e) = (A_1 \otimes \dots \otimes A_r)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e).$$

2. Обозначим: $\tilde{p}_k = p_1 + \dots + p_k$, $\tilde{q}_k = q_1 + \dots + q_k$ при $k = \overline{1, r}$. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{\tilde{p}_r}, j_1, \dots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A_1 \otimes (A_2 \otimes \dots \otimes A_r)\big)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e) =$$
$$(A_1)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_1}}(e)\big((A_2)_{i_{\tilde{p}_1+1},\dots,i_{\tilde{p}_2}}^{j_{\tilde{q}_1+1},\dots,j_{\tilde{q}_2}}(e) \dots (A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e)\big) =$$
$$(A_1)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_1}}(e) \dots (A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e) = (A_1 \otimes \dots \otimes A_r)_{i_1,\dots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\dots,j_{\tilde{q}_r}}(e). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $A \otimes B \in (TL)_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}$.
2. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A_1, A_2 \in (TL)_{p_1}^{q_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$.
3. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$; $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B)$.
4. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B_1, B_2 \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$.
5. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$; $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$.
6. Факультативный материал. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{p_2}^{q_2}$. *Пусть:* $\sigma_1(k) = k + p_1$ *при* $k = \overline{1, p_2}$; $\sigma_1(k) = k - p_2$ *при* $k = \overline{p_2 + 1, p_2 + p_1}$; $\sigma_2(k) = k + q_1$ *при* $k = \overline{1, q_2}$; $\sigma_2(k) = k - q_2$ *при* $k = \overline{q_2 + 1, q_2 + q_1}$. *Тогда:* $\sigma_1 \in S_{p_1+p_2}$, $\sigma_2 \in S_{q_1+q_2}$, $A \otimes B = [B \otimes A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$.
7. *Пусть:* $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$; $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{p_2}^{q_2}$; $p_3, q_3 \in \mathbb{Z}_+$, $C \in (TL)_{p_3}^{q_3}$. *Тогда* $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
8. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)_p^q$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle A \rangle_k^m \in (TL)_{p-1}^{q-1}$.
9. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{N}$, $A, B \in (TL)_p^q$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle A + B \rangle_k^m = \langle A \rangle_k^m + \langle B \rangle_k^m$.
10. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)_p^q$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle \lambda A \rangle_k^m = \lambda \langle A \rangle_k^m$.
11. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} \in (TL)_p^q$.
12. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q \geqslant 0$, $A, B \in (TL)_p^q$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A + B]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = [A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} + [B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$.
13. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[\lambda A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \lambda [A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$.
14. Факультативный материал. *Пусть:* $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $A, B \in (TL)_p^q$, $\sigma_1, \sigma_3 \in S_p$, $\sigma_2, \sigma_4 \in S_q$. *Тогда* $\big[[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big]_{\sigma_3}^{\sigma_4} = [A]_{\sigma_3\sigma_1}^{\sigma_4\sigma_2}$.

Доказательство.

1. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_{p_1+p_2}, j'_1, \dots, j'_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(A \otimes B)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e,e') =$$
$$A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e',e)$$
$$\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e,e') = A^{j'_1,\dots,j'_{q_1}}_{i'_1,\dots,i'_{p_1}}(e')B^{j'_{q_1+1},\dots,j'_{q_1+q_2}}_{i'_{p_1+1},\dots,i'_{p_1+p_2}}(e') =$$
$$(A \otimes B)^{j'_1,\dots,j'_{q_1+q_2}}_{i'_1,\dots,i'_{p_1+p_2}}(e').$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2}, j_1, \dots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((A_1 + A_2) \otimes B\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$\big((A_1)^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e) + (A_2)^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)\big)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$(A_1)^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) + (A_2)^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$(A_1 \otimes B + A_2 \otimes B)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

3. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2}, j_1, \dots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\lambda A) \otimes B\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e) = \big(\lambda A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)\big)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$\lambda\big(A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) = \lambda(A \otimes B)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

4. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2}, j_1, \dots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A \otimes (B_1 + B_2)\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)\big((B_1)^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) + (B_2)^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) =$$
$$A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)(B_1)^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) + A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)(B_2)^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$(A \otimes B_1 + A \otimes B_2)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

5. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2}, j_1, \dots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A \otimes (\lambda B)\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)\big(\lambda B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) =$$
$$\lambda\big(A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) = \lambda(A \otimes B)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

6. Факультативный материал. Очевидно: $\sigma_1 \in S_{p_1+p_2}$, $\sigma_2 \in S_{q_1+q_2}$. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2}, j_1, \dots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(A \otimes B)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e) =$$
$$B^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q_2)}}_{i_{\sigma_1(1)},\dots,i_{\sigma_1(p_2)}}(e)A^{j_{\sigma_2(1+q_2)},\dots,j_{\sigma_2(q_1+q_2)}}_{i_{\sigma_1(1+p_2)},\dots,i_{\sigma_1(p_1+p_2)}}(e) = \big([B \otimes A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

7. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_{p_1+p_2+p_3}$, $j_1, \dots, j_{q_1+q_2+q_3} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((A \otimes B) \otimes C\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e) = \big(A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)C^{j_{q_1+q_2+1},\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e) =$$
$$A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)\big(B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)C^{j_{q_1+q_2+1},\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e)\big) = \big(A \otimes (B \otimes C)\big)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e).$$

8. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_{p-1}, j'_1, \ldots, j'_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:
$$\big(\langle A\rangle_k^m\big)_{i_1,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{q-1}}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =$$
$$A_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =$$
$$A_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}(e)\delta_j^i\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =$$
$$A_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}(e)\alpha_{i'}^{i}(e,e')\alpha_j^{i'}(e',e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)$$
$$\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') = A_{i'_1,\ldots,i'_{k-1},i',i'_k,\ldots,i'_{p-1}}^{j'_1,\ldots,j'_{m-1},i',j'_m,\ldots,j'_{q-1}}(e') = \big(\langle A\rangle_k^m\big)_{i'_1,\ldots,i'_{p-1}}^{j'_1,\ldots,j'_{q-1}}(e').$$

9. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}, j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:
$$\big(\langle A+B\rangle_k^m\big)_{i_1,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{q-1}}(e) = A_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}(e) + B_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}(e) =$$
$$\big(\langle A\rangle_k^m + \langle B\rangle_k^m\big)_{i_1,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{q-1}}(e).$$

10. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}, j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:
$$\big(\langle\lambda A\rangle_k^m\big)_{i_1,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{q-1}}(e) = \lambda A_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}(e) = \big(\lambda\langle A\rangle_k^m\big)_{i_1,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{q-1}}(e).$$

11. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p, j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:
$$\big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') =$$
$$A_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') =$$
$$A_{i'_{\sigma_1(1)},\ldots,i'_{\sigma_1(p)}}^{j'_{\sigma_2(1)},\ldots,j'_{\sigma_2(q)}}(e') = \big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i'_1,\ldots,i'_p}^{j'_1,\ldots,j'_q}(e').$$

12. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:
$$\big([A+B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = A_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) + B_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) =$$
$$\big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} + [B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e).$$

13. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:
$$\big([\lambda A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = \lambda A_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) = \lambda\big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e).$$

14. Факультативный материал. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:
$$\Big(\big[[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big]_{\sigma_3}^{\sigma_4}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = \big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_{\sigma_3(1)},\ldots,i_{\sigma_3(p)}}^{j_{\sigma_4(1)},\ldots,j_{\sigma_4(q)}}(e) = A_{i_{\sigma_3(\sigma_1(1))},\ldots,i_{\sigma_3(\sigma_1(p))}}^{j_{\sigma_4(\sigma_2(1))},\ldots,j_{\sigma_4(\sigma_2(q))}}(e) =$$
$$A_{i_{(\sigma_3\sigma_1)(1)},\ldots,i_{(\sigma_3\sigma_1)(p)}}^{j_{(\sigma_4\sigma_2)(1)},\ldots,j_{(\sigma_4\sigma_2)(q)}}(e) = \big([A]_{\sigma_3\sigma_1}^{\sigma_4\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e). \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in (TL)_1^1$.

Пусть e — базис пространства L. Тогда: $\operatorname{tr}\big(A(e)\big) = A_i^i(e) = \langle A\rangle_1^1(e)$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как $\langle A\rangle_1^1 \in (TL)_0^0$, то: $\operatorname{tr}\big(A(e')\big) = \langle A\rangle_1^1(e') = \langle A\rangle_1^1(e) = \operatorname{tr}\big(A(e)\big)$. Так как: $A_{i'}^{j'}(e') = A_i^j(e)\alpha_j^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e')$ при $i', j' = \overline{1, N}$, то $A(e') = \alpha(e',e)A(e)\alpha(e,e')$. Тогда:
$$\det\big(A(e')\big) = \det\big(\alpha(e',e)A(e)\alpha(e,e')\big) = \det\big(\alpha(e',e)\big)\det\big(A(e)\big)\det\big(\alpha(e,e')\big) =$$
$$\det\big(A(e)\big)\det\big(\alpha(e,e')\alpha(e',e)\big) = \det\big(A(e)\big)\det(\tilde{I}) = \det\big(A(e)\big).$$

3.4. Возможные обобщения

1. Можно рассматривать не наборы чисел из поля $\mathbb{K}$, а наборы математических объектов более сложной природы. Например, базис e линейного пространства L можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$.

2. Можно рассматривать геометрические объекты, определённые не для всех базисов линейного пространства.

3. Можно рассматривать геометрические объекты, у которых разные индексы относятся к разным пространствам. Например, матрицу линейного оператора $A\colon L_1 \implies L_2$ можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1 и тензор порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2.

4. Можно рассматривать тензоры, у которых по крайней мере часть индексов преобразуется с помощью матриц $\left\{\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}\right\}^{i=\overline{1,N}}_{i'=\overline{1,N}}$, $\left\{\overline{\alpha^{i'}_i(e',e)}\right\}^{i'=\overline{1,N}}_{i=\overline{1,N}}$ (здесь: $\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}$ — число, комплексно-сопряжённое числу $\alpha^i_{i'}(e,e')$, $\overline{\alpha^{i'}_i(e',e)}$ — число, комплексно-сопряжённое числу $\alpha^{i'}_i(e',e)$). Например, матрица полуторалинейной формы преобразуется по закону $A_{i'j'}(e') = A_{ij}(e)\overline{\alpha^i_{i'}(e,e')}\alpha^j_{j'}(e,e')$.

Лекция 4. Общие сведения о линейных операторах

Замечание.

1. Пусть F_1, F_2 — функции. Тогда: $(F_2F_1)(x) = F_2\big(F_1(x)\big)$ при: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$.

2. Пусть: D_1 — множество, $I_1(x) = x$ при $x \in \mathrm{D}_1$; D_2 — множество, $I_2(x) = x$ при $x \in \mathrm{D}_2$; $F\colon D_1 \to D_2$. Очевидно: $FI_1 = F$, $I_2F = F$. Пусть F — обратимая функция. Очевидно: $FF^{-1} = I_2|_{\mathrm{R}(F)}$, $F^{-1}F = I_1|_{\mathrm{D}(F)}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; D — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть F_1, $F_2 \in \mathrm{Fun}(D, L)$. Тогда: $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x)$ при $x \in D$.
2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $F \in \mathrm{Fun}(D, L)$. Тогда: $(\lambda F)(x) = \lambda F(x)$ при $x \in D$.
3. Справедливо утверждение: $\mathrm{Fun}(D, L)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.
4. Пусть $F\colon D \to L$. Обозначим, $\ker(F) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) = \theta\big\}$. Множество $\ker(F)$ называют ядром функции F.

Определение. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \mathrm{Re}(\lambda) - i\,\mathrm{Im}(\lambda)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \lambda$. Пусть $\lambda \in \mathbb{Q}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \lambda$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — линейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1; $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.
2. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — полулинейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1; $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.
3. Обозначим через $\mathrm{lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \to L_2$, A — линейный оператор.
4. Обозначим через $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ *— подпространство пространства* $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\mathrm{Lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{Fun}(L_1, L_2)$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$. Покажем, что $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$, то $\mathrm{D}(\Theta)$ — подпространство пространства L_1.

   Пусть x, $y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x + y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y)$.

   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$.

3. Пусть A_1, $A_2 \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Покажем, что $A_1 + A_2 \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $A_1 + A_2\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = L_1$, то $\mathrm{D}(A_1 + A_2)$ — подпространство пространства L_1.

   Пусть x, $y \in L_1$. Тогда: $(A_1 + A_2)(x + y) = A_1(x + y) + A_2(x + y) = \big(A_1(x) + A_1(y)\big) + \big(A_2(x) + A_2(y)\big) = \big(A_1(x) + A_2(x)\big) + \big(A_1(y) + A_2(y)\big) = (A_1 + A_2)(x) + (A_1 + A_2)(y)$.

   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $(A_1 + A_2)(\lambda x) = A_1(\lambda x) + A_2(\lambda x) = \lambda A_1(x) + \lambda A_2(x) = \lambda\big(A_1(x) + A_2(x)\big) = \lambda(A_1 + A_2)(x)$.

4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Покажем, что $\alpha A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\alpha A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(\alpha A) = L_1$, то $\mathrm{D}(\alpha A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in L_1$. Тогда: $(\alpha A)(x+y) = \alpha A(x+y) = \alpha\big(A(x)+A(y)\big) = \alpha A(x)+\alpha A(y) = (\alpha A)(x)+(\alpha A)(y)$.

Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x)$. □

Утверждение (факультативный материал). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $\Theta(x) = \theta_2$ *при* $x \in L_1$*. Тогда:*

1. $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$*;*
2. $\Theta \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$*;*
3. $A_1 + A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = \mathrm{D}(A_1) \cap \mathrm{D}(A_2)$ *при* $A_1,\ A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*;*
4. $\alpha A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$ *при:* $\alpha \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$.

2. Очевидно: $\Theta\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$. Покажем, что $\Theta \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Так как $\mathrm{D}(\Theta) = L_1$, то $\mathrm{D}(\Theta)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x + y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$.

3. Пусть $A_1,\ A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $A_1 + A_2\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = \mathrm{D}(A_1) \cap \mathrm{D}(A_2)$. Покажем, что $A_1 + A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Так как $\mathrm{D}(A_1 + A_2) = \mathrm{D}(A_1) \cap \mathrm{D}(A_2)$, то $\mathrm{D}(A_1 + A_2)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$. Тогда: $(A_1 + A_2)(x + y) = A_1(x + y) + A_2(x + y) = \big(A_1(x) + A_1(y)\big) + \big(A_2(x) + A_2(y)\big) = \big(A_1(x) + A_2(x)\big) + \big(A_1(y) + A_2(y)\big) = (A_1 + A_2)(x) + (A_1 + A_2)(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$. Тогда: $(A_1 + A_2)(\lambda x) = A_1(\lambda x) + A_2(\lambda x) = \lambda A_1(x) + \lambda A_2(x) = \lambda\big(A_1(x) + A_2(x)\big) = \lambda(A_1 + A_2)(x)$.

4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $\alpha A\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$. Покажем, что $\alpha A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Так как $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(\alpha A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда: $(\alpha A)(x + y) = \alpha A(x + y) = \alpha\big(A(x) + A(y)\big) = \alpha A(x) + \alpha A(y) = (\alpha A)(x) + (\alpha A)(y)$.

Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда: $(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x)$. □

Замечание (примеры). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $I(x) = x$ при $x \in L$. Покажем, что $I \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Очевидно, $I\colon L \implies L$. Так как $\mathrm{D}(I) = L$, то $\mathrm{D}(I)$ — подпространство пространства L.

Пусть $x,\ y \in L$. Тогда: $I(x + y) = x + y = I(x) + I(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$.

2. Пусть: $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим: $\hat{A}(x) = Ax$ при $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Покажем, что $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$. Очевидно, $\hat{A}\colon \mathbb{K}^{N_1} \implies \mathbb{K}^{N_2}$. Так как $\mathrm{D}(\hat{A}) = \mathbb{K}^{N_1}$, то $\mathrm{D}(\hat{A})$ — подпространство пространства $\mathbb{K}^{N_1}$.

Пусть $x,\ y \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = \hat{A}(x) + \hat{A}(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\hat{A}(x)$. Оператор $\hat{A}$ называют оператором умножения на матрицу A.

3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Обозначим: $U_e(\tilde{x}) = \tilde{x}^j e_j$ при $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$. Покажем, что $U_e \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, L)$. Очевидно, $U_e\colon \mathbb{K}^N \implies L$. Так как $\mathrm{D}(U_e) = \mathbb{K}^N$, то $\mathrm{D}(U_e)$ — подпространство пространства $\mathbb{K}^N$.

Пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $U_e(\tilde{x}+\tilde{y}) = (\tilde{x}+\tilde{y})^j e_j = (\tilde{x}^j+\tilde{y}^j)e_j = \tilde{x}^j e_j+\tilde{y}^j e_j = U_e(\tilde{x})+U_e(\tilde{y})$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $U_e(\lambda\tilde{x}) = (\lambda\tilde{x})^j e_j = (\lambda\tilde{x}^j)e_j = \lambda(\tilde{x}^j e_j) = \lambda U_e(\tilde{x})$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*.*

1. *Справедливы утверждения:* $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$*,* $A\theta_1 = \theta_2$*.*
2. *Пусть:* Q *— подпространство пространства* L_2*. Тогда* $A^{-1}\{Q\}$ *— подпространство пространства* L_1*.*

3. *Пусть Q — подпространство пространства L_1. Тогда $A[Q]$ — подпространство пространства L_2.*

4. *Пусть Q — подпространство пространства L_1. Тогда: $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q$, $\ker(A|_Q) = \ker(A) \cap Q$.*

5. *Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.*

6. *Пусть $Q \subseteq L_1$. Тогда $\operatorname{rank}\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$.*

7. *Справедливы утверждения: $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$; $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1.*

Доказательство.

1. Так как $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$. Тогда: $A\theta_1 = A(0\theta_1) = 0A(\theta_1) = \theta_2$.

2. Очевидно, $A^{-1}\{Q\} \subseteq L_1$. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2 \in Q$, то $\theta_1 \in A^{-1}\{Q\}$.

Пусть x_1, $x_2 \in A^{-1}\{Q\}$. Тогда: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 \in Q$, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_2 \in Q$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \in Q$. Тогда $x_1 + x_2 \in A^{-1}\{Q\}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in A^{-1}\{Q\}$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax \in Q$. Следовательно: $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x) \in Q$. Тогда $\lambda x \in A^{-1}\{Q\}$.

3. Очевидно, $A[Q] \subseteq L_2$. Так как $\theta_1 \in \mathrm{D}(A) \cap Q$, то $A\theta_1 \in A[Q]$.

Пусть y_1, $y_2 \in A[Q]$. Тогда можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in \mathrm{D}(A) \cap Q$, $y_1 = Ax_1$, $x_2 \in \mathrm{D}(A) \cap Q$, $y_2 = Ax_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A) \cap Q$, $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$. Тогда $y_1 + y_2 \in A[Q]$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in A[Q]$. Тогда можно указать такой вектор x, что: $x \in \mathrm{D}(A) \cap Q$, $y = Ax$. Следовательно: $\lambda x \in \mathrm{D}(A) \cap Q$, $\lambda y = \lambda A(x) = A(\lambda x)$. Тогда $\lambda y \in A[Q]$.

4. Очевидно: $A|_Q : L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q$. Покажем, что $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Так как $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q$, то $\mathrm{D}(A|_Q)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q\,(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = A|_Q\,x + A|_Q\,y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q\,(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda\, A|_Q\,(x)$.

Очевидно:

$$\ker(A|_Q) = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(A|_Q) \wedge A|_Q\,x = \theta_2\bigr\} = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge x \in Q \wedge Ax = \theta_2\bigr\} = \bigl\{x \colon x \in \ker(A) \wedge x \in Q\bigr\} = \ker(A) \cap Q.$$

5. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, то можно указать такие числа $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, что: $C^i x_i = \theta_1$, $\exists i = \overline{1, r}(C^i \neq 0)$. Тогда: $C^i A(x_i) = A(C^i x_i) = A\theta_1 = \theta_2$. Итак, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.

6. Обозначим: $r_1 = \operatorname{rank}(Q)$, $r_2 = \operatorname{rank}\bigl(A[Q]\bigr)$. Тогда r_1, $r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Предположим, что $r_1 < r_2$. Тогда: $r_1 \in \mathbb{Z}_+$, $r_2 \in \overline{\mathbb{N}}$, $r_1 + 1 \leqslant r_2$. Так как r_2 — ранг множества $A[Q]$, то можно указать такие векторы $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$, что: $y_1, \ldots, y_{r_1+1} \in A[Q]$, $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы. Так как $y_1, \ldots, y_{r_1+1} \in A[Q]$, то можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$, что: $x_i \in \mathrm{D}(A) \cap Q$, $y_i = Ax_i$ при $i = \overline{1, r_1 + 1}$. Так как r_1 — ранг множества Q, то $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит выбору векторов $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$). Итак, $r_2 \leqslant r_1$.

7. Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\bigl[\mathrm{D}(A)\bigr]$, то $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2. Так как: $\mathrm{D}(A) \subseteq L_1$, $\mathrm{R}(A) = A\bigl[\mathrm{D}(A)\bigr]$, то $\operatorname{rank}\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant$

$\operatorname{rank}\big(\mathrm{D}(A)\big)$. Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$. Так как: $\{\theta_2\}$ — подпространство пространства L_2, $\ker(A) = A^{-1}\big\{\{\theta_2\}\big\}$, то $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*. Оператор* A *обратим тогда и только тогда, когда* $\ker(A) = \{\theta_1\}$*.*

Доказательство.

1. Пусть A — обратимый оператор. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, то $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \theta_2$. Так как: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \theta_2$, $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, A — обратимый оператор, то $x = \theta_1$. Итак, $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Пусть: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = Ax_2$. Тогда: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = \theta_2$. Следовательно, $x_1 - x_2 \in \ker(A)$. Так как $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то $x_1 - x_2 = \theta_1$. Тогда $x_1 = x_2$. Итак, A — обратимый оператор. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор.*

1. *Справедливы утверждения:* $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$*,* $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$*.*

2. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы. Тогда* $Ax_1, \ldots, Ax_r$ *— линейно независимые векторы.*

3. *Пусть* $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$*. Тогда* $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$*.*

4. *Справедливо утверждение:* $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $A^{-1}\colon L_2 \to L_1$, $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$. Покажем, что $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$. Так как $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{D}(A^{-1})$ — подпространство пространства L_2.

Пусть y_1, $y_2 \in \mathrm{D}(A^{-1})$. Тогда:

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}\Big(A\big(A^{-1}y_1\big) + A\big(A^{-1}y_2\big)\Big) =$$
$$A^{-1}\Big(A\big(A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2\big)\Big) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in \mathrm{D}(A^{-1})$. Тогда:

$$A^{-1}(\lambda y) = A^{-1}\Big(\lambda A\big(A^{-1}y\big)\Big) = A^{-1}\Big(A\big(\lambda A^{-1}(y)\big)\Big) = \lambda A^{-1}(y).$$

2. Так как: $x_i \in \mathrm{D}(A)$ при $i = \overline{1, r}$, то: $Ax_i \in \mathrm{D}(A^{-1})$, $x_i = A^{-1}(Ax_i)$ при $i = \overline{1, r}$. Предположим, что $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы (что противоречит условию). Итак, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно независимые векторы.

3. Так как $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то: $A[Q] \subseteq L_2$, $Q = A^{-1}\big[A[Q]\big]$. Тогда $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{rank}\big(A[Q]\big)$. Так как: $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$, $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{rank}\big(A[Q]\big)$, то $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$.

4. Так как: $\mathrm{D}(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{R}(A) = A\big[\mathrm{D}(A)\big]$, то $\operatorname{rank}\big(\mathrm{R}(A)\big) = \operatorname{rank}\big(\mathrm{D}(A)\big)$. Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$*. Тогда:* $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$.

Доказательство. Так как: $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$, то можно указать линейное дополнение Q подпространства $\ker(A)$ до подпространства $\mathrm{D}(A)$. Тогда: $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$, $\dim(Q) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$.

Очевидно: $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q = Q$, $\mathrm{R}(A|_Q) \subseteq \mathrm{R}(A)$, $\ker(A|_Q) = \ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$.

Покажем, что $\mathrm{R}(A|_Q) = \mathrm{R}(A)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда можно указать такой вектор x, что: $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Так как $\mathrm{D}(A) = \ker(A) \dotplus Q$, то можно указать такие векторы x_1, x_2, что: $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in Q$, $x = x_1 + x_2$. Тогда: $y = Ax = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \theta_2 + Ax_2 = Ax_2 = A|_Q\, x_2 \in \mathrm{R}(A|_Q)$. Итак, $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(A|_Q)$. Так как: $\mathrm{R}(A|_Q) \subseteq \mathrm{R}(A)$, $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(A|_Q)$, то $\mathrm{R}(A|_Q) = \mathrm{R}(A)$.

Так как $\ker(A|_Q) = \{\theta_1\}$, то $A|_Q$ — обратимый оператор. Тогда: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A|_Q)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A|_Q)\bigr) = \dim(Q) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$. □

Теорема (1-я теорема Фредгольма)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L_1) = \dim(L_2)$*,* $\dim(L_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда:* $\mathrm{R}(A) = L_2 \iff \ker(A) = \{\theta_1\}$.

Доказательство.

1. Пусть $\mathrm{R}(A) = L_2$. Так как $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$, то: $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim(L_1) - \dim(L_2) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.
2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда A — обратимый оператор. Следовательно: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) = \dim(L_1) = \dim(L_2)$. Так как $\dim(L_2) \neq +\infty$, то $\mathrm{R}(A) = L_2$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_1)$.

1. Обозначим, $\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr)$. Число $\mathrm{rank}(A)$ называют рангом оператора A. Очевидно: $\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim(L_2)$, $\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \leqslant \dim(L_1)$. Пусть $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$. Тогда: $\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$.
2. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = \theta_2, \\ x \in \mathrm{D}(A). \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, $\ker(A)$ — множество всех решений уравнения (1).

Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$. Тогда можно указать такие векторы $e_1, \ldots, e_m$, что $e_1, \ldots, e_m$ — базис подпространства $\ker(A)$. Следовательно, $\ker(A) = L(e_1, \ldots, e_m)$. Упорядоченный набор $(e_1, \ldots, e_m)$ называют фундаментальной совокупностью решений (ФСР) уравнения (1).

3. Пусть $y \in L_2$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = y, \\ x \in \mathrm{D}(A). \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через Q множество всех решений уравнения (2).

Пусть x_1, $x_2 \in Q$. **Покажем, что** $x_1 - x_2 \in \ker(A)$. Так как x_1, $x_2 \in Q$, то: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = y$, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_2 = y$. Тогда: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = \theta_2$. Следовательно, $x_1 - x_2 \in \ker(A)$.

Пусть: $x_0 \in Q$, $\tilde{x} \in \ker(A)$. **Покажем, что** $x_0 + \tilde{x} \in Q$. Так как: $x_0 \in Q$, $\tilde{x} \in \ker(A)$, то: $x_0 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_0 = y$, $\tilde{x} \in \mathrm{D}(A)$, $A\tilde{x} = \theta_2$. Тогда: $x_0 + \tilde{x} \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_0 + \tilde{x}) = Ax_0 + A\tilde{x} = y + \theta_2 = y$. Следовательно, $x_0 + \tilde{x} \in Q$.

Пусть $x_0 \in Q$. **Покажем, что** $Q = \{x_0\} + \ker(A)$. Пусть $x \in Q$. Так как x, $x_0 \in Q$, то: $x - x_0 \in \ker(A)$, $x = x_0 + (x - x_0)$. Тогда $x \in \{x_0\} + \ker(A)$. Пусть $x \in \{x_0\} + \ker(A)$. Тогда можно указать такой вектор $\tilde{x}$, что: $\tilde{x} \in \ker(A)$, $x = x_0 + \tilde{x}$. Так как: $x_0 \in Q$, $\tilde{x} \in \ker(A)$, $x = x_0 + \tilde{x}$, то $x \in Q$.

Пусть $y \notin \mathrm{R}(A)$. Тогда $Q = \varnothing$.

Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда можно указать такой вектор x_0, что $x_0 \in Q$.

Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда: $Q = \{x_0\} + \ker(A) = \{x_0\} + \{\theta_1\} = \{x_0\}$.

Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$; e — базис подпространства $\ker(A)$. Тогда: $Q = \{x_0\} + \ker(A) = \{x_0\} + L(e_1, \ldots, e_m)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $BA \in \mathrm{Lin}(L_1, L_3)$*.*
2. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B_1, B_2 \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$*.*
3. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$*.*
4. *Пусть:* $A_1, A_2 \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$*.*
5. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $BA\colon L_1 \implies L_3$. Так как: $\mathrm{D}(BA) = L_1$, то $\mathrm{D}(BA)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда: $(BA)(x+y) = B\bigl(A(x+y)\bigr) = B\bigl(Ax + Ay\bigr) = B(Ax) + B(Ay) = (BA)x + (BA)y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $(BA)(\lambda x) = B\bigl(A(\lambda x)\bigr) = B\bigl(\lambda A(x)\bigr) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x)$.

2. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\bigl((B_1 + B_2)A\bigr)x = (B_1 + B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x$.

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\bigl((\lambda B)A\bigr)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \bigl(\lambda(BA)\bigr)x$.

4. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\bigl(B(A_1 + A_2)\bigr)x = B\bigl((A_1 + A_2)x\bigr) = B\bigl(A_1x + A_2x\bigr) = B(A_1x) + B(A_2x) = (BA_1)x + (BA_2)x = (BA_1 + BA_2)x$.

5. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $\bigl(B(\lambda A)\bigr)x = B\bigl((\lambda A)x\bigr) = B\bigl(\lambda A(x)\bigr) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \bigl(\lambda(BA)\bigr)x$. □

Утверждение (факультативный материал)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть:* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда:* $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$*,* $\mathrm{D}(BA) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \land Ax \in \mathrm{D}(B)\bigr\}$*.*
2. *Пусть:* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* B_1*,* $B_2 \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда:* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$*.*
3. *Пусть:* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$*.*

4. *Пусть:* $A_1,\ A_2 \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда:* $\mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \subseteq \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$, $BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2)|_{\mathrm{D}(BA_1+BA_2)}$.

5. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда:* $\mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big) \subseteq \mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big)$, $\lambda(BA) = B(\lambda A)|_{\mathrm{D}(\lambda(BA))}$.

6. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.

1. Очевидно: $BA\colon L_1 \to L_3$, $\mathrm{D}(BA) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\}$. Покажем, что $BA \in \operatorname{lin}(L_1, L_3)$. Так как: $\mathrm{D}(B)$ — подпространство пространства L_2, $\mathrm{D}(BA) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = A^{-1}\big\{\mathrm{D}(B)\big\}$, то $\mathrm{D}(BA)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in \mathrm{D}(BA)$. Тогда: $(BA)(x+y) = B\big(A(x+y)\big) = B\big(Ax + Ay\big) = B(Ax) + B(Ay) = (BA)x + (BA)y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(BA)$. Тогда: $(BA)(\lambda x) = B\big(A(\lambda x)\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x)$.

2. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((B_1 + B_2)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1 + B_2)\big\} =$$
$$\big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_2)\big\} =$$
$$\big\{x\colon x \in \mathrm{D}(B_1 A) \wedge x \in \mathrm{D}(B_2 A)\big\} = \mathrm{D}(B_1 A + B_2 A).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((B_1 + B_2)A\big)$. Тогда: $\big((B_1 + B_2)A\big)x = (B_1 + B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1 A)x + (B_2 A)x = (B_1 A + B_2 A)x$.

3. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((\lambda B)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(\lambda B)\big\} =$$
$$\big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\lambda B)A\big)$. Тогда: $\big((\lambda B)A\big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x$.

4. Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(BA_1)$, $x \in \mathrm{D}(BA_2)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $A_1 x \in \mathrm{D}(B)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_2 x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_1 x + A_2 x \in \mathrm{D}(B)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$, $(A_1 + A_2)x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда $x \in \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$. Итак, $\mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \subseteq \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$.

Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $(BA_1 + BA_2)x = (BA_1)x + (BA_2)x = B(A_1 x) + B(A_2 x) = B\big(A_1 x + A_2 x\big) = B\big((A_1 + A_2)x\big) = \big(B(A_1 + A_2)\big)x$.

5. Пусть $x \in \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big)$. Тогда $x \in \mathrm{D}(BA)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax \in \mathrm{D}(B)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $\lambda A(x) \in \mathrm{D}(B)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(\lambda A)$, $(\lambda A)x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда $x \in \mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big)$. Итак, $\mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big) \subseteq \mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big)$.

Пусть $x \in \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big)$. Тогда: $\big(\lambda(BA)\big)x = \lambda(BA)(x) = \lambda B(Ax) = B\big(\lambda A(x)\big) = B\big((\lambda A)x\big) = \big(B(\lambda A)\big)x$.

6. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(\lambda A) \wedge (\lambda A)x \in \mathrm{D}(B)\big\} =$$
$$\big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge \lambda A(x) \in \mathrm{D}(B)\big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} =$$
$$\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big)$. Тогда: $\big(B(\lambda A)\big)x = B\big((\lambda A)x\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x$. $\square$

Лекция 5. Матрица линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Обозначим: $[A]^j_i(f,e) = [Ae_i]^j(f)$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Матрицу $[A](f,e)$ называют матрицей линейного (полулинейного) оператора A в базисах f, e.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A\colon L \implies L$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]^j_i(e) = [Ae_i]^j(e)$ при i, $j = \overline{1, N}$. Матрицу $[A](e)$ называют матрицей линейного (полулинейного) оператора A в базисе e.

Замечание (примеры). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. **Покажем, что** $[\Theta](f,e) = \tilde{\Theta}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда: $[\Theta]^j_i(f,e) = [\Theta e_i]^j(f) = [\theta_2]^j(f) = 0$.
2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, f — базисы пространства L. **Покажем, что** $[I](f,e) = \alpha(f,e)$. Пусть i, $j = \overline{1, N}$. Тогда: $[I]^j_i(f,e) = [Ie_i]^j(f) = [e_i]^j(f) = \alpha^j_i(f,e)$.
3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Тогда: $[I](e) = [I](e,e) = \alpha(e,e) = \tilde{I}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $Q = [A](f,e)$*. Тогда:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q^j_i [x]^i(e) f_j$ *при* $x \in L_1$*.*
2. *Пусть:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q^j_i [x]^i(e) f_j$ *при* $x \in L_1$*. Тогда:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $Q = [A](f,e)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e) e_i\big) = [x]^i(e) A(e_i) = [x]^i(e)\big(Q^j_i f_j\big) = Q^j_i [x]^i(e) f_j.$$

2. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q^j_i [x+y]^i(e) f_j = Q^j_i\big([x]^i(e) + [y]^i(e)\big) f_j = Q^j_i [x]^i(e) f_j + Q^j_i [y]^i(e) f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q^j_i [\lambda x]^i(e) f_j = Q^j_i\big(\lambda [x]^i(e)\big) f_j = \lambda\big(Q^j_i [x]^i(e) f_j\big) = \lambda A(x).$$

Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$Ae_i = Q^j_k [e_i]^k(e) f_j = Q^j_k \delta^k_i f_j = Q^j_i f_j.$$

Следовательно: $[A]^j_i(f,e) = Q^j_i$ при $j = \overline{1, N_2}$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. *Пусть:* $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— полулинейный оператор,* $Q = [A](f,e)$*. Тогда:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j$ *при* $x \in L_1$*.*

2. *Пусть:* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $Ax = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j$ *при* $x \in L_1$*. Тогда:* $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— полулинейный оператор,* $Q = [A](f,e)$*.*

Доказательство.
1. Очевидно, $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e) e_i\big) = \overline{[x]^i(e)} A(e_i) = \overline{[x]^i(e)} \big(Q_i^j f_j\big) = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j.$$

2. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1.
Пусть $x, y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j \overline{[x+y]^i(e)} f_j = Q_i^j \big(\overline{[x]^i(e)} + \overline{[y]^i(e)}\big) f_j = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j + Q_i^j \overline{[y]^i(e)} f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j \overline{[\lambda x]^i(e)} f_j = Q_i^j \big(\overline{\lambda} \cdot \overline{[x]^i(e)}\big) f_j = \overline{\lambda}\big(Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j\big) = \overline{\lambda} A(x).$$

Итак, A — полулинейный оператор.
Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$Ae_i = Q_k^j \overline{[e_i]^k(e)} f_j = Q_k^j \delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Следовательно: $[A]_i^j(f,e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $Q = [A](e,f)$.
1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j = \big(Q[x](e)\big)^j f_j = U_f\big(\hat{Q}(U_e^{-1} x)\big) = (U_f \hat{Q} U_e^{-1}) x.$$

Итак, $A = U_f \hat{Q} U_e^{-1}$.
2. Очевидно:

$$\mathrm{R}(A) = A[L_1] = (U_f \hat{Q} U_e^{-1})[L_1] = U_f\Big[\hat{Q}\big[U_e^{-1}[L_1]\big]\Big] = U_f\Big[\hat{Q}\big[\mathbb{K}^{N_1}\big]\Big] =$$
$$U_f\Big[\big\{Q\tilde{x}\colon \tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1}\big\}\Big] = U_f\Big[\big\{Q_i \tilde{x}^i\colon \tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1}\big\}\Big] =$$
$$U_f\big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big] = L(U_f Q_1, \ldots, U_f Q_{N_1}).$$

Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\Big(U_f\big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big]\Big) =$$
$$\dim\big(L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big) = \mathrm{rank}(Q).$$

3. Очевидно:

$$\ker(A) = A^{-1}\big\{\{\theta_2\}\big\} = (U_f \hat{Q} U_e^{-1})^{-1}\big\{\{\theta_2\}\big\} =$$
$$(U_e^{-1})^{-1}\Big\{\hat{Q}^{-1}\Big\{U_f^{-1}\big\{\{\theta_2\}\big\}\Big\}\Big\} = U_e\Big[\hat{Q}^{-1}\big\{\{\tilde{\theta}_2\}\big\}\Big] = U_e\big[\ker(\hat{Q})\big].$$

Пусть $N_1 = N_2$. **Покажем, что:** $\ker(A) = \{\theta_1\} \iff \det(Q) \neq 0$.
Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда: $\ker(\hat{Q}) = U_e^{-1}\big[\ker(A)\big] = \{\tilde{\theta}\}$. Следовательно, $\det(Q) \neq 0$.
Пусть $\det(Q) \neq 0$. Тогда $\ker(\hat{Q}) = \{\tilde{\theta}\}$. Следовательно: $\ker(A) = U_e\big[\ker(\hat{Q})\big] = \{\theta\}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$.

Обозначим: $e_1 = \{\delta_1^j\}^{j=\overline{1,N_1}}, \ldots, e_{N_1} = \{\delta_{N_1}^j\}^{j=\overline{1,N_1}}$. Тогда: e — базис пространства $\mathbb{K}^{N_1}$, $U_e = I_1$.

Обозначим: $f_1 = \{\delta_1^j\}^{j=\overline{1,N_2}}, \ldots, f_{N_2} = \{\delta_{N_2}^j\}^{j=\overline{1,N_2}}$. Тогда: f — базис пространства $\mathbb{K}^{N_2}$, $U_f = I_2$.

Обозначим, $Q = [A](f,e)$. Тогда: $A = U_f \hat{Q} U_e^{-1} = \hat{Q}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. *Пусть:* A, $B \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = [B](f,e)$. *Тогда* $A = B$.
2. *Пусть* $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. *Тогда можно указать такой оператор* A, *что:* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = Q$.
3. *Пусть* A, $B \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. *Тогда* $[A+B](f,e) = [A](f,e) + [B](f,e)$.
4. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. *Тогда* $[\lambda A](f,e) = \lambda [A](f,e)$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e) f_j = [B]_i^j(f,e)[x]^i(e) f_j = Bx.$$

2. Обозначим: $Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](e,f) = Q$.
3. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$(A+B)e_i = Ae_i + Be_i = [A]_i^j(f,e) f_j + [B]_i^j(f,e) f_j = \big([A]_i^j(f,e) + [B]_i^j(f,e)\big) f_j.$$

Следовательно: $[A+B]_i^j = [A]_i^j(f,e) + [B]_i^j(f,e)$ при $j = \overline{1, N_2}$.

4. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$(\lambda A)e_i = \lambda A(e_i) = \lambda\big([A]_i^j(f,e) f_j\big) = \big(\lambda [A]_i^j(f,e)\big) f_j.$$

Следовательно: $[\lambda A]_i^j = \lambda [A]_i^j(f,e)$ при $j = \overline{1, N_2}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$.

Пусть: e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Обозначим: $\varphi(A) = [A](f,e)$ при $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства $\operatorname{Lin}(L_1, L_2)$ на пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $\dim\big(\operatorname{Lin}(L_1, L_2)\big) = \dim(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}) = N_1 N_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* L_3 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_3 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_3) = N_3$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \operatorname{Lin}(L_2, L_3)$*,* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*,* g *— базис пространства* L_3*. Тогда* $[BA](g,e) = [B](g,f)[A](f,e)$*.*

Доказательство. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$(BA)e_i = B(Ae_i) = B\big([A]_i^j(f,e) f_j\big) = [A]_i^j(f,e) B(f_j) = [A]_i^j(f,e)\big([B]_j^k(g,f) g_k\big) = \big([B]_j^k(g,f)[A]_i^j(f,e)\big) g_k.$$

Следовательно: $[BA]_i^k(g,e) = [B]_j^k(g,f)[A]_i^j(f,e)$ при $k = \overline{1, N_3}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* e*,* e' *— базисы пространства* L_1*,* f*,* f' *— базисы пространства* L_2*. Тогда:* $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f, e)\alpha(e, e')$ $\big([A]^{j'}_{i'}(f', e') = \alpha^{j'}_j(f', f)[A]^j_i(f, e)\alpha^i_{i'}(e, e')$ *при:* $i' = \overline{1, N_1}$*,* $j' = \overline{1, N_2}\big)$*.*

Доказательство. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]^{j'}_{i'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha^i_{i'}(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \alpha^i_{i'}(e, e')[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$\alpha^i_{i'}(e, e')\big(\alpha^{j'}_j(f', f)[Ae_i]^j(f)\big) = \alpha^{j'}_j(f', f)[A]^j_i(f, e)\alpha^i_{i'}(e, e').$$

□

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— полулинейный оператор,* e*,* e' *— базисы пространства* L_1*,* f*,* f' *— базисы пространства* L_2*. Тогда:* $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f, e)\overline{\alpha(e, e')}$ $\big([A]^{j'}_{i'}(f', e') = \alpha^{j'}_j(f', f)[A]^j_i(f, e)\overline{\alpha^i_{i'}(e, e')}$ *при:* $i' = \overline{1, N_1}$*,* $j' = \overline{1, N_2}\big)$*.*

Доказательство. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]^{j'}_{i'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha^i_{i'}(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \overline{\alpha^i_{i'}(e, e')}[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$\overline{\alpha^i_{i'}(e, e')}\big(\alpha^{j'}_j(f', f)[Ae_i]^j(f)\big) = \alpha^{j'}_j(f', f)[A]^j_i(f, e)\overline{\alpha^i_{i'}(e, e')}.$$

□

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$.

Пусть f — базис пространства L_2. Очевидно, $\big\{[A](f, e)\big\}_e \in (TL_1)^0_1$.

Пусть e — базис пространства L_1. Очевидно, $\big\{[A](f, e)\big\}_f \in (TL_2)^1_0$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

Очевидно, $\big\{[A](e)\big\}_e \in (TL)^1_1$. Тогда: $\operatorname{tr}\big([A](e')\big) = \operatorname{tr}\big([A](e)\big)$, $\det\big([A](e')\big) = \det\big([A](e)\big)$ при: e, e' — базисы пространства L. Выберем базис e_0 пространства L. Обозначим: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big([A](e_0)\big)$, $\det(A) = \det\big([A](e_0)\big)$. Тогда: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big([A](e)\big)$, $\det(A) = \det\big([A](e)\big)$ при: e — базис пространства L.

Лекция 6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

6.1. Инвариантные подпространства линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L, L)$. Будем говорить, что Q — инвариантное подпространство оператора A, если: Q — подпространство пространства L, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q] \subseteq Q$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — инвариантные подпространства оператора A. **Покажем, что** $Q_1 + \cdots + Q_r$ — инвариантное подпространство оператора A. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L, то $Q_1 + \cdots + Q_r$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_r$, что: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Так как: $Q_k \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q_k] \subseteq Q_k$ при $k = \overline{1, r}$, то: $x = x_1 + \cdots + x_r \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = A(x_1 + \cdots + x_r) = Ax_1 + \cdots + Ax_r \in Q_1 + \cdots + Q_r$.

2. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L, L)$, Q — инвариантное подпространство оператора A. **Очевидно,** $A|_Q \in \operatorname{Lin}(Q, Q)$.

3. Пусть A, $B \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Обозначим, $[A, B] = AB - BA$. Оператор $[A, B]$ называют коммутатором операторов A и B. Очевидно, $[A, B] = \Theta \iff AB = BA$. Будем говорить, что операторы A и B коммутируют, если $AB = BA$.

Пусть $AB = BA$. **Покажем, что** $\ker(B)$, $\mathrm{R}(B)$ — инвариантные подпространства оператора A. Очевидно, $\ker(B)$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in \ker(B)$. Тогда: $x \in L$, $Bx = \theta$. Следовательно: $Ax \in L$, $B(Ax) = A(Bx) = A\theta = \theta$. Тогда $Ax \in \ker(B)$. Очевидно, $\mathrm{R}(B)$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in \mathrm{R}(B)$. Тогда можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $x = Bu$. Следовательно: $Au \in L$, $Ax = A(Bu) = B(Au)$. Тогда $Ax \in \mathrm{R}(B)$.

4. Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$; $r = \overline{1, N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $Q = L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$.

Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. **Покажем, что:** $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Пусть: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Так как $e_{i_k} \in Q$, то $Ae_{i_k} \in Q$. Тогда: $\tilde{A}^j_{i_k} = [Ae_{i_k}]^j(e) = 0$.

Пусть: $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. **Покажем, что** Q — инвариантное подпространство оператора A. Очевидно, Q — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$Ax = \tilde{A}^j_n [x]^n(e) e_j = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}^j_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_j = \sum_{k,m=\overline{1,r}} \tilde{A}^{i_m}_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_{i_m} \in Q.$$

5. Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$; $r = \overline{1, N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $Q = L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$, Q — инвариантное подпространство оператора A. **Покажем, что:** $[A|_Q]^m_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \tilde{A}^{i_m}_{i_k}$ при k, $m = \overline{1, r}$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$A|_Q \, e_{i_k} = Ae_{i_k} = \tilde{A}^j_{i_k} e_j = \sum_{m=1}^{r} \tilde{A}^{i_m}_{i_k} e_{i_m}.$$

Следовательно: $[A|_Q]^m_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \tilde{A}^{i_m}_{i_k}$ при $m = \overline{1, r}$.

6.2. Собственные подпространства линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$.

1. Будем говорить, что λ — регулярная точка оператора A, если: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A - \lambda I) = \{\theta\}$, $\mathrm{R}(A - \lambda I) = L$.

2. Будем говорить, что λ — точка спектра оператора A, если: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\} \vee \mathrm{R}(A - \lambda I) \neq L$.

3. Будем говорить, что λ — точка непрерывного спектра оператора A, если: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A - \lambda I) = \{\theta\}$, $\mathrm{R}(A - \lambda I) \neq L$.

4. Будем говорить, что λ — собственное значение оператора A (λ — точка дискретного спектра оператора A), если: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\}$. **Очевидно, λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда: $\lambda \in \mathbb{K}$; можно указать такой вектор x, что: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$.**

5. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если: $x \in \ker(A - \lambda I)$, $x \neq \theta$. **Очевидно, x является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ тогда и только тогда, когда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$.**

6. Пусть λ — собственное значение оператора A. Обозначим, $H_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$. Очевидно: $H_A(\lambda)$ — подпространство пространства L, $H_A(\lambda) = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = \lambda x\big\}$. Подпространство $H_A(\lambda)$ называют собственным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ.

7. Пусть λ — собственное значение оператора A. Обозначим, $g_A(\lambda) = \dim\big(H_A(\lambda)\big)$. Очевидно, $g_A(\lambda) \in \overline{\mathbb{N}}$. Число $g_A(\lambda)$ называют геометрической кратностью собственного значения λ.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $\dim(L) \neq +\infty$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A - \lambda I) = \{\theta\}$. Согласно 1-й теореме Фредгольма, так как: $\dim(L) \neq +\infty$, $A - \lambda I \in \mathrm{Lin}(L, L)$, $\ker(A - \lambda I) = \{\theta\}$, то $\mathrm{R}(A - \lambda I) = L$.

2. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, λ — собственное значение оператора A. **Покажем, что** $H_A(\lambda)$ — инвариантное подпространство оператора A. Очевидно: $H_A(\lambda)$ — подпространство пространства L, $H_A(\lambda) \subseteq \mathrm{D}(A)$. Пусть $x \in H_A(\lambda)$. Тогда: $Ax = \lambda x \in H_A(\lambda)$.

3. Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$; $i = \overline{1, N}$.

Пусть: λ — собственное значение оператора A, e_i — соответствующий собственный вектор. **Покажем, что:** $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{A}_i^j = \lambda \delta_i^j$ при $j = \overline{1, N}$. Очевидно, $\lambda \in \mathbb{K}$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда: $\tilde{A}_i^j = [Ae_i]^j(e) = [\lambda e_i]^j(e) = \lambda [e_i]^j(e) = \lambda \delta_i^j$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{A}_i^j = \lambda \delta_i^j$ при $j = \overline{1, N}$. **Покажем, что:** λ — собственное значение оператора A, e_i — соответствующий собственный вектор. Очевидно: $e_i \in L$, $e_i \neq \theta$, $Ae_i = \tilde{A}_i^j e_j = (\lambda \delta_i^j) e_j = \lambda e_i$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные собственные значения оператора A, $H_1, \ldots, H_r$ — соответствующие собственные подпространства. Тогда $H_1, \ldots, H_r$ — линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Пусть $r = 1$. Очевидно, H_1 — линейно независимое подпространство.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Покажем, что утверждение справедливо при $r = r_0 + 1$. Пусть: $x_1 \in H_1, \ldots, x_{r_0+1} \in H_{r_0+1}$, $x_1 + \cdots + x_{r_0+1} = \theta$. Тогда:

$$(A - \lambda_{r_0+1} I) \sum_{k=1}^{r_0+1} x_k = (A - \lambda_{r_0+1} I)\theta,$$

$$\sum_{k=1}^{r_0} (\lambda_k - \lambda_{r_0+1}) x_k = \theta.$$

Так как $H_1, \ldots, H_{r_0}$ — линейно независимые подпространства, то: $(\lambda_k - \lambda_{r_0+1}) x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как: $\lambda_k \neq \lambda_{r_0+1}$ при $k = \overline{1, r_0}$, то: $x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как $x_1 + \cdots + x_{r_0+1} = \theta$, то $x_{r_0+1} = \theta$. $\square$

6.3. Характеристический полином линейного оператора

Замечание. Пусть Q — конечное множество. Обозначим через $\operatorname{card}(Q)$ количество элементов множества Q.

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть F — полином на $\mathbb{K}$. Обозначим через $\deg(F)$ степень полинома F.
2. Будем говорить, что $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, если для любой функции F, удовлетворяющей условиям: F — полином на $\mathbb{K}$, $\deg(F) \neq 0$, справедливо утверждение $\exists \lambda \big(\lambda \in \mathbb{K} \wedge F(\lambda) = 0\big)$.
3. **Основная теорема алгебры: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле.** Очевидно, поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ не являются алгебраически замкнутыми.
4. Пусть F — полином на $\mathbb{K}$. Обозначим, $N = \deg(F)$. Тогда $N \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $a_0, \ldots, a_N$ коэффициенты полинома F. Тогда: $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $F(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \lambda^k$ при $\lambda \in \mathbb{K}$.

   Обозначим: $\tilde{F}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \lambda^k$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда: $\tilde{F}$ — полином на $\mathbb{C}$, $\deg(\tilde{F}) = N$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\tilde{F}$, $\tilde{F}(\lambda) = F(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Будем говорить, что $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на $\mathbb{C}$.
5. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F — полином на $\mathbb{K}$. Обозначим, $N = \deg(F)$. Тогда $N \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $a_0, \ldots, a_N$ коэффициенты полинома F. Тогда: $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $F(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \lambda^k$ при $\lambda \in \mathbb{K}$.

   Обозначим: $\hat{F}(B) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k B^k$ при $B \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Тогда: $\hat{F}$ — полином на $\operatorname{Lin}(L, L)$, $\deg(\hat{F}) = N$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\hat{F}$. Будем говорить, что $\hat{F}$ — продолжение полинома F на $\operatorname{Lin}(L, L)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

1. Обозначим: $F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det\big([A - \lambda I](e)\big) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = \det(\tilde{A}_1 - \lambda \tilde{I}_1, \ldots, \tilde{A}_N - \lambda \tilde{I}_N).$$

Обозначим: $X_{n,0} = \tilde{A}_n$, $X_{n,1} = \tilde{I}_n$ при $n = \overline{1, N}$. Обозначим через μ множество всех функций σ, удовлетворяющих условию $\sigma\colon \{1, \ldots, N\} \implies \{0, 1\}$. Пусть $k = \overline{0, N}$. Обозначим через

μ_k множество всех функций σ, удовлетворяющих условиям: $\sigma\colon \{1,\ldots,N\} \implies \{0,1\}$, $\sigma(1)+\cdots+\sigma(N)=k$. Тогда:

$$F_A(\lambda)=\sum_{\sigma\in\mu}\det(X_{1,\sigma(1)},\ldots,X_{N,\sigma(N)})(-\lambda)^{\sigma(1)+\cdots+\sigma(N)}=$$
$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{\sigma\in\mu_k}\det(X_{1,\sigma(1)},\ldots,X_{N,\sigma(N)})(-\lambda)^k=$$
$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\Bigg(\sum_{\sigma\in\mu_k}\det(X_{1,\sigma(1)},\ldots,X_{N,\sigma(N)})\Bigg)\lambda^k.$$

Обозначим: $a_k=(-1)^k\sum\limits_{\sigma\in\mu_k}\det(X_{1,\sigma(1)},\ldots,X_{N,\sigma(N)})$ при $k=\overline{0,N}$. Тогда:

$$F_A(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}a_k\lambda^k;$$
$$a_0=\det(\tilde A_1,\ldots,\tilde A_N)=\det(\tilde A);$$
$$a_{N-1}=(-1)^{N-1}\sum_{n=1}^{N}\det(\tilde I_1,\ldots,\tilde I_{n-1},\tilde A_n,\tilde I_{n+1},\ldots,\tilde I_N)=(-1)^{N-1}\sum_{n=1}^{N}\tilde A_n^n=(-1)^{N-1}\operatorname{tr}(\tilde A);$$
$$a_N=(-1)^N\det(\tilde I_1,\ldots,\tilde I_N)=(-1)^N\neq 0.$$

Очевидно: F_A — полином на $\mathbb{K}$, $\deg(F_A)=N$, $a_0,\ldots,a_N$ — коэффициенты полинома F_A. Полином F_A называют характеристическим полиномом оператора A. Обозначим через $a_0(A),\ldots,a_N(A)$ коэффициенты полинома F_A. Тогда: $a_0(A)=\det(\tilde A)$, $a_{N-1}(A)=(-1)^{N-1}\operatorname{tr}(\tilde A)$, $a_N(A)=(-1)^N$.

2. Пусть $\tilde F_A$ — продолжение полинома F_A на $\mathbb{C}$. Пусть $\lambda\in\mathbb{C}$. Тогда:

$$\tilde F_A(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}a_k(A)\lambda^k=\det(\tilde A-\lambda\tilde I).$$

3. Пусть $\lambda\in\mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda)=\det(\tilde A-\lambda\tilde I)=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\big(\tilde A_1^{\sigma(1)}-\lambda\delta_1^{\sigma(1)}\big)\cdots\big(\tilde A_N^{\sigma(N)}-\lambda\delta_N^{\sigma(N)}\big)=$$
$$\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\big(\tilde A_1^{\sigma(1)}1-\delta_1^{\sigma(1)}\lambda\big)\cdots\big(\tilde A_N^{\sigma(N)}1-\delta_N^{\sigma(N)}\lambda\big).$$

Пусть $\hat F_A$ — продолжение полинома F_A на $\operatorname{Lin}(L,L)$. Пусть $B\in\operatorname{Lin}(L,L)$. Тогда:

$$\hat F_A(B)=\sum_{k=0}^{N}a_k(A)B^k=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)\big(\tilde A_1^{\sigma(1)}I-\delta_1^{\sigma(1)}B\big)\cdots\big(\tilde A_N^{\sigma(N)}I-\delta_N^{\sigma(N)}B\big).$$

4. Обозначим через S_A множество всех собственных значений оператора A. **Покажем, что** $S_A=\big\{\lambda\colon \lambda\in\mathbb{K}\wedge F_A(\lambda)=0\big\}$. Пусть $\lambda\in S_A$. Тогда: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$. Следовательно: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\det\big([A-\lambda I](e)\big)=0$. Тогда: $\lambda\in\mathbb{K}$, $F_A(\lambda)=0$. Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $F_A(\lambda)=0$. Тогда: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\det\big([A-\lambda I](e)\big)=0$. Следовательно: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$. Тогда $\lambda\in S_A$.

Обозначим, $\tilde{S}_A = \big\{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{C} \wedge \tilde{F}_A(\lambda) = 0\big\}$. Так как $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, то: $S_A = \big\{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \tilde{F}_A(\lambda) = 0\big\} = \big\{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \lambda \in \mathbb{C} \wedge \tilde{F}_A(\lambda) = 0\big\} = \tilde{S}_A \cap \mathbb{K}$. Очевидно: $S_A \subseteq \tilde{S}_A$, $S_A = \tilde{S}_A \iff \tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$.

Пусть $\lambda \in \tilde{S}_A$. Обозначим через $m_A(\lambda)$ кратность числа λ как корня полинома $\tilde{F}_A$. Тогда $m_A(\lambda) \in \mathbb{N}$. Пусть $\lambda \in S_A$. В этом случае число $m_A(\lambda)$ называют алгебраической кратностью собственного значения λ.

Так как $\deg(\tilde{F}_A) = N$, то: $\operatorname{card}(S_A) \leqslant \operatorname{card}(\tilde{S}_A) \leqslant N$; если $\tilde{S}_A \neq \varnothing$, то $\sum\limits_{\lambda \in \tilde{S}_A} m_A(\lambda) \leqslant N$; если $S_A \neq \varnothing$, то: $\sum\limits_{\lambda \in S_A} m_A(\lambda) \leqslant \sum\limits_{\lambda \in \tilde{S}_A} m_A(\lambda) \leqslant N$.

Пусть $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, тогда: $\tilde{S}_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \tilde{S}_A} m_A(\lambda) = N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, $\lambda \in S_A$. *Тогда* $g_A(\lambda) \leqslant m_A(\lambda)$.

Доказательство. Обозначим: $H = H_A(\lambda)$, $g = g_A(\lambda)$, $m = m_A(\lambda)$. Очевидно, $g = \overline{1, N}$. Так как $g \in \mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_1, \dots, e_g$, что $e_1, \dots, e_g$ — базис подпространства H.

Пусть $g = N$. Тогда $e_1, \dots, e_g$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Тогда: $\tilde{A}^j_i = \lambda\delta^j_i$ при i, $j = \overline{1, g}$. Следовательно: $F_A\big(\tilde{\lambda}\big) = \big(\lambda - \tilde{\lambda}\big)^g$ при $\tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$. Тогда $m = g$.

Пусть $g \neq N$. Так как: g, $N \in \mathbb{N}$, $g < N$, то можно указать такие векторы $e_{g+1}, \dots, e_N$, что $e_1, \dots, e_N$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Тогда: $\tilde{A}^j_i = \lambda\delta^j_i$ при: $i = \overline{1, g}$, $j = \overline{1, N}$. Следовательно: $F_A\big(\tilde{\lambda}\big) = \big(\lambda - \tilde{\lambda}\big)^g \det\Big(\big\{\tilde{A}^{g+j}_{g+i} - \tilde{\lambda}\delta^{g+j}_{g+i}\big\}^{j=\overline{1,N-g}}_{i=\overline{1,N-g}}\Big)$ при $\tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$. Тогда $m \geqslant g$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{N}$, *Q_k — подпространство пространства L*, $N_k \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_k) = N_k$ *при* $k = \overline{1, r}$; *$Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Справедливы утверждения:*

1. $L = Q_1 + \dots + Q_r \iff N = N_1 + \dots + N_r$;
2. $L = Q_1 + \dots + Q_r$ *тогда и только тогда, когда существуют такие векторы* $e_1, \dots, e_N$, *что:* $e_1, \dots, e_N$ *— базис пространства* L, $e_1, \dots, e_N \in Q_1 \cup \dots \cup Q_r$.

Доказательство.

1. Пусть $L = Q_1 + \dots + Q_r$. Тогда $N = \dim(Q_1 + \dots + Q_r)$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $N = \dim(Q_1 + \dots + Q_r) = N_1 + \dots + N_r$.

Пусть $N = N_1 + \dots + N_r$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\dim(Q_1 + \dots + Q_r) = N_1 + \dots + N_r = N$. Так как $N \neq +\infty$, то $L = Q_1 + \dots + Q_r$.

2. Пусть $L = Q_1 + \dots + Q_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как $N_k \in \mathbb{N}$, то можно указать такие векторы $e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k}$, что $e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k. Так как $e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k} \in Q_k$, то $e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k} \in Q_1 \cup \dots \cup Q_r$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1}, \dots, e_{1,N_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \dots + Q_r$. Так как $L = Q_1 + \dots + Q_r$, то $e_{1,1}, \dots, e_{1,N_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,N_r}$ — базис пространства L.

Пусть: $e_1, \dots, e_N$ — базис пространства L, $e_1, \dots, e_N \in Q_1 \cup \dots \cup Q_r$. Так как $e_1, \dots, e_N \in Q_1 \cup \dots \cup Q_r$, то $e_1, \dots, e_N \in Q_1 + \dots + Q_r$. Тогда $L(e_1, \dots, e_N) \subseteq Q_1 + \dots + Q_r$. Так как $e_1, \dots, e_N$ — базис пространства L, то: $L = L(e_1, \dots e_N) \subseteq Q_1 + \dots + Q_r$. Так как: $L \subseteq Q_1 + \dots + Q_r$, $Q_1 + \dots + Q_r \subseteq L$, то $L = Q_1 + \dots + Q_r$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*.*

1. Пусть: $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$*. Тогда:* $S_A \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in S_A} m_A(\lambda) = N$*.*

2. Пусть: $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$*,* $\forall \lambda \in S_A \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*. Тогда:* $S_A \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in S_A} H_A(\lambda) = L$*.*

3. Пусть: $S_A \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in S_A} H_A(\lambda) = L$*. Тогда:* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$*,* $\forall \lambda \in S_A \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*.*

Доказательство.

1. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то: $\tilde{S}_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \tilde{S}_A} m_A(\lambda) = N$. Так как $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$, то $S_A = \tilde{S}_A$. Тогда: $S_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in S_A} m_A(\lambda) = N$.

2. Так как: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$, то: $S_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in S_A} m_A(\lambda) = N$. Так как $\forall \lambda \in S_A \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$, то: $S_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in S_A} g_A(\lambda) = N$. Тогда: $S_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in S_A} H_A(\lambda) = L$.

3. Так как: $S_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in S_A} H_A(\lambda) = L$, то: $S_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in S_A} g_A(\lambda) = N$.

Предположим, что существует такое число λ_0, что: $\lambda_0 \in \tilde{S}_A$, $\lambda_0 \notin \mathbb{K}$. Тогда: $\lambda_0 \in \tilde{S}_A$, $\lambda_0 \notin S_A$. Следовательно: $\sum\limits_{\lambda \in S_A} g_A(\lambda) \leqslant \sum\limits_{\lambda \in S_A} m_A(\lambda) < \sum\limits_{\lambda \in \tilde{S}_A} m_A(\lambda) \leqslant N$ (что противоречит условию $\sum\limits_{\lambda \in S_A} g_A(\lambda) = N$). Итак, $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$.

Предположим, что существует такое число λ_0, что: $\lambda_0 \in S_A$, $g_A(\lambda_0) \neq m_A(\lambda_0)$. Тогда: $\sum\limits_{\lambda \in S_A} g_A(\lambda) < \sum\limits_{\lambda \in S_A} m_A(\lambda) \leqslant N$ (что противоречит условию $\sum\limits_{\lambda \in S_A} g_A(\lambda) = \mathrm{N}$). Итак, $\forall \lambda \in S_A \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$. □

Теорема (Гамильтона—Кэли)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*. Тогда* $\hat{F}_A(A) = \Theta$*.*

Доказательство. Пусть: e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Пусть $k, i = \overline{1, N}$. Обозначим: $M_i^k(\lambda) = (-1)^{k+i} \overline{\Delta}_i^k \big(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}\big)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Очевидно, M_i^k — полином на $\mathbb{K}$. Обозначим через $\hat{M}_i^k$ продолжение полинома M_i^k на $\operatorname{Lin}(L, L)$.

Пусть $k, j = \overline{1, N}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$\delta_k^j F_A(\lambda) = \delta_k^j \det\big(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}\big) =$$
$$\det\big((\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^1, \ldots, (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k-1}, (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^j, (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k+1}, \ldots, (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^N\big) =$$
$$\sum_{i=1}^{N} (-1)^{k+i} \overline{\Delta}_i^k \big(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}\big) \big(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}\big)_i^j = \sum_{i=1}^{N} M_i^k(\lambda) \big(\tilde{A}_i^j - \lambda \delta_i^j\big) = \sum_{i=1}^{N} M_i^k(\lambda) \big(\tilde{A}_i^j 1 - \delta_i^j \lambda\big).$$

Пусть $B \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Тогда:

$$\delta_k^j \hat{F}_A(B) = \sum_{n=0}^{N} \delta_k^j a_n(A) B^n = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}_i^k(B) \big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j B\big).$$

Пусть $i = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j A\big) e_j = \tilde{A}_i^j I(e_j) - \delta_i^j A(e_j) = \tilde{A}_i^j e_j - A e_i = \theta.$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A) e_k = \big(\delta_k^j \hat{F}_A(A)\big) e_j = \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{M}_i^k(A) \big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j A\big)\right) e_j = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}_i^k(A) \Big(\big(\tilde{A}_i^j I - \delta_i^j A\big) e_j \Big) = \theta.$$

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A) x = \hat{F}_A(A) \big([x]^k(e) e_k\big) = [x]^k(e) \hat{F}_A(A)(e_k) = \theta.$$

Итак, $\hat{F}_A(A) = \Theta$. $\square$

Лекция 7. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме

7.1. Циклический базис подпространства $Q_\infty(A)$ для оператора A

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим: $Q_k(A) = \ker(A^k)$, $R_k(A) = \mathrm{R}(A^k)$. Очевидно: $Q_k(A)$, $R_k(A)$ — подпространства пространства L, $\dim\bigl(Q_k(A)\bigr) + \dim\bigl(R_k(A)\bigr) = N$ (**это не значит, что** $Q_k(A) + R_k(A) = L$). Так как $[A, A^k] = \Theta$, то $Q_k(A)$, $R_k(A)$ — инвариантные подпространства оператора A.

Обозначим: $Q_\infty(A) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} Q_k(A)$, $R_\infty(A) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} R_k(A)$. Очевидно, $Q_\infty(A)$, $R_\infty(A) \subseteq L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Справедливы утверждения: $A^n[Q_k] = Q_{k-n} \cap R_n$ *при:* k, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant k$; $A^n[Q_k] = \{\theta\}$ *при:* k, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geqslant k$; $A^n[R_k] = R_{k+n}$ *при* k, $n \in \mathbb{Z}_+$.

2. Справедливы утверждения: $Q_k \subseteq Q_{k+1}$, $\dim(Q_k) \leqslant \dim(Q_{k+1})$, $R_{k+1} \subseteq R_k$, $\dim(R_{k+1}) \leqslant \dim(R_k)$ *при* $k \in \mathbb{Z}_+$.

3. Можно указать такое число $h \in \mathbb{Z}_+$, *что:* $Q_k \subset Q_{k+1}$, $\dim(Q_k) < \dim(Q_{k+1})$, $R_{k+1} \subset R_k$, $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$ *при* $k = \overline{0, h-1}$; $Q_k = Q_{k+1}$, $\dim(Q_k) = \dim(Q_{k+1})$, $R_{k+1} = R_k$, $\dim(R_{k+1}) = \dim(R_k)$ *при:* $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. ***Число*** h ***называют высотой оператора*** A.

4. Справедливо утверждение: $\dim(Q_k \cap R_n) = \dim(Q_{k+n}) - \dim(Q_n)$ *при* k, $n \in \mathbb{Z}_+$.

5. Пусть h *— высота оператора* A. *Тогда:* $Q_\infty = Q_h$, $R_\infty = R_h$; Q_∞, R_∞ *— подпространства пространства* L, $\dim(Q_\infty) + \dim(R_\infty) = N$, Q_∞, R_∞ *— инвариантные подпространства оператора* A.

6. Справедливы утверждения: Q_∞, R_∞ *— линейно независимые подпространства,* $Q_\infty + R_\infty = L$.

Доказательство.

1. **Пусть:** k, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant k$.

Пусть $x \in A^n[Q_k]$. Тогда можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $u \in Q_k$, $x = A^n u$. Следовательно: $u \in L$, $A^k u = \theta$, $x = A^n u$. Тогда: $x \in L$, $A^{k-n} x = A^{k-n}(A^n u) = A^k u = \theta$. Следовательно, $x \in Q_{k-n}$. Так как: $u \in L$, $x = A^n u$, то $x \in R_n$. Так как: $x \in Q_{k-n}$, $x \in R_n$, то $x \in Q_{k-n} \cap R_n$.

Пусть $x \in Q_{k-n} \cap R_n$. Тогда: $x \in Q_{k-n}$, $x \in R_n$. Следовательно: $x \in L$, $A^{k-n} x = \theta$; можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $x = A^n u$. Тогда: $u \in L$, $A^k u = A^{k-n}(A^n u) = A^{k-n} x = \theta$. Следовательно, $u \in Q_k$. Так как: $u \in L$, $u \in Q_k$, $x = A^n u$, то $x \in A^n[Q_k]$. Итак, $A^n[Q_k] = Q_{k-n} \cap R_n$.

Пусть: k, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geqslant k$. Очевидно, $\theta \in A^n[Q_k]$. Пусть $x \in A^n[Q_k]$. Тогда можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $u \in Q_k$, $x = A^n u$. Следовательно: $u \in L$, $A^k u = \theta$, $x = A^n u$. Тогда: $x = A^n u = A^{n-k}(A^k u) = \theta$. Итак, $A^n[Q_k] = \{\theta\}$.

Пусть k, $n \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно: $A^n[R_k] = A^n\bigl[A^k[L]\bigr] = A^{k+n}[L] = R_{k+n}$.

2. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $x \in Q_k$. Тогда: $x \in L$, $A^k x = \theta$. Следовательно: $x \in L$, $A^{k+1} x = A(A^k x) = \theta$. Тогда $x \in Q_{k+1}$. Итак, $Q_k \subseteq Q_{k+1}$. Тогда $\dim(Q_k) \leqslant \dim(Q_{k+1})$.

Очевидно: $R_{k+1} = A^k[R_1] \subseteq A^k[L] = R_k$. Тогда $\dim(R_{k+1}) \leqslant \dim(R_k)$.

3. Обозначим, $\mu = \big\{k\colon k \in \mathbb{Z}_+ \wedge \dim(R_{k+1}) = \dim(R_k)\big\}$. Очевидно, $\mu \subseteq \mathbb{Z}_+$.

Предположим, что $\mu = \varnothing$. Тогда: $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно: $\dim(R_{k+1}) \leqslant \dim(R_k) - 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда: $\dim(R_{k+n}) \leqslant \dim(R_k) - n$ при: $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно: $\dim(R_{N+1}) \leqslant \dim(R_0) - (N+1) = \dim(L) - (N+1) = -1$ (что противоречит тому, что $\dim(R_{N+1}) \geqslant 0$). Итак, $\mu \neq \varnothing$. Обозначим, $h = \min(\mu)$. Тогда: $h \in \mathbb{Z}_+$; $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$ при $k = \overline{0, h-1}$; $\dim(R_{h+1}) = \dim(R_h)$.

Пусть $k = \overline{0, h-1}$. Тогда $\dim(R_{k+1}) < \dim(R_k)$. Следовательно, $R_{k+1} \subset R_k$. Так как: $\dim(R_{h+1}) = \dim(R_h)$, $\dim(R_h) \neq +\infty$, то $R_{h+1} = R_h$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Тогда: $R_{k+1} = A^{k-h}[R_{h+1}] = A^{k-h}[R_h] = R_k$. Следовательно, $\dim(R_{k+1}) = \dim(R_k)$.

Пусть $k = \overline{0, h-1}$. Тогда: $\dim(Q_k) = N - \dim(R_k) < N - \dim(R_{k+1}) = \dim(Q_{k+1})$. Следовательно, $Q_k \subset Q_{k+1}$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Тогда: $\dim(Q_k) = N - \dim(R_k) = N - \dim(R_{k+1}) = \dim(Q_{k+1})$. Так как: $\dim(Q_k) = \dim(Q_{k+1})$, $\dim(Q_{k+1}) \neq +\infty$, то $Q_k = Q_{k+1}$.

4. Пусть k, $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как: $Q_{k+n} \subseteq L$, $Q_n \subseteq Q_{k+n}$, то:

$$\dim(Q_k \cap R_n) = \dim\big(A^n[Q_{k+n}]\big) = \dim\left(\mathrm{R}\left(A^n|_{Q_{k+n}}\right)\right) =$$
$$= \dim\left(\mathrm{D}\left(A^n|_{Q_{k+n}}\right)\right) - \dim\left(\ker\left(A^n|_{Q_{k+n}}\right)\right) = \dim(L \cap Q_{k+n}) - \dim(Q_n \cap Q_{k+n}) =$$
$$= \dim(Q_{k+n}) - \dim(Q_n).$$

5. **Очевидно:** $Q_k \subset Q_h$ при $k = \overline{0, h-1}$; $Q_k = Q_h$ при: $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geqslant h$. Тогда: $Q_k \subseteq Q_h$ при $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $x \in Q_\infty$. Так как $Q_\infty = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} Q_k$, то можно указать такой номер $k \in \mathbb{Z}_+$, что $x \in Q_k$. Так как $Q_k \subseteq Q_h$, то $x \in Q_h$.

Пусть $x \in Q_h$. Так как $Q_\infty = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} Q_k$, то $x \in Q_\infty$. Итак, $Q_\infty = Q_h$.

Очевидно: $R_h \subset R_k$ при $k = \overline{0, h-1}$; $R_h = R_k$ при: $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \geqslant h$. Тогда: $R_h \subseteq R_k$ при $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $x \in R_\infty$. Так как $R_\infty = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} R_k$, то $x \in R_h$.

Пусть $x \in R_h$. Так как: $R_h \subseteq R_k$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, то: $x \in R_k$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Так как $R_\infty = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} R_k$, то $x \in R_\infty$. Итак, $R_\infty = R_h$.

Так как: $Q_\infty = Q_h$, $R_\infty = R_h$, то: Q_∞, R_∞ — подпространства пространства L, $\dim(Q_\infty) + \dim(R_\infty) = N$, Q_∞, R_∞ — инвариантные подпространства оператора A.

6. Очевидно: $Q_\infty \cap R_\infty = Q_h \cap R_h = A^h[Q_{2h}] = A^h[Q_h] = \{\theta\}$. Тогда Q_∞, R_∞ — линейно независимые подпространства. Следовательно: $\dim(Q_\infty + R_\infty) = \dim(Q_\infty) + \dim(R_\infty) = N$. Так как: $\dim(Q_\infty + R_\infty) = N$, $N \neq +\infty$, то $Q_\infty + R_\infty = L$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть: $q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_q \in L$, $Ax_1 = \theta$, $Ax_j = x_{j-1}$ при $j = \overline{2, q}$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов для оператора A.

2. Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $Q_\infty(A)$, $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов для оператора A при $i = \overline{1, n}$. Будем говорить, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $Q_\infty(A)$ для оператора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*.*

1. Пусть: $q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов для оператора A. Тогда: $A^k x_j = x_{j-k}$ при: $j = \overline{1, q}$, $k = \overline{0, j-1}$; $x_j \in Q_j \cap R_{q-j}$ при $j = \overline{1, q}$.

2. Пусть: $q \in \mathbb{N}$, $x \in Q_1 \cap R_{q-1}$. Тогда можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_q$, что: $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов для оператора A, $x_1 = x$.

Доказательство.

1. Очевидно: $A^k x_j = x_{j-k}$ при: $j = \overline{1, q}$, $k = \overline{0, j-1}$. Пусть $j = \overline{1, q}$. Тогда: $x_j \in L$, $A^j x_j = A(A^{j-1} x_j) = A x_1 = \theta$. Следовательно, $x_j \in Q_j$. Так как: $x_q \in L$, $x_j = A^{q-j} x_q$, то $x_j \in R_{q-j}$. Тогда $x_j \in Q_j \cap R_{q-j}$.

2. Так как $x \in Q_1 \cap R_{q-1}$, то: $x \in Q_1$, $x \in R_{q-1}$. Тогда: $x \in L$, $Ax = \theta$; можно указать такой вектор u, что: $u \in L$, $x = A^{q-1} u$. Обозначим: $x_j = A^{q-j} u$ при $j = \overline{1, q}$. Тогда: $x_1, \ldots, x_q \in L$, $x_1 = A^{q-1} u = x$. Так как: $x_1 = x$, $Ax = \theta$, то $A x_1 = \theta$. Пусть $j = \overline{2, q}$. Тогда: $A x_j = A(A^{q-j} u) = A^{q-(j-1)} u = x_{j-1}$. Итак: $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов для оператора A, $x_1 = x$. □

Теорема. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, h — высота оператора A, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства Q_∞ для оператора A.*

1. Справедливо утверждение: $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i = h$.

2. Пусть $k = \overline{1, h}$. Тогда $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_k.

3. Пусть $k = \overline{1, h}$. Тогда $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_{k-1}$.

*4. Справедливы утверждения: $n = \dim(Q_1)$; $\operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = k\}\big) = 2\dim(Q_k) - \dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_{k-1})$ при $k = \overline{1, h-1}$; $\operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = h\}\big) = \dim(Q_h) - \dim(Q_{h-1})$ (**следовательно, числа $q_1, \ldots, q_n$ определяются однозначно, с точностью до перестановки**).*

Доказательство.

1. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Тогда: $\exists i = \overline{1,n} (q_i = \alpha)$, $\forall i = \overline{1,n} (q_i \leqslant \alpha)$. Предположим, что $\alpha < h$. Пусть: $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, q_i}$. Тогда: $j \leqslant q_i \leqslant \alpha \leqslant h - 1$. Следовательно: $e_{i,j} \in Q_j \subseteq Q_{h-1}$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_h, то: $Q_h = L\left(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\right) \subseteq Q_{h-1}$. Так как: $Q_{h-1} \subseteq Q_h$, $Q_h \subseteq Q_{h-1}$, то $Q_{h-1} = Q_h$ (что противоречит тому, что $Q_{h-1} \subset Q_h$). Итак, $\alpha \geqslant h$.

Предположим, что $\alpha > h$. Выберем такой номер i, что: $i = \overline{1, n}$, $q_i = \alpha$. Тогда: $q_i = \alpha \geqslant h + 1$. Следовательно: $e_{i,1} \in Q_1 \cap R_{q_i - 1} = Q_1 \cap R_h \subseteq Q_h \cap R_h = \{\theta\}$. Тогда $e_{i,1} = \theta$ (что противоречит тому, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы). Итак, $\alpha \leqslant h$. Так как: $\alpha \leqslant h$, $\alpha \geqslant h$, то $\alpha = h$.

2. Так как $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i = h$, то: $\exists i = \overline{1,n} (q_i = h)$, $\forall i = \overline{1,n} (q_i \leqslant h)$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_h, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_h.

Пусть $k = \overline{1, h-1}$. Очевидно: $e_{i,j} \in Q_j \subseteq Q_k$ при: $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, \min\{q_i, k\}}$; $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in Q_k$. Тогда $x \in Q_h$. Следовательно, можно указать такие числа $\{C^{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, что: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, q_i}$; $x = \sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j}$. Так как $\exists i = \overline{1,n} (q_i = h)$, то

$\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k+1)$. Тогда:

$$A^k x = A^k \sum_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j},$$
$$\theta = \sum_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k+1} \sum_{j=\overline{k+1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j-k}.$$

Так как $\{e_{i,j-k}\}_{j=\overline{k+1,q_i}}^{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k+1}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k+1$, $j = \overline{k+1,q_i}$. Следовательно, $x = \sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}} C^{i,j} e_{i,j}$. Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_k.

3. Так как $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i = h$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i = h)$. Тогда $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_k, то:

$$Q_1 \cap R_{k-1} = A^{k-1}[Q_k] = A^{k-1}\left[L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}\Big)\right] = L\Big(\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}\Big).$$

Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — линейно независимые векторы, то: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_{k-1}$.

4. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_1, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_1. Тогда $n = \dim(Q_1)$.

Пусть $k = \overline{1,h-1}$. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_{k-1}$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k+1}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_k$, то:

$$\begin{gathered}\operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = k\}\big) = \\ = \operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) - \operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1\}\big) = \\ = \dim(Q_1 \cap R_{k-1}) - \dim(Q_1 \cap R_k) = \\ = \big(\dim(Q_k) - \dim(Q_{k-1})\big) - \big(\dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_k)\big) = \\ = 2\dim(Q_k) - \dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_{k-1}).\end{gathered}$$

Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant h}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_{h-1}$, то:

$$\begin{gathered}\operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = h\}\big) = \operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant h\}\big) = \dim(Q_1 \cap R_{h-1}) = \\ = \dim(Q_h) - \dim(Q_{h-1}). \quad \square\end{gathered}$$

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*,* h *— высота оператора* A*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$*,* $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ *— циклическая серия векторов для оператора* A *при* $i = \overline{1,n}$*;* $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i = h$*,* $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ *— базис подпространства* $Q_1 \cap R_{k-1}$ *при* $k = \overline{1,h}$*. Тогда:* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* Q_∞ *для оператора* A*.*

Доказательство. Так как $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i = h$, то: $\exists i = \overline{1,n}(q_i = h)$, $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant h)$. Рассуждая по индукции, покажем, что: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_k при $k = \overline{1,h}$.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i\geqslant 1}$, $Q_1 = Q_1 \cap L = Q_1 \cap R_0$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i\geqslant 1}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_0$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_1.

Пусть: $k = \overline{1,h-1}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_k. Покажем, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_{k+1}. Очевидно: $e_{i,j} \in Q_j \subseteq Q_{k+1}$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k+1\}}$.

Пусть: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k+1\}}$; $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}} C^{i,j} e_{i,j} = \theta$. Так как $\exists i = \overline{1,n}(q_i = h)$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k+1)$. Тогда:

$$A^k \sum_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}} C^{i,j} e_{i,j} = A^k \theta,$$
$$\sum_{i=\overline{1,n},\, q_i\geqslant k+1} C^{i,k+1} e_{i,1} = \theta.$$

Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i\geqslant k+1}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,k+1} = 0$ при $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k+1$. Тогда $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}} C^{i,j} e_{i,j} = \theta$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k\}}$. Итак: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k+1\}}$. Тогда $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_k, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i\geqslant k+1}$ — базис подпространства $Q_1 \cap R_k$, то:

$$\begin{gathered}
\operatorname{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k+1\}}\big\}\Big) = \\
= \operatorname{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k\}}\big\}\Big) + \operatorname{card}\Big(\big\{(i,k+1)\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1\big\}\Big) = \\
= \operatorname{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i,k\}}\big\}\Big) + \operatorname{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1\}\big) = \\
= \dim(Q_k) + \dim(Q_1 \cap R_k) = \dim(Q_k) + \big(\dim(Q_{k+1}) - \dim(Q_k)\big) = \dim(Q_{k+1}).
\end{gathered}$$

Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k+1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_{k+1}.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_h, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q_h. Так как: $e_{i,1},\ldots,e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов для оператора A при $i = \overline{1,n}$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства Q_∞ для оператора A. □

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L,L)$*,* $Q_1(A) \neq \{\theta\}$*. Тогда существует циклический базис подпространства* $Q_\infty(A)$ *для оператора* A*.*

7.2. Базис Жордана пространства L для оператора A

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L,L)$, λ — собственное значение оператора A. Обозначим, $\tilde{H}_A(\lambda) =$

$Q_\infty(A-\lambda I)$. Подпространство $\tilde{H}_A(\lambda)$ называют корневым подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* λ_0 *— собственное значение оператора* A*. Тогда* $\dim\bigl(\tilde{H}_A(\lambda_0)\bigr) = m_A(\lambda_0)$*.*

Доказательство. Так как λ_0 — собственное значение оператора A, то $Q_1(A-\lambda_0 I) \neq \{\theta\}$. Тогда можно указать такие векторы $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $Q_\infty(A-\lambda_0 I)$. Обозначим: $m = m_A(\lambda_0)$, $\tilde{H} = Q_\infty(A-\lambda_0 I)$, $\tilde{m} = \dim\bigl(Q_\infty(A-\lambda_0 I)\bigr)$, $\tilde{R} = R_\infty(A-\lambda_0 I)$. Очевидно: $\tilde{m} = \overline{1,N}$; $\tilde{H}$, $\tilde{R}$ — линейно независимые подпространства, $\tilde{H} + \tilde{R} = L$.

Пусть $\tilde{m} = N$. Тогда $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}}.$$

Следовательно, $m = \tilde{m}$.

Пусть $\tilde{m} \neq N$. Тогда $\tilde{m} < N$. Следовательно: $\dim(\tilde{R}) = N - \tilde{m} > 0$. Тогда можно указать такие векторы $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$, что $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$ — базис подпространства $\tilde{R}$. Тогда $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{g,1}, \ldots, e_{g,q_g}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{g}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{n,1}, \ldots, e_{n,q_n}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} \det\Bigl(\bigl\{\tilde{A}_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j} - \lambda\delta_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j}\bigr\}_{i=\overline{1,N-\tilde{m}}}^{j=\overline{1,N-\tilde{m}}}\Bigr).$$

Обозначим через h высоту оператора A. Так как $\bigl[A, (A-\lambda_0 I)^h\bigr] = \Theta$, то $\tilde{R}$ — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $A|_{\tilde{R}} \in \mathrm{Lin}(\tilde{R}, \tilde{R})$, $\bigl[A|_{\tilde{R}}\bigr]_i^j(f) = \tilde{A}_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j}$ при: i, $j = \overline{1, N-\tilde{m}}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} F_{A|_{\tilde{R}}}(\lambda).$$

Предположим, что $F_{A|_{\tilde{R}}}(\lambda_0) = 0$. Так как $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, то можно указать такой вектор x, что: $x \in \tilde{R}$, $\bigl(A|_{\tilde{R}} - \lambda_0\, I|_{\tilde{R}}\bigr)x = \theta$, $x \neq \theta$. Тогда: $x \in L$, $(A - \lambda_0 I)x = \theta$, $x \in \tilde{R}$, $x \neq \theta$. Следовательно: $x \in Q_1(A-\lambda_0 I)$, $x \in \tilde{R}$, $x \neq \theta$. Так как $Q_1(A-\lambda_0 I) \subseteq \tilde{H}$, то: $x \in \tilde{H}$, $x \in \tilde{R}$, $x \neq \theta$. Тогда: $x \in \tilde{H} \cap \tilde{R}$, $x \neq \theta$. Так как: $x \in \tilde{H} \cap \tilde{R}$, $\tilde{H} \cap \tilde{R} = \{\theta\}$, то $x = \theta$ (что противоречит тому, что $x \neq \theta$). Итак, $F_{A|_{\tilde{R}}}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда $m = \tilde{m}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— различные собственные значения оператора* A*,* $\tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_r$ *— соответствующие корневые подпространства. Тогда* $\tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Пусть $r = 1$. Очевидно, $\tilde{H}_1$ — линейно независимое подпространство.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Покажем, что утверждение справедливо при $r = r_0 + 1$.

Пусть $k = \overline{1, r_0+1}$. Обозначим через h_k высоту оператора $A - \lambda_k I$. Тогда $h_k \in \mathbb{Z}_+$. Так как λ_k — собственное значение оператора A, то $Q_1(A-\lambda_k I) \neq \{\theta\}$. Тогда $h_k \in \mathbb{N}$.

Пусть: k_1, $k_2 = \overline{1, r_0+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как $\big[(A-\lambda_{k_1}I)^n, (A-\lambda_{k_2}I)^{h_{k_2}}\big] = \Theta$, то $\tilde{H}_{k_2}$ — инвариантное подпространство оператора $(A-\lambda_{k_1}I)^n$.

Пусть: $x_1 \in \tilde{H}_1, \dots, x_{r_0+1} \in \tilde{H}_{r_0+1}$, $x_1 + \dots + x_{r_0+1} = \theta$. Предположим, что $x_1 \neq \theta$. Так как: $(A-\lambda_1 I)^0 x_1 = Ix_1 = x_1 \neq \theta$, $(A-\lambda_1 I)^{h_1} x_1 = \theta$, то можно указать такое число $n_1 = \overline{0, h_1-1}$, что: $(A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$, $(A-\lambda_1 I)^{n_1+1} x_1 = \theta$. Тогда:

$$(A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1 + \sum_{k=\overline{2, r_0+1}} (A-\lambda_1 I)^{n_1} x_k = \theta;$$
$$(A-\lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \big((A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1\big) + \sum_{k=\overline{2, r_0+1}} (A-\lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \big((A-\lambda_1 I)^{n_1} x_k\big) = \theta,$$
$$(\lambda_1 - \lambda_{r_0+1})^{h_{r_0+1}} (A-\lambda_1 I)^{n_1}(x_1) + \sum_{k=\overline{2, r_0}} (A-\lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \big((A-\lambda_1 I)^{n_1} x_k\big) = \theta.$$

Так как $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{r_0}$ — линейно независимые подпространства, то $(\lambda_1 - \lambda_{r_0+1})^{h_{r_0+1}}(A - \lambda_1 I)^{n_1}(x_1) = \theta$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_{r_0+1}$, то $(A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1 = \theta$ (что противоречит тому, что $(A-\lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$). Итак, $x_1 = \theta$. Так как $x_1 + \dots + x_{r_0+1} = \theta$, то $x_2 + \dots + x_{r_0+1} = \theta$. Так как $\tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{r_0+1}$ — линейно независимые подпространства, то $x_2, \dots, x_{r_0+1} = \theta$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$.

Так как: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{K}$, то: $S_A \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in S_A} m_A(\lambda) = N$. Так как: S_A — конечное множество, $S_A \neq \varnothing$, то можно указать такое число $r \in \mathbb{N}$ и такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, что: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A. Пусть: $m_1, \dots, m_r$ — соответствующие алгебраические кратности, $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_r$ — соответствующие корневые подпространства.

Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Так как λ_k — собственное значение оператора A, то $Q_1(A - \lambda_k I) \neq \{\theta\}$. Тогда можно указать такие векторы $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,n_k}}$, что $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,n_k}}$ — циклический базис подпространства $Q_\infty(A - \lambda_k I)$ для оператора $A - \lambda_k I$.

Так как: $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_r$ — линейно независимые подпространства, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} \dim(\tilde{H}_k) = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} m_k = N$, то $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\, i=\overline{1,n_k}}$ — базис пространства L. Базис $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\, i=\overline{1,n_k}}$ называют базисом Жордана пространства L для оператора A.

Лекция 8. Линейные, билинейные и квадратичные формы

8.1. Линейные и полулинейные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — линейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \implies \mathbb{K}$, A — линейный оператор.

2. Будем говорить, что A — полулинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \implies \mathbb{K}$, A — полулинейный оператор.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — линейная (полулинейная) форма в пространстве L, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_k(e) = A(e_k)$ при $k = \overline{1, N}$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть: A — линейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Тогда: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$, $A(x) = \tilde{A}_k [x]^k(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$, $A(x) = \tilde{A}_k [x]^k(e)$ при $x \in L$. Тогда: A — линейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

3. Пусть: A — полулинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Тогда: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$, $A(x) = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$.

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$, $A(x) = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$. Тогда: A — полулинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Доказательство.

1. Очевидно, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e) e_k\big) = [x]^k(e) A(e_k) = \tilde{A}_k [x]^k(e).$$

2. Очевидно, $A\colon L \implies \mathbb{K}$. Так как $\mathrm{D}(A) = L$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L.
Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k [x+y]^k(e) = \tilde{A}_k\big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big) = \tilde{A}_k [x]^k(e) + \tilde{A}_k [y]^k(e) = A(x) + A(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k [\lambda x]^k(e) = \tilde{A}_k\big(\lambda [x]^k(e)\big) = \lambda\big(\tilde{A}_k [x]^k(e)\big) = \lambda A(x).$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_i [e_k]^i(e) = \tilde{A}_i \delta^i_k = \tilde{A}_k.$$

3. Очевидно, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^N$. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e) e_k\big) = \overline{[x]^k(e)} A(e_k) = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}.$$

4. Очевидно, $A\colon L \implies \mathbb{K}$. Так как $\mathrm{D}(A) = L$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L.
Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k \overline{[x+y]^k(e)} = \tilde{A}_k \overline{\big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big)} = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)} + \tilde{A}_k \overline{[y]^k(e)} = A(x) + A(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k \overline{[\lambda x]^k(e)} = \tilde{A}_k \overline{\big(\lambda [x]^k(e)\big)} = \overline{\lambda}\big(\tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}\big) = \overline{\lambda} A(x).$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_i \overline{[e_k]^i(e)} = \tilde{A}_i \overline{\delta^i_k} = \tilde{A}_i \delta^i_k = \tilde{A}_k. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— линейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\alpha^k_{k'}(e, e')$ *при* $k' = \overline{1, N}$ $([A](e') = [A](e)\alpha(e, e'))$*.*

2. Пусть A *— полулинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}$ *при* $k' = \overline{1, N}$ $([A](e') = [A](e)\overline{\alpha(e, e')})$*.*

Доказательство.

1. Пусть $k' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k\big) = \alpha^k_{k'}(e, e')A(e_k) = [A]_k(e)\alpha^k_{k'}(e, e').$$

2. Пусть $k' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k\big) = \overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}A(e_k) = [A]_k(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Обозначим, $L^* = \mathrm{Lin}(L, \mathbb{K})$. Тогда L^* — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пространство L^* называют сопряжённым пространством к пространству L. Пусть e — базис пространства L. Обозначим: $\varphi_e(A) = [A](e)$ при $A \in L^*$. Тогда φ_e — изоморфизм пространства L^* на пространство $\mathbb{K}^N$. Следовательно: $\dim(L^*) = \dim(\mathbb{K}^N) = N$.

2. Пусть e — базис пространства L. Очевидно, следующие утверждения эквивалентны друг другу: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1, N}$; $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1, N}$.

3. Пусть e — базис пространства L. Согласно утверждению второго пункта, существует единственный набор линейных форм $\omega^1, \ldots, \omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1, N}$.

4. Пусть: e — базис пространства L; $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1, N}$. Согласно утверждению второго пункта, $\omega^1, \ldots, \omega^N$ — базис пространства L^*. Базис $\omega^1, \ldots, \omega^N$ пространства L^* называют сопряжённым базисом к базису e пространства L.

Пусть: $x \in L$, $m = \overline{1, N}$. Тогда: $\omega^m(x) = [\omega^m]_k(e)[x]^k(e) = \delta^m_k[x]^k(e) = [x]^m(e)$.

Пусть $A \in L^*$. Пусть $x \in L$. Тогда: $A(x) = [A]_m(e)[x]^m(e) = [A]_m(e)\omega^m(x)$. Следовательно, $A = [A]_m(e)\omega^m$.

8.2. Билинейные, полуторалинейные, квадратичные, эрмитовы квадратичные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — билинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \times L \implies \mathbb{K}$; $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

2. Будем говорить, что A — полуторалинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \times L \implies \mathbb{K}$; $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \overline{\lambda}A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

3. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — симметричная билинейная форма, если: $A(x, y) = A(y, x)$ при x, $y \in L$.

4. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — эрмитова полуторалинейная форма, если: $A(x, y) = \overline{A(y, x)}$ при x, $y \in L$. **Пусть** A —

эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x,x)=\overline{A(x,x)}$ **при** $x\in L$**.**

5. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; A — симметричная билинейная форма в пространстве L. Будем писать, что $A>0$ ($A\geqslant 0$, $A<0$, $A\leqslant 0$, $A=0$), если: $A(x,x)>0$ ($A(x,x)\geqslant 0$, $A(x,x)<0$, $A(x,x)\leqslant 0$, $A(x,x)=0$) при: $x\in L$, $x\neq\theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная форма, если: $\exists x\in L\big(A(x,x)>0\big)$, $\exists x\in L\big(A(x,x)<0\big)$.

6. Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Будем писать, что $A>0$ ($A\geqslant 0$, $A<0$, $A\leqslant 0$, $A=0$), если: $A(x,x)>0$ ($A(x,x)\geqslant 0$, $A(x,x)<0$, $A(x,x)\leqslant 0$, $A(x,x)=0$) при: $x\in L$, $x\neq\theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная форма, если: $\exists x\in L\big(A(x,x)>0\big)$, $\exists x\in L\big(A(x,x)<0\big)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что Q — квадратичная форма в пространстве L, если: $Q\colon L\implies\mathbb{K}$; можно указать такую билинейную форму A в пространстве L, что: $Q(x)=A(x,x)$ при $x\in L$.

2. Будем говорить, что Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, если: $Q\colon L\implies\mathbb{K}$; можно указать такую полуторалинейную форму A в пространстве L, что: $A(x,x)=\overline{A(x,x)}$, $Q(x)=A(x,x)$ при $x\in L$. **Пусть:** $Q\colon L\implies\mathbb{K}$**;** A **— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве** L**,** $Q(x)=A(x,x)$ **при** $x\in L$**. Тогда:** $Q\colon L\implies\mathbb{K}$**;** A **— полуторалинейная форма в пространстве** L**,** $A(x,x)=\overline{A(x,x)}$**,** $Q(x)=A(x,x)$ **при** $x\in L$**. Следовательно,** Q **— эрмитова квадратичная форма в пространстве** L**.**

3. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; Q — квадратичная форма в пространстве L. Будем писать, что $Q>0$ ($Q\geqslant 0$, $Q<0$, $Q\leqslant 0$, $Q=0$), если: $Q(x)>0$ ($Q(x)\geqslant 0$, $Q(x)<0$, $Q(x)\leqslant 0$, $Q(x)=0$) при: $x\in L$, $x\neq\theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная форма, если: $\exists x\in L\big(Q(x)<0\big)$, $\exists x\in L\big(Q(x)>0\big)$.

4. Пусть Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L. Будем писать, что $Q>0$ ($Q\geqslant 0$, $Q<0$, $Q\leqslant 0$, $Q=0$), если: $Q(x)>0$ ($Q(x)\geqslant 0$, $Q(x)<0$, $Q(x)\leqslant 0$, $Q(x)=0$) при: $x\in L$, $x\neq\theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная форма, если: $\exists x\in L\big(Q(x)<0\big)$, $\exists x\in L\big(Q(x)>0\big)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть Q *— квадратичная форма в пространстве* L*. Существует единственная симметричная билинейная форма* A *в пространстве* L*, удовлетворяющая условию:* $Q(x)=A(x,x)$ *при* $x\in L$*.*

2. Пусть Q *— эрмитова квадратичная форма в пространстве* L*. Существует единственная эрмитова полуторалинейная форма* A *в пространстве* L*, удовлетворяющая условию:* $Q(x)=A(x,x)$ *при* $x\in L$*.*

Доказательство.

1. По определению квадратичной формы, можно указать такую билинейную форму A_0 в пространстве L, что: $Q(x)=A_0(x,x)$ при $x\in L$. Обозначим: $A(x,y)=\frac{1}{2}\big(A_0(x,y)+A_0(y,x)\big)$ при $x,y\in L$. Очевидно, A — билинейная форма в пространстве L. Пусть $x,y\in L$. Тогда:

$$A(x,y)=\frac{1}{2}\big(A_0(x,y)+A_0(y,x)\big)=\frac{1}{2}\big(A_0(y,x)+A_0(x,y)\big)=A(y,x).$$

Пусть $x\in L$. Тогда:

$$A(x,x)=\frac{1}{2}\big(A_0(x,x)+A_0(x,x)\big)=A_0(x,x)=Q(x).$$

Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$Q(x+y) = A(x+y, x+y) = A(x,x) + A(x,y) + A(y,x) + A(y,y) = Q(x) + 2A(x,y) + Q(y);$$
$$A(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big).$$

Очевидно, форма A определяется однозначно.

2. По определению эрмитовой квадратичной формы, можно указать такую полуторалинейную форму A_0 в пространстве L, что: $A_0(x,x) = \overline{A_0(x,x)}$, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим: $A(x,y) = \frac{1}{2}\big(A_0(x,y) + \overline{A_0(y,x)}\big)$ при x, $y \in L$. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x,y) = \frac{1}{2}\big(A_0(x,y) + \overline{A_0(y,x)}\big) = \overline{\frac{1}{2}\big(A_0(y,x) + \overline{A_0(x,y)}\big)} = \overline{A(y,x)}.$$

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\big(A_0(x,x) + \overline{A_0(x,x)}\big) = A_0(x,x) = Q(x).$$

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Пусть: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Следовательно: Q — квадратичная форма в пространстве L, A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Согласно утверждению первого пункта, форма A определяется однозначно.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$. Тогда:

$$\begin{gathered}
Q(x+\lambda y) = A(x+\lambda y, x+\lambda y) = \\
= A(x,x) + A(x,\lambda y) + A(\lambda y, x) + A(\lambda y, \lambda y) = \\
= A(x,x) + \lambda A(x,y) + \overline{\lambda} A(y,x) + \overline{\lambda}\lambda A(y,y) = \\
= Q(x) + \lambda A(x,y) + \overline{\lambda} \cdot \overline{A(x,y)} + |\lambda|^2 Q(y) = \\
= Q(x) + 2\operatorname{Re}\big(\lambda A(x,y)\big) + |\lambda|^2 Q(y); \\
\operatorname{Re}\big(\lambda A(x,y)\big) = \frac{1}{2}\big(Q(x+\lambda y) - Q(x) - |\lambda|^2 Q(y)\big); \\
\operatorname{Re}\big(A(x,y)\big) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big); \\
\operatorname{Im}\big(A(x,y)\big) = \operatorname{Re}\big(-iA(x,y)\big) = \frac{1}{2}\big(Q(x-iy) - Q(x) - Q(y)\big); \\
A(x,y) = \operatorname{Re}\big(A(x,y)\big) + i\operatorname{Im}\big(A(x,y)\big) = \\
= \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big) + \frac{i}{2}\big(Q(x-iy) - Q(x) - Q(y)\big).
\end{gathered}$$

Очевидно, форма A определяется однозначно. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — билинейная (полуторалинейная) форма в пространстве L, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1,N}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e *— базис пространства* L*.*

1. Пусть: A *— билинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*. Тогда:* $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*.*

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*. Тогда:* A *— билинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*.*

3. Пусть: A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*. Тогда:* $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*.*

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*. Тогда:* A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = [x]^k(e)[y]^m(e)A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e).$$

2. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}[e_k]^i(e)[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

3. Очевидно, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = \overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e).$$

4. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}\overline{[e_k]^i(e)}[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\overline{\delta^i_k}\delta^j_m = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— билинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')$ *при* k'*,* $m' = \overline{1, N}$ $([A](e') = \alpha(e, e')^T[A](e)\alpha(e, e'))$*.*

2. Пусть A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ *при* $k', m' = \overline{1, N}$ $([A](e') = \overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e'))$*.*

Доказательство.

1. Пусть k', $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\big) =$$
$$\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e').$$

2. Пусть k', $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\big) =$$
$$\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e'). \quad \square$$

Замечание.

1. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$; $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Обозначим: $\Delta_0(\tilde{A}) = 1$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \det\big(\{\tilde{A}_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,k}}\big)$ при $k = \overline{1, N}$. Числа $\Delta_1(\tilde{A}), \ldots, \Delta_N(\tilde{A})$ называют угловыми минорами матрицы $\tilde{A}$.

Пусть $\tilde{A}$ — эрмитова матрица (т. е. $\tilde{A} = \overline{\tilde{A}^T}$). Очевидно: $\tilde{A}_{k,k} = \overline{\tilde{A}_{k,k}}$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \Delta_k\left(\overline{\tilde{A}^T}\right) = \overline{\Delta_k(\tilde{A})}$ при $k = \overline{1, N}$.

2. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Очевидно: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Пусть: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$. Очевидно: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

1. Пусть: Q — квадратичная форма в пространстве L, A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$.

2. Пусть: Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть: Q — квадратичная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [Q](e)$. Тогда: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — квадратичная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [Q](e)$.

3. Пусть: Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [Q](e)$. Тогда: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

4. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [Q](e)$.

Доказательство.

1. Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $\tilde{Q} = [Q](e) = [A](e)$. Следовательно: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, $Q(x) = A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Так как $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, то: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [A](e)$. Очевидно: $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда Q — квадратичная форма в пространстве L. Следовательно: $[Q](e) = [A](e) = \tilde{Q}$.

3. Пусть: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $\tilde{Q} = [Q](e) = [A](e)$. Следовательно: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, $Q(x) = A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

4. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при $x, y \in L$. Так как $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, то: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\tilde{Q} = [A](e)$. Очевидно: $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L. Следовательно: $[Q](e) = [A](e) = \tilde{Q}$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, e' — базисы пространства L.*

1. Пусть Q — квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$ ($[Q](e') = \alpha(e,e')^T[Q](e)\alpha(e,e')$).

2. Пусть Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$ ($[Q](e') = \overline{\alpha(e,e')^T}[Q](e)\alpha(e,e')$).

Доказательство.

1. Так как Q — квадратичная форма в пространстве L, то можно указать такую симметричную билинейную форму A в пространстве L, что: $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$.

2. Так как Q — эрмитова квадратичная форма в пространстве L, то можно указать такую эрмитову полуторалинейную форму A в пространстве L, что: $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$. □

Лекция 9. Метод Лагранжа, закон инерции, критерий Сильвестра

Теорема (метод Лагранжа). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*. Существует такой базис* e' *пространства* L*, что* $[A](e')$ *— диагональная матрица.*

Доказательство. Пусть: $N \geqslant 2$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

1. Пусть: $k_0 = \overline{1, N}$, $\tilde{A}_{k_0,k_0} \neq 0$. **Докажем, что** существует такой базис e' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1, N}$, $k \neq k_0$. Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
A(x,x) = \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \tilde{A}_{k_0,m}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0}\right) + \\
+ \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) - \right. \\
\left. - \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{(\tilde{A}_{k_0,k_0})^2}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m\right) + \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\
= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{k=\overline{1,N},\, k\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) + \\
+ \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \left(\tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.
\end{gathered}
$$

Обозначим:

$$
\begin{gathered}
\tilde{\tilde{x}}^{k_0} = \tilde{x}^{k_0} + \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k_0} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m, \\
\tilde{\tilde{x}}^j = \tilde{x}^j \text{ при: } j = \overline{1,N},\ j \neq k_0.
\end{gathered}
$$

Тогда:

$$
A(x,x) = \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \sum_{k,m=\overline{1,N},\, k,m\neq k_0} \left(\tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m.
$$

Обозначим: $\beta^{k_0}_{k_0} = 1$, $\beta^{k_0}_m = \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}$ при: $m = \overline{1,N}$, $m \neq k_0$; $\beta^j_m = \delta^j_m$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \neq k_0$, $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 1 \neq 0$, $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x}$. Так как $\det(\beta) \neq 0$, то существует единственный базис e' пространства L, удовлетворяющий условию: $\alpha(e', e) = \beta$. Тогда: $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x} = \alpha(e', e)[x](e) = [x](e')$. Следовательно: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

2. Пусть: k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $k_0 < m_0$, $\tilde{A}_{k_0,k_0}$, $\tilde{A}_{m_0,m_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$. **Докажем, что** существует такой базис e' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$. Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$\begin{gathered}A(x,x) = \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\ = \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{m_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{m_0} + \\ + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N}, \\ k\neq k_0,m_0 \vee m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \\ = \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \overline{\tilde{A}_{k_0,m_0}} \cdot \overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N}, \\ k\neq k_0,m_0 \vee m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.\end{gathered}$$

Очевидно, можно указать такой столбец $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N$, что:

$$\begin{gathered}\tilde{x}^{k_0} = \frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big), \\ \tilde{x}^{m_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}, \\ \tilde{x}^j = \tilde{\tilde{x}}^j \text{ при: } j = \overline{1,N},\ j \neq k_0,\ m_0.\end{gathered}$$

Тогда:

$$\begin{gathered}A(x,x) = \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\Big(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} - \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\Big)\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) + \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\Big(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} + \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\Big)\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) + \Big(\cdots\Big) = \\ = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\tilde{\tilde{x}}^{m_0} + \Big(\cdots\Big).\end{gathered}$$

Обозначим: $\beta^{k_0}_{k_0} = \frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}$, $\beta^{k_0}_{m_0} = -\frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}$, $\beta^{k_0}_{m} = 0$ при: $m = \overline{1,N}$, $m \neq k_0$, m_0; $\beta^{m_0}_{k_0} = 1$, $\beta^{m_0}_{m_0} = 1$, $\beta^{m_0}_{m} = 0$ при: $m = \overline{1,N}$, $m \neq k_0$, m_0; $\beta^j_m = \delta^j_m$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \neq k_0$, m_0 и $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 2\frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|} \neq 0$, $\tilde{x} = \beta\tilde{\tilde{x}}$. Так как $\det(\beta) \neq 0$, то существует единственный базис e' пространства L, удовлетворяющий условию: $\alpha(e,e') = \beta$. Тогда: $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x} = \alpha(e',e)[x](e) = [x](e')$. Следовательно: $[A]_{k_0,k_0}(e') = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right| \neq 0$. Согласно утверждению первого пункта, существует такой базис e'' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e'')$, $[A]_{k,k_0}(e'') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

3. **Докажем, что** существует такой номер $k_0 = \overline{1,N}$ и такой базис e' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$. Пусть $\exists k = \overline{1,N}(\tilde{A}_{k,k} \neq 0)$. Выберем такой номер k_0, что: $k_0 = \overline{1,N}$, $\tilde{A}_{k_0,k_0} \neq 0$. Согласно утверждению первого пункта, существует такой базис e' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$. Пусть: $\forall k = \overline{1,N}(\tilde{A}_{k,k} = 0)$, $\exists k = \overline{1,N}\exists m = \overline{1,N}(k < m \wedge \tilde{A}_{k,m} \neq 0)$. Выберем такие номера k_0, m_0, что: k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $k_0 < m_0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$. Тогда: k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $k_0 < m_0$, $\tilde{A}_{k_0,k_0}$, $\tilde{A}_{m_0,m_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$. Согласно утверждению второго пункта, существует такой базис e' пространства L, что: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$. Пусть $\forall k = \overline{1,N}\forall m = \overline{1,m}(k \leqslant m \implies \tilde{A}_{k,m} = 0)$. Тогда: $\tilde{A}_{k,m} = \overline{\tilde{A}_{m,k}} = 0$ при: k, $m = \overline{1,N}$, $m \leqslant k$. Выберем такой номер k_0, что $k_0 = \overline{1,N}$. Обозначим, $e' = e$. Тогда: $[A]_{k_0,k}(e')$, $[A]_{k,k_0}(e') = 0$ при: $k = \overline{1,N}$, $k \neq k_0$.

Рассуждая по индукции и используя утверждение третьего пункта, нетрудно доказать, что справедливо утверждение теоремы. $\square$

Теорема (закон инерции для эрмитовых полуторалинейных форм)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*.*

Пусть: e *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица,* p_1 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*,* n_1 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*.*

Пусть: e' *— базис пространства* L*,* $[A](e')$ *— диагональная матрица,* p_2 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*,* n_2 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*. Тогда:* $p_1 = p_2$*,* $n_1 = n_2$*.*

Доказательство. Обозначим: $\tilde{\lambda}_k = [A]_{k,k}(e)$ при $k = \overline{1,N}$; $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} = [A]_{k',k'}(e')$ при $k' = \overline{1,N}$. Очевидно: p_1, n_1, p_2, $n_2 = \overline{0,N}$.

Предположим, что $p_1 < p_2$**.** Тогда: $p_1 = \overline{0, N-1}$, $p_2 = \overline{1,N}$. Без ограничения общности можно считать, что: $\tilde{\lambda}_k \leqslant 0$ при $k = \overline{p_1+1, N}$; $\tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} > 0$ при $k' = \overline{1,p_2}$.

Пусть $p_1 \neq 0$**.** Тогда $p_1 = \overline{1, N-1}$. Покажем, что существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, $x \neq \theta$, $A(e_k, x) = 0$ при $k = \overline{1,p_1}$.

Пусть x — искомый вектор. Так как $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, то можно указать такой столбец $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{p_2}$, что $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$. Так как $x \neq \theta$, то $\exists k' = \overline{1,p_2}\big(\tilde{\tilde{x}}^{k'} \neq 0\big)$. Пусть $k = \overline{1,p_1}$. Так как $A(e_k, x) = 0$, то:

$$0 = A(e_k, x) = A\Big(e_k, \sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}\Big) = \sum_{k'=\overline{1,p_2}} A(e_k, e'_{k'})\tilde{\tilde{x}}^{k'}.$$

Так как $p_1 < p_2$, то можно указать такой столбец $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{p_2}$, что: $\exists k' = \overline{1,p_2}\big(\tilde{\tilde{x}}^{k'} \neq 0\big)$, $\sum\limits_{k'=\overline{1,p_2}} A(e_k, e'_{k'})\tilde{\tilde{x}}^{k'} = 0$ при $k = \overline{1,p_1}$. Обозначим, $x = \sum\limits_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}$. Тогда x — искомый вектор.

Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = A\Big(\sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{x}^k e_k, x\Big) = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A(e_k, x)\overline{\tilde{x}^k} =$$
$$= \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A\Big(e_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{x}^m e_m\Big)\overline{\tilde{x}^k} = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \tilde{\lambda}_k \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0;$$
$$A(x,x) = A\Big(\sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}, \sum_{m'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{m'} e'_{m'}\Big) = \sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{\lambda}}_{k'} \left|\tilde{\tilde{x}}^{k'}\right|^2 > 0.$$

Пусть $p_1 = 0$**.** Обозначим, $\tilde{x} = [e'_1](e)$. Тогда:

$$A(e'_1, e'_1) = \sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{\lambda}_k \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0;$$
$$A(e'_1, e'_1) = \tilde{\tilde{\lambda}}_1 > 0.$$

Итак, $p_2 \leqslant p_1$**.**

Аналогично получаем, что $p_1 \leqslant p_2$. Так как: $p_1 \leqslant p_2$, $p_2 \leqslant p_1$, то $p_1 = p_2$. Аналогично получаем, что $n_1 = n_2$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, e — базис пространства L, $[A](e)$ — диагональная матрица, p — количество положительных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$, n — количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$. Будем говорить, что (p, n) — сигнатура формы A.

Теорема (критерий Сильвестра). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*,* e *— базис пространства* L*,* $\tilde{A} = [A](e)$*.*

1. Справедливо утверждение: $A > 0$ *тогда и только тогда, когда:* $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ *при* $k = \overline{1, N}$*.*

2. Справедливо утверждение: $A < 0$ *тогда и только тогда, когда:* $\operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(\tilde{A})\bigr) = (-1)^k$ *при* $k = \overline{1, N}$*.*

3. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$*,* $\neg(A > 0)$*,* $\neg(A < 0)$*. Тогда* A *— знакопеременная форма.*

Доказательство. **Докажем вспомогательное утверждение.** Пусть: $N \geqslant 2$, $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$. Существует такой базис e' пространства L, что: $e'_k = e_k$, $[A]_{N,k}(e')$, $[A]_{k,N}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$.

Покажем, что существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L$, $x \neq \theta$, $A(e_k, x) = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$.

Пусть x — искомый вектор. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Так как $x \neq \theta$, то $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$. Пусть $k = \overline{1, N-1}$. Так как $A(e_k, x) = 0$, то:

$$0 = A(e_k, x) = A\Bigl(e_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{x}^m e_m\Bigr) = \sum_{m=\overline{1,N}} A(e_k, e_m)\tilde{x}^m.$$

Так как $N - 1 < N$, то можно указать такой столбец $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, что: $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,N}} A(e_k, e_m)\tilde{x}^m = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Обозначим, $x = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} \tilde{x}^k e_k$. Тогда x — искомый вектор.

Предположим, что $e_1, \ldots, e_{N-1}, x$ — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \ldots, e_{N-1}$ — линейно независимые векторы, то можно указать такой столбец $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N-1}$, что $x = \sum\limits_{k=\overline{1,N-1}} \tilde{x}^k e_k$. Тогда $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$. Так как $x \neq \theta$, то $A(x, x) > 0$. Очевидно:

$$A(x, x) = A\Bigl(\sum_{k=\overline{1,N-1}} \tilde{x}^k e_k, x\Bigr) = 0.$$

Итак, $e_1, \ldots, e_{N-1}, x$ — линейно независимые векторы. Обозначим: $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N-1}$; $e'_N = x$. Очевидно, e' — искомый базис.

Докажем вспомогательное утверждение. Пусть: $N \geqslant 2$, e' — базис пространства L, $e'_k = e_k$, $[A]_{N,k}(e')$, $[A]_{k,N}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Тогда: $\Delta_N(\tilde{A}) = \bigl|\det\bigl(\alpha(e', e)\bigr)\bigr|^2 \Delta_{N-1}(\tilde{A}) A(e'_N, e'_N)$. Очевидно:

$$\begin{aligned}
\Delta_N(\tilde{A}) &= \det(\tilde{A}) = \det\Bigl(\overline{\alpha(e', e)^T}[A](e')\alpha(e', e)\Bigr) = \bigl|\det\bigl(\alpha(e', e)\bigr)\bigr|^2 \det\bigl([A](e')\bigr) = \\
&= \bigl|\det\bigl(\alpha(e', e)\bigr)\bigr|^2 \Delta_{N-1}\bigl([A](e')\bigr)[A]_{N,N}(e') = \bigl|\det\bigl(\alpha(e', e)\bigr)\bigr|^2 \Delta_{N-1}(\tilde{A}) A(e'_N, e'_N).
\end{aligned}$$

1. **Пусть** $A > 0$**. Покажем, что:** $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ **при** $k = \overline{1, N}$**.**

Пусть $N = 1$. Тогда: $\Delta_1(\tilde{A}) = \tilde{A}_{1,1} = A(e_1, e_1) > 0$.

Пусть: $N \geqslant 2$, утверждение справедливо для любого линейного пространства размерности $N - 1$. Так как: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$, то: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N-1}$; существует такой базис e' пространства L, что: $e'_k = e_k$, $[A]_{N,k}(e')$, $[A]_{k,N}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Тогда: $\Delta_N(\tilde{A}) = \left|\det\bigl(\alpha(e', e)\bigr)\right|^2 \Delta_{N-1}(\tilde{A}) A(e'_N, e'_N) > 0$.

Пусть: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ **при** $k = \overline{1, N}$**. Покажем, что** $A > 0$**.**

Пусть $N = 1$. Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда: $A(x, x) = \tilde{A}_{1,1} \left|\tilde{x}^1\right|^2 = \Delta_1(\tilde{A}) \left|\tilde{x}^1\right|^2 > 0$.

Пусть: $N \geqslant 2$, утверждение справедливо для любого линейного пространства размерности $N - 1$. Так как: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N-1}$, то: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$. Тогда существует такой базис e' пространства L, что: $e'_k = e_k$, $[A]_{N,k}(e')$, $[A]_{k,N}(e') = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Следовательно:

$$A(e'_N, e'_N) = \frac{\Delta_N(\tilde{A})}{\left|\det\bigl(\alpha(e', e)\bigr)\right|^2 \Delta_{N-1}(\tilde{A})} > 0.$$

Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{\tilde{x}} = [x](e')$. Тогда:

$$A(x, x) = A\Bigl(\sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{x}}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{x}}^m e'_m\Bigr) =$$

$$A\Bigl(\sum_{k=\overline{1,N-1}} \tilde{\tilde{x}}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N-1}} \tilde{\tilde{x}}^m e'_m\Bigr) + A(e'_N, e'_N) \left|\tilde{\tilde{x}}^N\right|^2 > 0.$$

2. Обозначим: $B(x, y) = -A(x, y)$ при x, $y \in L$. Тогда B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Обозначим, $\tilde{B} = [B](e)$. Тогда $\tilde{B} = -\tilde{A}$.

Пусть $A < 0$. Тогда $B > 0$. Следовательно: $\Delta_k(\tilde{B}) > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда: $\operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(\tilde{A})\bigr) = \operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(-\tilde{B})\bigr) = \operatorname{sgn}\bigl((-1)^k \Delta_k(\tilde{B})\bigr) = (-1)^k$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть: $\operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(\tilde{A})\bigr) = (-1)^k$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда: $\Delta_k(\tilde{B}) = \Delta_k(-\tilde{A}) = (-1)^k \Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Следовательно, $B > 0$. Тогда $A < 0$.

3. Согласно теореме Лагранжа, существует такой базис e' пространства L, что $[A](e')$ — диагональная матрица. Обозначим: $\tilde{\tilde{\lambda}}_k = [A]_{k,k}(e')$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\tilde{\tilde{\lambda}}_1 \cdots \tilde{\tilde{\lambda}}_N = \det\bigl([A](e')\bigr) = \det\Bigl(\overline{\alpha(e, e')^T} \tilde{A} \alpha(e, e')\Bigr) = \left|\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr)\right|^2 \det(\tilde{A}) \neq 0.$$

Следовательно: $\tilde{\tilde{\lambda}}_k \neq 0$ при $k = \overline{1, N}$.

Предположим, что: $\tilde{\tilde{\lambda}}_k > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда $A > 0$ (что противоречит тому, что $\neg(A > 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N} \Bigl(\tilde{\tilde{\lambda}}_k < 0\Bigr)$.

Предположим, что: $\tilde{\tilde{\lambda}}_k < 0$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда $A < 0$ (что противоречит тому, что $\neg(A < 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N} \Bigl(\tilde{\tilde{\lambda}}_k > 0\Bigr)$. Так как: $\exists k = \overline{1, N} \Bigl(\tilde{\tilde{\lambda}}_k < 0\Bigr)$, $\exists k = \overline{1, N} \Bigl(\tilde{\tilde{\lambda}}_k > 0\Bigr)$, то A — знакопеременная форма. □

Лекция 10. Линейные евклидовы и линейные псевдоевклидовы пространства

10.1. Линейные евклидовы пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $F\colon L \times L \Longrightarrow \mathbb{K}$. Далее будем писать (x, y) вместо $F(x, y)$. Пусть:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ при x, $y \in L$ (очевидно: $(x, x) = \overline{(x, x)}$ при $x \in L$);
2. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$;
3. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$;
4. $(x, x) > 0$ при: $x \in L$, $x \neq \theta$.

Будем говорить, что F — скалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что (L, F) — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть F — скалярное произведение в пространстве L.
   Пусть x_1, x_2, $y \in L$. Тогда: $(x_1 + x_2, y) = \overline{(y, x_1 + x_2)} = \overline{(y, x_1) + (y, x_2)} = \overline{(y, x_1)} + \overline{(y, x_2)} = (x_1, y) + (x_2, y)$.
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$. Тогда: $(\lambda x, y) = \overline{(y, \lambda x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$.
   Очевидно, F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.
2. Пусть F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Очевидно, F — скалярное произведение в пространстве L.

Утверждение (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда:* $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$ *при* x, $y \in H$.

Доказательство. Пусть: x, $y \in H$, $(x, y) = 0$. Тогда:

$$|(x, y)| = 0 \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Пусть x, $y \in H$, $(x, y) \neq 0$. Пусть: $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = t\frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0,\\
(x, x) + (x, \lambda y) + (\lambda y, x) + (\lambda y, \lambda y) \geqslant 0,\\
(x, x) + \lambda(x, y) + \overline{\lambda}(y, x) + \overline{\lambda}\lambda(y, y) \geqslant 0,\\
(x, x) + \lambda(x, y) + \overline{\lambda} \cdot \overline{(x, y)} + \overline{\lambda}\lambda(y, y) \geqslant 0,\\
(x, x) + 2\,|(x, y)|\,t + (y, y)t^2 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

В силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered}
4\,|(x, y)|^2 - 4(x, x)(y, y) \leqslant 0,\\
|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \quad \square
\end{gathered}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть $x \in H$. Обозначим, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Будем говорить, что $\|x\|$ — норма вектора x. Справедливы утверждения:

1. $\|x\| > 0$ при: $x \in H$, $x \neq \theta$ (очевидно: $\|\theta\| = \|0 \cdot \theta\| = 0 \cdot \|\theta\| = 0$).
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ при x, $y \in H$ (неравенство треугольника);

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$.
Пусть: $x \in H$**,** $x \neq \theta$**.** Тогда:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} > 0.$$

Пусть x**,** $y \in H$**.** Тогда:

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} = \sqrt{(x,x) + 2\operatorname{Re}\big((x,y)\big) + (y,y)} \leqslant \sqrt{(x,x) + 2\,|(x,y)| + (y,y)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \sqrt{\big(\|x\| + \|y\|\big)^2} = \|x\| + \|y\|\,.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$**,** $x \in H$**.** Тогда:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2\,(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть x, $y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x,y) = 0$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов пространства H, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортонормированная последовательность векторов пространства H, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$; $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1,r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов пространства H, $x_1, \ldots, x_r \neq \theta$. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.
Пусть: $C \in \mathbb{K}^r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} C^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Так как $x_k \neq \theta$, то:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} C^m x_m\Big) = (x_k, \theta),$$
$$C^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$C^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

3. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q (x \perp u)$.

4. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональная последовательность подмножеств пространства H, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональная последовательность подпространств пространства H. Тогда $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.
Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Big) = (x_k, \theta),$$
$$(x_k, x_k) = 0,$$
$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

6. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x \colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Будем говорить, что $Q^\perp$ — ортогональное дополнение к множеству Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp$ — подпространство пространства H.
Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$.
Пусть: x_1, $x_2 \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, (x_1, u), $(x_2, u) = 0$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.
Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(x,u) = 0$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x,u) = 0$. Тогда $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Пусть $Q \subseteq H$. Очевидно, $Q \perp Q^\perp$.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда $g(e)$ — матрица скалярного произведения как полуторалинейной формы. Так как скалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то $g(e)$ — эрмитова матрица. Так как скалярное произведение есть положительная эрмитова полуторалинейная форма, то (согласно критерию Сильвестра) $\det\bigl(g(e)\bigr) > 0$.

Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \|e_k\|^2$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e) = \tilde{I}$.

Пусть $g(e) = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: x, $y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда $(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m$. Пусть e — ортогональный базис, тогда $(x, y) = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} \|e_k\|^2\, \overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k$. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $(x, y) = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} \overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k$.

Согласно теореме Лагранжа существует такой базис e пространства H, что $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис. Обозначим: $e'_k = \frac{1}{\|e_k\|}e_k$ при $k = \overline{1,N}$. Очевидно, e' — ортонормированный базис пространства H.

2. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$ $\bigl(g(e') = \overline{\alpha(e,e')^T}g(e)\alpha(e,e')\bigr)$. Геометрический объект g называют ковариантным метрическим тензором пространства H.

Пусть e, e' — ортонормированные базисы. Тогда: $g(e') = \overline{\alpha(e,e')^T}g(e)\alpha(e,e')$, $\tilde{I} = \overline{\alpha(e,e')^T}\tilde{I}\alpha(e,e')$, $\tilde{I} = \overline{\alpha(e,e')^T}\alpha(e,e')$ (т. е. если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $\alpha(e,e')$ — унитарная матрица, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $\alpha(e,e')$ — ортогональная матрица).

Пусть: e — ортонормированный базис, $\tilde{I} = \overline{\alpha(e,e')^T}\alpha(e,e')$ (т. е. если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $\alpha(e,e')$ — унитарная матрица, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $\alpha(e,e')$ — ортогональная матрица). Тогда e' — ортонормированный базис.

3. Пусть e — базис пространства H. Обозначим, $\bigl\{g^{k,m}(e)\bigr\}^{k,m=\overline{1,N}} = g(e)^{-1}$. Так как $g(e)$ — эрмитова матрица, то $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица. Так как $\det\bigl(g(e)\bigr) > 0$, то $\det\bigl(g(e)^{-1}\bigr) > 0$.

Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{\|e_k\|^2}$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e)^{-1} = \tilde{I}$.

Пусть $g(e)^{-1} = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, k, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(e_m, x) = (e_m, \tilde{x}^n e_n) = \tilde{x}^n(e_m, e_n) = g_{m,n}(e)\tilde{x}^n;$$
$$g^{k,m}(e)(e_m, x) = g^{k,m}(e)g_{m,n}(e)\tilde{x}^n,$$
$$g^{k,m}(e)(e_m, x) = \delta^k_n\tilde{x}^n,$$
$$g^{k,m}(e)(e_m, x) = \tilde{x}^k;$$
$$x = \tilde{x}^k e_k = g^{k,m}(e)(e_m, x)e_k.$$

Итак: $\tilde{x}^k = g^{k,m}(e)(e_m, x)$ при $k = \overline{1,N}$; $x = g^{k,m}(e)(e_m, x)e_k$. Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $\tilde{x}^k = \frac{(e_k,x)}{\|e_k\|^2}$ при $k = \overline{1,N}$; $x = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{\|e_k\|^2} e_k$. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда: $\tilde{x}^k = (e_k,x)$ при $k = \overline{1,N}$; $x = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} (e_k,x)e_k$.

4. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда:

$$g(e')^{-1} = \left(\overline{\alpha(e,e')^T} g(e)\alpha(e,e')\right)^{-1} = \alpha(e',e)g(e)^{-1}\overline{\alpha(e',e)^T}.$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e)\alpha^{k'}_k(e',e)\overline{\alpha^{m'}_m(e',e)}$ при k', $m' = \overline{1,N}$. Геометрический объект $\{g(e)^{-1}\}_e$ называют контравариантным метрическим тензором пространства H.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $Q \subseteq H$, $x \in H$. Пусть: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$. Будем говорить, что x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество Q. Будем говорить, что $x - x_1$ — перпендикуляр вектора x к множеству Q.

2. Пусть: $Q \subseteq H$, $x \in H$. Пусть x_1', x_1'' — ортогональные проекции вектора x на множество Q. Тогда: x_1', $x_1'' \in Q$, $x - x_1'$, $x - x_1'' \perp Q$. Следовательно:

$$(x_1' - x_1'', x_1' - x_1'') = \big((x - x_1'') - (x - x_1'), x_1' - x_1''\big) =$$
$$= \big((x - x_1''), x_1'\big) - \big((x - x_1''), x_1''\big) - \big((x - x_1'), x_1'\big) + \big((x - x_1'), x_1''\big) = \theta,$$
$$x_1' - x_1'' = \theta,$$
$$x_1' = x_1''.$$

Пусть x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество Q. Очевидно, $x - x_1$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$.

3. Пусть Q — подпространство пространства H. Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, $y \in H$, y_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: x_1, $y_1 \in Q$, $x - x_1$, $y - y_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $x_1 + y_1 \in Q$, $(x + y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \in Q^\perp$. Тогда $x_1 + y_1$ — ортогональная проекция вектора $x + y$ на подпространство Q.

Пусть: $\lambda \in K$, $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $\lambda x_1 \in Q$, $\lambda x - \lambda x_1 = \lambda(x - x_1) \in Q^\perp$. Тогда λx_1 — ортогональная проекция вектора λx на подпространство Q.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$.

Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Обозначим, $P_Q x = x_1$. Функцию P_Q называют оператором ортогонального проектирования на подпространство Q.

Очевидно: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H,H)$, $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, $P_Q x = x$ при $x \in Q$.

Пусть $x \in H$. Тогда: $(P_Q P_Q)x = P_Q\big(P_Q x\big) = P_Q x$. Следовательно, $P_Q P_Q = P_Q$.

Пусть $y \in Q$. Тогда: $y \in H$, $y = P_Q y$. Следовательно, $y \in \mathrm{R}(P_Q)$. Тогда $Q \subseteq \mathrm{R}(P_Q)$. Так как: $Q \subseteq \mathrm{R}(P_Q)$, $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, то $Q = \mathrm{R}(P_Q)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$.

Очевидно: $Q^\perp$ — подпространство пространства H, $\forall x \in H \exists x_2 (x_2 \in Q^\perp \wedge x - x_2 \perp Q^\perp)$, $P_{Q^\perp}(x) = x - P_Q x$ при $x \in H$.

Так как $Q \perp Q^\perp$, то Q, $Q^\perp$ — линейно независимые подпространства. **Покажем, что** $Q + Q^\perp = H$. Очевидно, $Q + Q^\perp \subseteq H$. Пусть $x \in H$. Тогда: $P_Q x \in Q$, $x - P_Q x \in Q^\perp$,

$x = P_Q x + (x - P_Q x)$. Следовательно, $x \in Q + Q^\perp$. Тогда $H \subseteq Q + Q^\perp$. Так как: $Q + Q^\perp \subseteq H$, $H \subseteq Q + Q^\perp$, то $Q + Q^\perp = H$.

Покажем, что $Q = (Q^\perp)^\perp$. Очевидно, $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Пусть $x \in (Q^\perp)^\perp$. Тогда: $x \in (Q^\perp)^\perp$, $P_Q x \in Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Следовательно, $x - P_Q x \in (Q^\perp)^\perp$. Так как $x - P_Q x \in Q^\perp$, то: $(x - P_Q x, x - P_Q x) = 0$, $x - P_Q x = \theta$, $x = P_Q x$, $x \in Q$. Тогда $(Q^\perp)^\perp \subseteq Q$. Так как: $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$, $(Q^\perp)^\perp \subseteq Q$, то $Q = (Q^\perp)^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\dim(Q) = 0$. Очевидно: $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \land x - x_1 \perp Q)$, $P_Q x = \theta$ при $x \in H$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— подпространство пространства* H*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(Q) = N_1$*;* G *— ковариантный метрический тензор подпространства* Q*,* e *— базис подпространства* Q*. Тогда:* $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \land x - x_1 \perp Q)$*,* $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x) e_\alpha$ *при* $x \in H$*.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Обозначим, $x_1 = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x) e_\alpha$. Очевидно, $x_1 \in Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда:

$$\begin{aligned}(x - x_1, u) = (x, u) - (x_1, u) = (x, u) - \big(G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x) e_\alpha, u\big) = (x, u) - \overline{G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)}(e_\alpha, u) = \\ = (x, u) - G^{\beta,\alpha}(x, e_\beta)(e_\alpha, u) = (x, u) - \big(x, G^{\beta,\alpha}(e_\alpha, u) e_\beta\big) = (x, u) - (x, u) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $x_1 \perp Q$. Очевидно: $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \land x - x_1 \perp Q)$, $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x) e_\alpha$ при $x \in H$. □

Теорема (процесс ортогонализации Грама—Шмидта)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы пространства* H*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$*.*

Существует последовательность векторов $y_1, \ldots, y_r$*, удовлетворяющая условиям:* $y_1, \ldots, y_k$ *— ортогональный базис линейной оболочки* $L(x_1, \ldots, x_k)$ *при* $k = \overline{1, r}$*;* $y_1 = \lambda_1 x_1$*, если* $r \geqslant 2$*, то:* $y_k = \lambda_k \Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{\|y_m\|^2} y_m\Big)$ *при* $k = \overline{2, r}$*.*

Доказательство. Пусть $r = 1$. Обозначим, $y_1 = \lambda_1 x_1$. Очевидно, y_1 — искомая последовательность.

Пусть: $r \geqslant 2$, существует последовательность векторов $y_1, \ldots, y_{r-1}$, удовлетворяющая условиям: $y_1, \ldots, y_k$ — ортогональный базис линейной оболочки $L(x_1, \ldots, x_k)$ при $k = \overline{1, r-1}$; $y_1 = \lambda_1 x_1$, если $r - 1 \geqslant 2$, то: $y_k = \lambda_k \Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{\|y_m\|^2} y_m\Big)$ при $k = \overline{2, r-1}$.

Обозначим, $y_r = \lambda_r \Big(x_r - \sum\limits_{m=\overline{1,r-1}} \frac{(y_m, x_r)}{\|y_m\|^2} y_m\Big)$.

Очевидно, $y_r \in L(x_1, \ldots, x_r)$. Пусть $k = \overline{1, r-1}$. Тогда:

$$(y_k, y_r) = \Bigg(y_k, \lambda_r \Bigg(x_r - \sum_{m=\overline{1,r-1}} \frac{(y_m, x_r)}{\|y_m\|^2} y_m\Bigg)\Bigg) = \lambda_r \Bigg((y_k, x_r) - \frac{(y_k, x_r)}{\|y_k\|^2} \|y_k\|^2\Bigg) = 0.$$

Предположим, что $y_r = \theta$. Так как $\lambda_r \neq 0$, то:

$$\lambda_r \Bigg(x_r - \sum_{m=\overline{1,r-1}} \frac{(y_m, x_r)}{\|y_m\|^2} y_m\Bigg) = \theta,$$

$$x_r - \sum_{m=\overline{1,r-1}} \frac{(y_m, x_r)}{\|y_m\|^2} y_m = \theta,$$
$$x_r = \sum_{m=\overline{1,r-1}} \frac{(y_m, x_r)}{\|y_m\|^2} y_m,$$
$$x_r \in L(x_1, \ldots, x_{r-1}).$$

Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы (что противоречит условию). Итак, $y_r \neq \theta$.

Очевидно: $y_1, \ldots, y_r \in L(x_1, \ldots, x_r)$, $y_1, \ldots, y_r$ — ортогональная последовательность векторов, $y_1, \ldots, y_r \neq \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\dim\bigl(L(x_1, \ldots, x_r)\bigr) = r$. Тогда $y_1, \ldots, y_r$ — ортогональный базис линейной оболочки $L(x_1, \ldots, x_r)$. Очевидно, $y_1, \ldots, y_r$ — искомая последовательность. □

10.2. Линейные псевдоевклидовы пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\det\bigl([F](e)\bigr) \neq 0$ при: e — базис пространства L. Далее будем писать (x, y) вместо $F(x, y)$. Будем говорить, что F — псевдоскалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что (L, F) — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $x \in H$. Будем говорить, что x — изотропный вектор, если $(x, x) = 0$. Будем говорить, что x — неизотропный вектор, если $(x, x) \neq 0$.

2. Пусть $Q \subseteq H$. Будем говорить, что Q — изотропное множество, если $\forall x\bigl(x \in Q \implies (x, x) = 0\bigr)$. Будем говорить, что Q — неизотропное множество, если $\forall x\bigl(x \in Q \land x \neq \theta \implies (x, x) \neq 0\bigr)$.

3. Пусть x, $y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональная последовательность векторов пространства H, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортонормированная последовательность векторов пространства H, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $(x_k, x_k) = \pm 1$ при $k = \overline{1, r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональная последовательность векторов пространства H, $x_1, \ldots, x_r$ — неизотропные векторы. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $C \in \mathbb{K}^r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} C^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как $(x_k, x_k) \neq 0$, то:

$$\Bigl(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} C^m x_m\Bigr) = (x_k, \theta),$$
$$C^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$C^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

5. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q(x \perp u)$.

6. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

7. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональная последовательность подмножеств пространства H, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональная последовательность подпространств пространства H, $Q_1, \ldots, Q_r$ — неизотропные подпространства. Тогда $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Big) = (x_k, \theta),$$
$$(x_k, x_k) = 0,$$
$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

8. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x\colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Будем говорить, что $Q^\perp$ — псевдоортогональное дополнение к множеству Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$.

Пусть: x_1, $x_2 \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, (x_1, u), $(x_2, u) = 0$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$, $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(x, u) = 0$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = 0$. Тогда $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Пусть $Q \subseteq H$. Очевидно, $Q \perp Q^\perp$.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда $g(e)$ — матрица псевдоскалярного произведения как полуторалинейной формы. Так как псевдоскалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то $g(e)$ — эрмитова матрица. По определению псевдоскалярного произведения, $\det\big(g(e)\big) \neq 0$.

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = (e_k, e_k)$ при $k = \overline{1,N}$. Так как $\det\big(g(e)\big) \neq 0$, то $e_1, \ldots, e_N$ — неизотропные векторы.

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Пусть: x, $y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда $(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m$. Пусть e — псевдоортогональный базис, тогда $(x, y) = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} (e_k, e_k)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k$.

Согласно теореме Лагранжа существует такой базис e пространства H, что $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис. Обозначим: $e'_k = \frac{1}{\sqrt{|(e_k, e_k)|}} e_k$ при $k = \overline{1,N}$. Очевидно, e' — псевдоортонормированный базис пространства H.

2. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$ $(g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e'))$. Геометрический объект g называют ковариантным метрическим тензором пространства H.

3. Пусть e — базис пространства H. Обозначим, $\big\{g^{k,m}(e)\big\}^{k,m=\overline{1,N}} = g(e)^{-1}$. Так как $g(e)$ — эрмитова матрица, то $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица. Так как $\det\big(g(e)\big) \neq 0$, то $\det\big(g(e)^{-1}\big) \neq 0$.

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{(e_k, e_k)}$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Пусть: $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, k, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(e_m, x) = (e_m, \tilde{x}^n e_n) = \tilde{x}^n (e_m, e_n) = g_{m,n}(e)\tilde{x}^n;$$
$$g^{k,m}(e)(e_m, x) = g^{k,m}(e) g_{m,n}(e)\tilde{x}^n,$$
$$g^{k,m}(e)(e_m, x) = \delta^k_n \tilde{x}^n,$$
$$g^{k,m}(e)(e_m, x) = \tilde{x}^k;$$
$$x = \tilde{x}^k e_k = g^{k,m}(e)(e_m, x) e_k.$$

Итак: $\tilde{x}^k = g^{k,m}(e)(e_m, x)$ при $k = \overline{1,N}$; $x = g^{k,m}(e)(e_m, x)e_k$. Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $\tilde{x}^k = \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}$ при $k = \overline{1,N}$; $x = \sum\limits_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)} e_k$.

4. Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда:

$$g(e')^{-1} = \left(\overline{\alpha(e,e')^T} g(e) \alpha(e,e')\right)^{-1} = \alpha(e',e) g(e)^{-1} \overline{\alpha(e',e)^T}.$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e) \alpha^{k'}_k(e',e) \overline{\alpha^{m'}_m(e',e)}$ при k', $m' = \overline{1,N}$. Геометрический объект $\left\{g(e)^{-1}\right\}_e$ называют контравариантным метрическим тензором пространства H.

Лекция 11. Сопряжённый оператор

11.1. Связь между векторами и линейными формами в евклидовых пространствах

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $x_1,\ x_2 \in H$*,* $(x_1, y) = (x_2, y)$ *при* $y \in H$*. Тогда* $x_1 = x_2$*.*

Доказательство. Очевидно: $(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_1 - x_2) - (x_2, x_1 - x_2) = 0$. Тогда $x_1 - x_2 = \theta$. Следовательно, $x_1 = x_2$. □

Замечание (дираковский формализм). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x \in H$. Обозначим: $\langle x|\,(u) = (x, u)$ при $u \in H$. Очевидно, $\langle x|$ — линейная форма в пространстве H. Обозначим, $|x\rangle = x$.

Пусть $x_1,\ x_2 \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $\langle x_1 + x_2|\, u = (x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = \langle x_1|\, u + \langle x_2|\, u = \big(\langle x_1| + \langle x_2|\big)u$. Следовательно, $\langle x_1 + x_2| = \langle x_1| + \langle x_2|$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $\langle \lambda x|\, u = (\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = \overline{\lambda}\,\langle x|\,(u) = \big(\overline{\lambda}\,\langle x|\big)u$. Следовательно, $\langle \lambda x| = \overline{\lambda}\,\langle x|$.

Пусть: $x_1,\ x_2 \in H$, $\langle x_1| = \langle x_2|$. Пусть $u \in H$. Тогда: $(x_1, u) = \langle x_1|\, u = \langle x_2|\, u = (x_2, u)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть $x,\ y \in H$. Тогда: $\langle x|\,|y\rangle = \langle x|\, y = (x, y)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $x \in H$*,* e *— базис пространства* H*.*

1. Пусть: $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*. Тогда:* F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ $\big([F](e) = \overline{[x](e)}^T g(e)\big)$*.*

2. Пусть: F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ $\big([F](e) = \overline{[x](e)}^T g(e)\big)$*. Тогда:* $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, F — линейная форма в пространстве H. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[F]_k(e) = F(e_k) = (x, e_k) = \big([x]^m(e)e_m, e_k\big) = \overline{[x]^m(e)}(e_m, e_k) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e).$$

2. Пусть $u \in H$. Тогда:

$$F(u) = [F]_k(e)[u]^k(e) = \big(\overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e)\big)[u]^k(e) = g_{\overline{m},k}(e)\overline{[x]^m(e)}[u]^k(e) = (x, u). \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; F — линейная форма в пространстве H, e — базис пространства H.

Пусть: $x \in H$, $[x]^m(e) = \overline{[F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)}$ при $m = \overline{1, N}$. Пусть $k = \overline{1, N}$ $\big([x](e) = \overline{[F](e)g(e)^{-1}}\big)$. Тогда: $\overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e) = \overline{\overline{[F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)}}g_{\overline{m},k}(e) = [F]_n(e)\delta^n_k = [F]_k(e)$. Следовательно, $F = \langle x|$.

11.2. Связь между линейными операторами и полуторалинейными формами в евклидовых пространствах

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$. Обозначим: $F(x, y) = (x, Ay)$ при $x,\ y \in H$. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H.

Пусть: A_1, $A_2 \in \mathrm{Lin}(H,H)$, $F_1(x,y)=(x,A_1y)$, $F_2(x,y)=(x,A_2y)$ при x, $y\in H$; $F_1=F_2$. Пусть x, $y\in H$. Тогда: $(x,A_1y)=F_1(x,y)=F_2(x,y)=(x,A_2y)$. В силу произвольности выбора $x\in H$ получаем, что: $A_1y=A_2y$. В силу произвольности выбора $y\in H$ получаем, что: $A_1=A_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N\in\mathbb{N}$*,* $\dim(H)=N$*;* $A\in\mathrm{Lin}(H,H)$*,* e *— базис пространства* H*.*

1. Пусть: $F(x,y)=(x,Ay)$ *при* x*,* $y\in H$*. Тогда:* F *— полуторалинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k},m}(e)=g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)$ *при* k*,* $m=\overline{1,N}$ $([F](e)=g(e)[A](e))$*.*

2. Пусть: F *— полуторалинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k},m}(e)=g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)$ *при* k*,* $m=\overline{1,N}$ $([F](e)=g(e)[A](e))$*. Тогда:* $F(x,y)=(x,Ay)$ *при* x*,* $y\in H$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H. Пусть k, $m=\overline{1,N}$. Тогда:

$$[F]_{\overline{k},m}(e)=F(e_k,e_m)=(e_k,Ae_m)=(e_k,[A]^n_m(e)e_n)=[A]^n_m(e)(e_k,e_n)=g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e).$$

2. Пусть x, $y\in H$. Тогда:

$$F(x,y)=[F]_{\overline{k},m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)=\big(g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)\big)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)=$$
$$=g_{\overline{k},n}(e)\overline{[x]^k(e)}\big([A]^n_m(e)[y]^m(e)\big)=g_{\overline{k},n}(e)\overline{[x]^k(e)}[Ay]^n(e)=(x,Ay).\quad\square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(H)=N$; F — полуторалинейная форма в пространстве H.

Пусть: $A\in\mathrm{Lin}(H,H)$, $[A]^n_m(e)=g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)$ при n, $m=\overline{1,N}$ $([A](e)=g(e)^{-1}[F](e))$. Пусть k, $m=\overline{1,N}$. Тогда: $g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)=g_{\overline{k},n}(e)\big(g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)\big)=\delta^i_k[F]_{\overline{i},m}(e)=[F]_{\overline{k},m}(e)$. Следовательно: $F(x,y)=(x,Ay)$ при x, $y\in H$.

11.3. Сопряжённый оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon H_1\to H_2$.

1. Будем говорить, что B — формально сопряжённый оператор к оператору A, если: $B\colon H_2\to H_1$, $(x,Ay)=(Bx,y)$ при: $x\in\mathrm{D}(B)$, $y\in\mathrm{D}(A)$.

2. Обозначим, $\mathrm{D}^*(A)=\Big\{x\colon x\in H_2\wedge\exists z\in H_1\forall y\in\mathrm{D}(A)\big((x,Ay)=(z,y)\big)\Big\}$ (очевидно, $\mathrm{D}^*(A)\subseteq H_2$). Будем говорить, что B — сопряжённый оператор к оператору A, если: $B\colon H_2\to H_1$, $(x,Ay)=(Bx,y)$ при: $x\in\mathrm{D}(B)$, $y\in\mathrm{D}(A)$; $\mathrm{D}(B)=\mathrm{D}^*(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H_1, H_2, H_3 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A\colon H_1\to H_2$, B — формально сопряжённый оператор к оператору A. Очевидно, $\mathrm{D}(B)\subseteq\mathrm{D}^*(A)$.

2. Пусть: $A\colon H_1\to H_2$, B — формально сопряжённый оператор к оператору A, $\mathrm{D}(B)=H_2$. Так как: $\mathrm{D}(B)\subseteq\mathrm{D}^*(A)$, $\mathrm{D}^*(A)\subseteq H_2=\mathrm{D}(B)$, то $\mathrm{D}(B)=\mathrm{D}^*(A)$. Тогда B — сопряжённый оператор к оператору A.

3. Пусть: $A_1\colon H_1\to H_2$, B_1 — формально сопряжённый оператор к оператору A_1, $A_2\colon H_1\to H_2$, B_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2. Пусть: $x\in\mathrm{D}(B_1+B_2)$, $y\in\mathrm{D}(A_1+A_2)$. Тогда: $\big(x,(A_1+A_2)y\big)=(x,A_1y+A_2y)=(x,A_1y)+(x,A_2y)=(B_1x,y)+(B_2x,y)=(B_1x+B_2x,y)=\big((B_1+B_2)x,y\big)$. Следовательно, B_1+B_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_1+A_2.

4. Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\colon H_1\to H_2$, B — формально сопряжённый оператор к оператору A. Пусть: $x\in\mathrm{D}(\overline{\lambda}B)$, $y\in\mathrm{D}(\lambda A)$. Тогда: $\big(x,(\lambda A)y\big)=\big(x,\lambda A(y)\big)=\lambda(x,Ay)=\overline{\overline{\lambda}}(Bx,y)=\big(\overline{\lambda}B(x),y\big)=\big((\overline{\lambda}B)x,y\big)$. Следовательно, $\overline{\lambda}B$ — формально сопряжённый оператор к оператору λA.

5. Пусть: $A\colon H_1\to H_2$, B — формально сопряжённый оператор к оператору A. Пусть: $x\in\mathrm{D}(A)$, $y\in\mathrm{D}(B)$. Тогда: $(x,By)=\overline{(By,x)}=\overline{(y,Ax)}=(Ax,y)$. Следовательно, A — формально сопряжённый оператор к оператору B.

6. Пусть: $A_1\colon H_1\to H_2$, B_1 — формально сопряжённый оператор к оператору A_1, $A_2\colon H_2\to H_3$, B_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2. Пусть: $x\in\mathrm{D}(B_1B_2)$, $y\in\mathrm{D}(A_2A_1)$. Тогда: $\big(x,(A_2A_1)y\big)=\big(x,A_2(A_1y)\big)=(B_2x,A_1y)=\big(B_1(B_2x),y\big)=\big((B_1B_2)x,y\big)$. Следовательно, B_1B_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2A_1.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_1) = N_1$*;* H_2 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_2) = N_2$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*,* G *— ковариантный метрический тензор пространства* H_1*,* e *— базис пространства* H_1*,* g *— ковариантный метрический тензор пространства* H_2*,* f *— базис пространства* H_2*.*

1. Пусть B_1*,* B_2 *— сопряжённые операторы к оператору* A*. Тогда* $B_1 = B_2$*.*

2. Пусть: $B \in \mathrm{Lin}(H_2, H_1)$*,* $[B]^{\alpha}_{k}(e, f) = \overline{g_{\overline{k},m}(f)[A]^m_\beta(f, e)G^{\beta,\overline{\alpha}}(e)}$ *при:* $\alpha = \overline{1, N_1}$*,* $k = \overline{1, N_2}$ *(*$[B](e, f) = \overline{\big(g(f)[A](f, e)G(e)^{-1}\big)^T}$*). Тогда* B *— сопряжённый оператор к оператору* A*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $\mathrm{D}(B_1) = \mathrm{D}^*(A)$, $\mathrm{D}(B_2) = \mathrm{D}^*(A)$. Пусть: $x \in \mathrm{D}^*(A)$, $y \in H_1$. Тогда: $(B_1x, y) = (x, Ay) = (B_2x, y)$. В силу произвольности выбора $y \in H_1$ получаем, что: $B_1x = B_2x$. В силу произвольности выбора $x \in \mathrm{D}^*(A)$ получаем, что: $B_1 = B_2$.

2. Пусть: $x \in H_2$, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Bx, y) = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{[Bx]^{\alpha}}[y]^{\gamma} = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{[B]^{\alpha}_{k}[x]^{k}}[y]^{\gamma} = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{\overline{g_{\overline{k},m}[A]^m_\beta G^{\beta,\overline{\alpha}}}[x]^k}[y]^{\gamma} =$$
$$= G_{\overline{\alpha},\gamma}g_{\overline{k},m}[A]^m_\beta G^{\beta,\overline{\alpha}}\overline{[x]^k}[y]^{\gamma} = g_{\overline{k},m}\overline{[x]^k}\big([A]^m_\beta[y]^\beta\big) = g_{\overline{k},m}\overline{[x]^k}[Ay]^m = (x, Ay).$$

Так как $\mathrm{D}(B) = H_2$, то B — сопряжённый оператор к оператору A. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1 — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_1) = N_1$; H_2 — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(H_2) = N_2$; e — базис пространства H_1, f — базис пространства H_2.

Пусть $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Обозначим через A^* сопряжённый оператор к оператору A. Тогда $[A^*](e, f) = \overline{\big(g(f)[A](f, e)G(e)^{-1}\big)^T}$. Пусть: e — ортонормированный базис пространства H_1, f — ортонормированный базис пространства H_2. Тогда $[A^*](e, f) = \overline{[A](f, e)^T}$.

Теорема (2-я теорема Фредгольма)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_1) = N_1$*;* H_2 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_2) = N_2$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*. Тогда* $\mathrm{R}(A) = \ker(A^*)^{\perp}$.

Доказательство. **Покажем, что** $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^{\perp}$. Пусть: $x \in \ker(A^*)$; $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда: $x \in H_2$, $A^*x = \theta_1$; можно указать такой вектор u, что: $u \in H_1$, $y = Au$. Следовательно: $(x, y) = (x, Au) = (A^*x, u) = (\theta_1, u) = 0$. В силу произвольности выбора $y \in \mathrm{R}(A)$ получаем, что: $x \in \mathrm{R}(A)^{\perp}$.

Пусть $x \in \mathrm{R}(A)^{\perp}$. Тогда:

$$(A^*x, A^*x) = \big(x, A(A^*x)\big) = 0,$$
$$A^*x = \theta_1,$$
$$x \in \ker(A^*).$$

Итак, $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^{\perp}$.

Так как: $\dim(H_2) = N_2 \neq +\infty$, то: $\mathrm{R}(A) = \big(\mathrm{R}(A)^{\perp}\big)^{\perp} = \ker(A^*)^{\perp}$. □

11.4. Самосопряжённый оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\colon H \to H$.

1. Будем говорить, что A — формально самосопряжённый оператор, если: $(x, Ay) = (Ax, y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$.

2. Будем говорить, что A — самосопряжённый оператор, если: $(x, Ay) = (Ax, y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}^*(A)$ $\bigl(\mathrm{D}^*(A) = \Bigl\{x\colon x \in H \wedge \exists z \in H \forall y \in \mathrm{D}(A)\bigl((x, Ay) = (z, y)\bigr)\Bigr\}\bigr)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A\colon H \to H$. Пусть A — формально самосопряжённый оператор. Пусть x, $y \in \mathrm{D}(A)$. Тогда $(x, Ay) = (Ax, y)$. Следовательно, A — формально сопряжённый оператор к оператору A.

Пусть A — формально сопряжённый оператор к оператору A. Пусть x, $y \in \mathrm{D}(A)$. Тогда $(x, Ay) = (Ax, y)$. Следовательно, A — формально самосопряжённый оператор.

2. Пусть $A\colon H \to H$. Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда: A — формально самосопряжённый оператор, $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}^*(A)$. Следовательно: A — формально сопряжённый оператор к оператору A, $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}^*(A)$. Тогда A — сопряжённый оператор к оператору A.

Пусть A — сопряжённый оператор к оператору A. Тогда: A — формально сопряжённый оператор к оператору A, $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}^*(A)$. Следовательно: A — формально самосопряжённый оператор, $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}^*(A)$. Тогда A — самосопряжённый оператор.

3. Пусть: $A\colon H \to H$, A — формально самосопряжённый оператор, $\mathrm{D}(A) = H$. Тогда: A — формально сопряжённый оператор к оператору A, $\mathrm{D}(A) = H$. Следовательно, A — сопряжённый оператор к оператору A. Тогда A — самосопряжённый оператор.

4. Пусть: $A_1\colon H \to H$, A_1 — формально самосопряжённый оператор, $A_2\colon H \to H$, A_2 — формально самосопряжённый оператор. Тогда: A_1 — формально сопряжённый оператор к оператору A_1, A_2 — формально сопряжённый оператор к оператору A_2. Следовательно, $A_1 + A_2$ — формально сопряжённый оператор к оператору $A_1 + A_2$. Тогда $A_1 + A_2$ — формально самосопряжённый оператор.

5. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda = \overline{\lambda}$, $A\colon H \to H$, A — формально самосопряжённый оператор. Тогда A — формально сопряжённый оператор к оператору A. Следовательно, $\overline{\lambda}A$ — формально сопряжённый оператор к оператору λA. Тогда λA — формально сопряжённый оператор к оператору λA. Следовательно, λA — формально самосопряжённый оператор.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $F(x, y) = (x, Ay)$ при x, $y \in H$. Оператор A является самосопряжённым тогда и только тогда, когда F — эрмитова форма.*

Доказательство. Пусть A — самосопряжённый оператор. Пусть x, $y \in H$. Тогда: $F(x, y) = (x, Ay) = (Ax, y) = \overline{(y, Ax)} = \overline{F(y, x)}$. Итак, F — эрмитова форма.

Пусть F — эрмитова форма. Пусть x, $y \in H$. Тогда: $(x, Ay) = F(x, y) = \overline{F(y, x)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax, y)$. Так как $\mathrm{D}(A) = H$, то A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, e — базис пространства H. Оператор A является самосопряжённым тогда и только тогда, когда $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица.*

Доказательство. Обозначим: $F(x, y) = (x, Ay)$ при x, $y \in H$. Тогда: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F](e) = g(e)[A](e)$.

Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда F — эрмитова форма. Следовательно, $[F](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица.

Пусть $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $[F](e)$ — эрмитова матрица. Следовательно, F — эрмитова форма. Тогда A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. Пусть: Q — подпространство пространства H, $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$, $P = P_Q$. Тогда: $P \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $PP = P$, P — самосопряжённый оператор, $Q = \mathrm{R}(P)$.

2. Пусть: $P \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $PP = P$, P — самосопряжённый оператор, $Q = \mathrm{R}(P)$. Тогда: Q — подпространство пространства H, $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$, $P = P_Q$.

Доказательство.

1. Очевидно: $P \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $PP = P$, $Q = \mathrm{R}(P)$. Пусть x, $y \in H$. Тогда: $(x, Py) = \bigl(Px + (x - Px), Py\bigr) = (Px, Py) + (x - Px, Py) = (Px, Py) = (Px, Py) + (Px, y - Py) = \bigl(Px, Py + (y - Py)\bigr) = (Px, y)$. Так как $\mathrm{D}(P) = H$, то P — самосопряжённый оператор.

2. Очевидно, Q — подпространство пространства H. Пусть $x \in H$. Тогда $Px \in Q$. Пусть $v \in Q$. Тогда можно указать такой вектор u, что: $u \in H$, $v = Pu$. Следовательно: $(x - Px, v) = (x - Px, Pu) = \bigl(P(x - Px), u\bigr) = \bigl(Px - P(Px), u\bigr) = \bigl(Px - (PP)x, u\bigr) = (Px - Px, u) = (\theta, u) = 0$. В силу произвольности выбора $v \in Q$ получаем, что: $x - Px \perp Q$. Очевидно: $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$, $P = P_Q$. □

11.5. Ортогональный оператор

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что A — ортогональный оператор, если: $(Ax, Ay) = (x, y)$ при x, $y \in H_1$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2, H_3 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$, $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$, A — ортогональный оператор. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $\big((\lambda A)x, (\lambda A)y\big) = \big(\lambda A(x), \lambda A(y)\big) = |\lambda|^2 (Ax, Ay) = (x, y)$. Следовательно, λA — ортогональный оператор.

Пусть: $A_1 \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$, A_1 — ортогональный оператор, $A_2 \in \operatorname{Lin}(H_2, H_3)$, A_2 — ортогональный оператор. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $\big((A_2A_1)x, (A_2A_1)y\big) = \big(A_2(A_1x), A_2(A_1y)\big) = (A_1x, A_1y) = (x, y)$. Следовательно, A_2A_1 — ортогональный оператор.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$. Оператор A является ортогональным тогда и только тогда, когда: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$.*

Доказательство. Пусть A — ортогональный оператор. Тогда: $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$ при $x \in H_1$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Пусть: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$. Тогда: $(Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)$ при $x \in H_1$. Обозначим: $F_1(x, y) = (x, y)$, $F_2(x, y) = (Ax, Ay)$ при x, $y \in H_1$; $Q_1(x) = (x, x)$, $Q_2(x) = (Ax, Ax)$ при $x \in H_1$. Тогда: F_1, F_2 — симметричные билинейные формы в пространстве H_1, Q_1, Q_2 — квадратичные формы в пространстве H_1, $Q_1(x) = F_1(x, x)$, $Q_2(x) = F_2(x, x)$, $Q_2(x) = Q_1(x)$ при $x \in H_1$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = F_2(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q_2(x + y) - Q_2(x) - Q_2(y)\big) = \frac{1}{2}\big(Q_1(x + y) - Q_1(x) - Q_1(y)\big) = \\ = F_1(x, y) = (x, y).$$

Следовательно, A — ортогональный оператор.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$. Тогда: $(Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)$ при $x \in H_1$. Обозначим: $F_1(x, y) = (x, y)$, $F_2(x, y) = (Ax, Ay)$ при x, $y \in H_1$; $Q_1(x) = (x, x)$, $Q_2(x) = (Ax, Ax)$ при $x \in H_1$. Тогда: F_1, F_2 — эрмитовы полуторалинейные формы в пространстве H_1, Q_1, Q_2 — эрмитовы квадратичные формы в пространстве H_1, $Q_1(x) = F_1(x, x)$, $Q_2(x) = F_2(x, x)$, $Q_2(x) = Q_1(x)$ при $x \in H_1$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = F_2(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q_2(x + y) - Q_2(x) - Q_2(y)\big) + \frac{i}{2}\big(Q_2(x - iy) - Q_2(x) - Q_2(y)\big) = \\ = \frac{1}{2}\big(Q_1(x + y) - Q_1(x) - Q_1(y)\big) + \frac{i}{2}\big(Q_1(x - iy) - Q_1(x) - Q_1(y)\big) = F_1(x, y) = (x, y).$$

Следовательно, A — ортогональный оператор. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H_1)$, $\dim(H_2) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(H_1, H_2)$. Оператор A является ортогональным тогда и только тогда, когда: A — обратимый оператор, $A^* = A^{-1}$.*

Доказательство. Пусть A — ортогональный оператор. Очевидно, $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда:

$$(x, x) = (Ax, Ax) = (\theta_2, \theta_2) = 0, \\ x = \theta_1.$$

Следовательно, $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Так как: $\dim(H_1) = N = \dim(H_2)$, $\dim(H_2) = N \neq +\infty$, $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то (согласно первой теореме Фредгольма) $\mathrm{R}(A) = H_2$.

Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $\bigl(A^*(Ax), y\bigr) = (Ax, Ay) = (x, y)$. В силу произвольности выбора $y \in H_1$ получаем, что: $A^*(Ax) = x$. Так как: $\mathrm{D}(A^*) = H_2 = \mathrm{R}(A)$, то: A — обратимый оператор, $A^* = A^{-1}$.

Пусть: A — обратимый оператор, $A^* = A^{-1}$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда: $(Ax, Ay) = \bigl(A^*(Ax), y\bigr) = \bigl(A^{-1}(Ax), y\bigr) = (x, y)$. Итак, A — ортогональный оператор. $\square$

Лекция 12. Линейный самосопряжённый оператор. Спектральная теория

12.1. Линейный самосопряжённый оператор

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(H, H)$*,* A *— формально самосопряжённый оператор.*

1. Пусть Q *— инвариантное подпространство оператора* A*. Тогда:* $Q^\perp$ *— подпространство пространства* H*,* $A[Q^\perp] \subseteq Q^\perp$*.*

2. Справедливо утверждение: $S_A \subseteq \mathbb{R}$*.*

3. Пусть: λ_1*,* λ_2 *— собственные значения оператора* A*,* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*,* H_1*,* H_2 *— соответствующие собственные подпространства. Тогда* $H_1 \perp H_2$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $Q^\perp$ — подпространство пространства H. Пусть $x \in \mathrm{D}(A) \cap Q^\perp$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $(Ax, u) = (x, Au) = 0$. В силу произвольности выбора $u \in Q$ получаем, что: $Ax \in Q^\perp$. Тогда $A[Q^\perp] \subseteq Q^\perp$.

2. Пусть $\lambda \in S_A$. Тогда можно указать такой вектор x, что: $x \in \mathrm{D}(A)$, $x \neq \theta$, $Ax = \lambda x$. Следовательно:

$$
\begin{gathered}
(x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda (x, x), \\
(x, Ax) = (Ax, x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda}(x, x); \\
(\lambda - \overline{\lambda})(x, x) = 0, \\
\lambda - \overline{\lambda} = 0, \\
\lambda = \overline{\lambda}, \\
\lambda \in \mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Тогда $S_A \subseteq \mathbb{R}$.

3. Пусть: $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2), \\
(x_1, Ax_2) = (Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \overline{\lambda_1}(x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2); \\
(\lambda_2 - \lambda_1)(x_1, x_2) = 0.
\end{gathered}
$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x_1, x_2) = 0$. Тогда $H_1 \perp H_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Тогда* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{R}$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда: $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{K}$. Следовательно, $S_A = \tilde{S}_A$. Так как A — самосопряжённый оператор, то: $\tilde{S}_A = S_A \subseteq \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Очевидно, можно указать такие объекты e, $H_\mathbb{C}$, f, $A_\mathbb{C}$, что: e — ортонормированный базис пространства H, $H_\mathbb{C}$ — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim(H_\mathbb{C}) = N$, f — ортонормированный базис пространства $H_\mathbb{C}$, $A_\mathbb{C} \in \operatorname{Lin}(H_\mathbb{C}, H_\mathbb{C})$, $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$. Так как: A — самосопряжённый оператор, e — ортонормированный базис пространства H, то $[A](e)$ — эрмитова матрица. Так как $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$, то $[A_\mathbb{C}](f)$ — эрмитова матрица. Так как f — ортонормированный базис пространства $H_\mathbb{C}$, то $A_\mathbb{C}$ —

самосопряжённый оператор. Так как $[A_{\mathbb{C}}](f) = [A](e)$, то $\tilde{F}_{A_{\mathbb{C}}} = \tilde{F}_A$. Тогда $\tilde{S}_{A_{\mathbb{C}}} = \tilde{S}_A$. Так как: $H_{\mathbb{C}}$ — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{C}$, $A_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Lin}(H_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$, $A_{\mathbb{C}}$ — самосопряжённый оператор, то: $\tilde{S}_A = \tilde{S}_{A_{\mathbb{C}}} \subseteq \mathbb{R}$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Можно указать такие векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, что:* $e_1, \ldots, e_N$ *— ортогональный базис пространства* H*,* $e_1, \ldots, e_N$ *— собственные векторы оператора* A*.*

Доказательство. Так как A — самосопряжённый оператор, то: $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$. Тогда $S_A = \tilde{S}_A$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то: $S_A = \tilde{S}_A \neq \varnothing$. Тогда существует такое число λ_1 и такой вектор e_1, что: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $e_1 \in H$, $e_1 \neq \theta$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

Пусть: $k = \overline{1, N-1}$, существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и такие векторы $e_1, \ldots, e_k$, что: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональная последовательность векторов пространства H, $e_1, \ldots, e_k \neq \theta$, $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, k}$. Обозначим, $Q_k = L(e_1, \ldots, e_k)$. Тогда Q_k — подпространство пространства H. Так как: $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональная последовательность векторов, $e_1, \ldots, e_k \neq \theta$, то $\dim(Q_k) = k$. Так как: $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, k}$, то Q_k — инвариантное подпространство оператора A.

Очевидно, $Q_k^{\perp}$ — подпространство пространства H. Так как $\dim(Q_k) = k$, то: $\dim(Q_k^{\perp}) = N - k \in \mathbb{N}$. Так как: A — самосопряжённый оператор, Q_k — инвариантное подпространство оператора A, то $Q_k^{\perp}$ — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $A|_{Q_k^{\perp}} \in \operatorname{Lin}(Q_k^{\perp}, Q_k^{\perp})$, $A|_{Q_k^{\perp}}$ — самосопряжённый оператор.

Так как $A|_{Q_k^{\perp}}$ — самосопряжённый оператор, то: $\tilde{S}_{A|_{Q_k^{\perp}}} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$. Тогда $S_{A|_{Q_k^{\perp}}} = \tilde{S}_{A|_{Q_k^{\perp}}}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то: $S_{A|_{Q_k^{\perp}}} = \tilde{S}_{A|_{Q_k^{\perp}}} \neq \varnothing$. Тогда существует такое число λ_{k+1} и такой вектор e_{k+1}, что: $\lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$, $e_{k+1} \in Q_k^{\perp}$, $e_{k+1} \neq \theta$, $A|_{Q_k^{\perp}} e_{k+1} = \lambda_{k+1} e_{k+1}$. Следовательно: $\lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$, $e_{k+1} \in Q_k^{\perp}$, $e_{k+1} \neq \theta$, $Ae_{k+1} = \lambda_{k+1} e_{k+1}$. Тогда: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_{k+1}$ — ортогональная последовательность векторов пространства H, $e_1, \ldots, e_{k+1} \neq \theta$, $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, k+1}$.

Рассуждая по индукции, получаем, что существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и такие векторы $e_1, \ldots, e_N$, что: $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональная последовательность векторов пространства H, $e_1, \ldots, e_N \neq \theta$, $Ae_j = \lambda_j e_j$ при $j = \overline{1, N}$. Очевидно: $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональный базис пространства H, $e_1, \ldots, e_N$ — собственные векторы оператора A. $\square$

Теорема (спектральная теорема для линейных самосопряжённых операторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Тогда:* $\tilde{S}_A \subseteq \mathbb{R}$*,* $\forall \lambda \in S_A \big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*.*

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональная последовательность подпространств пространства H, $H = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Пусть $x \in H$. Так как $H = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k$, то можно указать такие векторы $x_1, \ldots, x_r$, что: $x_k \in H_k$ при $k = \overline{1, r}$; $x = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} x_k$. Так как $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства, то: $x_k = P_k x$ при $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} x_k = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_k x = \left(\sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_k\right) x$. Следовательно, $I = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_k$.

Пусть: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A, $H_1, \ldots, H_r$ — соответствующие собственные подпространства. Тогда: $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональная последовательность подпространств пространства H, $H = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1,r}$. Пусть $x \in H$. Тогда:

$$Ax = A \sum_{k=\overline{1,r}} P_k x = \sum_{k=\overline{1,r}} A(P_k x) = \sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k(x) = \left(\sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k \right) x.$$

Следовательно, $A = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональная последовательность подпространств пространства H, $H = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1,r}$. Пусть: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $A = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k$.

Пусть $n = 0$. Тогда:

$$A^n = I = \sum_{k=\overline{1,r}} P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$A^n = \left(\sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k \right)^n = \sum_{k_1, \ldots, k_n = \overline{1,r}} \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_n} P_{k_1} \cdots P_{k_n} = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть: $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $F(x) = \sum\limits_{j=\overline{0,n}} a_j x^j$ при $x \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$\hat{F}(A) = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j A^j = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^j P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} \left(\sum_{j=\overline{0,n}} a_j (\lambda_k)^j \right) P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} F(\lambda_k) P_k.$$

Пусть: $F \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathrm{D}(F)$. Обозначим, $\hat{F}(A) = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} F(\lambda_k) P_k$.

12.2. Эрмитовы полуторалинейные формы в евклидовом пространстве

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве H. Покажем, что существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — ортонормированный базис пространства H, $[A](e')$ — диагональная матрица.

Существует единственный оператор $\hat{A}$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $A(x, y) = (x, \hat{A}y)$ при x, $y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Тогда существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$. Так как e' — ортонормированный базис, то $g(e') = \tilde{I}$. Так как $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$, то $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как: $[A](e') = g(e')[\hat{A}](e') = \tilde{I}[\hat{A}](e') = [\hat{A}](e')$, то $[A](e')$ — диагональная матрица.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(\hat{A} - \lambda I)x = \theta$; e — базис пространства H, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}$; e — базис пространства H, $x = U_e\tilde{x}$. Следовательно:

$$g(e)\Big(\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x}\Big) = g(e)\tilde{\theta},$$
$$\big([A](e) - \lambda g(e)\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, A, B — эрмитовы полуторалинейные формы в пространстве L, $B > 0$. Покажем, что существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица, $[B](e') = \tilde{I}$.

Так как: B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $B > 0$, то B — скалярное произведение в пространстве L. Обозначим, $H = (L, B)$. Тогда H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Существует единственный оператор $\hat{A}$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $A(x, y) = (x, \hat{A}y)$ при x, $y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Тогда существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$. Так как e' — ортонормированный базис, то $[B](e') = \tilde{I}$. Так как $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$, то $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как: $[A](e') = [B](e')[\hat{A}](e') = \tilde{I}[\hat{A}](e') = [\hat{A}](e')$, то $[A](e')$ — диагональная матрица.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(\hat{A} - \lambda I)x = \theta$; e — базис пространства H, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}$; e — базис пространства H, $x = U_e\tilde{x}$. Следовательно:

$$[B](e)\Big(\big([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\big)\tilde{x}\Big) = [B](e)\tilde{\theta},$$
$$\big([A](e) - \lambda[B](e)\big)\tilde{x} = \tilde{\theta}.$$

Лекция 13. Кривые и поверхности второго порядка

13.1. Аффинное пространство

Определение. Пусть: M — множество, $M \neq \varnothing$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $F\colon M \times M \implies L$. Далее будем писать $\overrightarrow{p_1 p_2}$ вместо $F(p_1, p_2)$. Пусть:

1. $\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_3}$ при $p_1, p_2, p_3 \in M$;

2. $\forall p_1 \in M \forall x \in L \exists! p_2 \in M \big(\overrightarrow{p_1 p_2} = x\big)$.

Будем говорить, что (M, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть $Q = (M, L, F)$. Обозначим, $\vec{Q} = L$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$h_{O,e}(p) = \big[\overrightarrow{Op}\big](e), \quad p \in Q.$$

Очевидно: $h_{O,e}$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_{O,e}) = Q$, $\mathrm{R}(h_{O,e}) = \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве Q; O — начало отсчёта координатной карты $h_{O,e}$; e — базис координатной карты $h_{O,e}$. Пусть $p \in Q$. Будем говорить, что: $\overrightarrow{Op}$ — радиус-вектор точки p; $h^1_{O,e}(p), \ldots, h^N_{O,e}(p)$ — аффинные координаты точки p.

Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q, $x_0 = h_{O,e}(O')$; $p \in Q$, $x = h_{O,e}(p)$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$, $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$x^k = \big[\overrightarrow{Op}\big]^k(e) = \big[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'p}\big]^k(e) = \big[\overrightarrow{OO'}\big]^k(e) + \big[\overrightarrow{O'p}\big]^k(e) = \\ \big[\overrightarrow{OO'}\big]^k(e) + \alpha^k_{k'}(e, e')\big[\overrightarrow{O'p}\big]^{k'}(e') = x^k_0 + \alpha^k_{k'}(e, e')\tilde{x}^{k'}.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) = N + 1$; $O_0 \in Q$, e_0 — базис пространства $\vec{Q}$, f_0 — базис пространства L.

1. Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$\beta(O, e; O', e') = \begin{pmatrix} \alpha(e, e') & h_{O,e}(O') \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно: $\beta(O, e; O', e') \in \mathbb{K}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\det\big(\beta(O, e; O', e')\big) = \det\big(\alpha(e, e')\big) \neq 0$; $\beta(O, e; O', e') = \tilde{I}$ тогда и только тогда, когда: $O = O'$, $e = e'$.

Пусть: $O, O', O'' \in Q$, e, e', e'' — базисы пространства $\vec{Q}$. **Покажем, что** $\beta(O, e; O', e')\beta(O', e'; O'', e'') = \beta(O, e; O'', e'')$.

Пусть $k, k'' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{k''}(O', e'; O'', e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\beta^{k'}_{k''}(O', e'; O'', e'') + \\ \beta^k_{N+1}(O, e; O', e')\beta^{N+1}_{k''}(O', e'; O'', e'') = \alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^{k'}_{k''}(e', e'') = \alpha^k_{k''}(e, e'') = \beta^k_{k''}(O, e; O'', e'').$$

Пусть $k'' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta_{k'}^{N+1}(O, e; O', e')\beta_{k''}^{k'}(O', e'; O'', e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta_{k'}^{N+1}(O, e; O', e')\beta_{k''}^{k'}(O', e'; O'', e'')+$$
$$\beta_{N+1}^{N+1}(O, e; O', e')\beta_{k''}^{N+1}(O', e'; O'', e'') = 0 = \beta_{k''}^{N+1}(O, e; O'', e'').$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta_{k'}^{k}(O, e; O', e')\beta_{N+1}^{k'}(O', e'; O'', e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta_{k'}^{k}(O, e; O', e')\beta_{N+1}^{k'}(O', e'; O'', e'')+$$
$$\beta_{N+1}^{k}(O, e; O', e')\beta_{N+1}^{N+1}(O', e'; O'', e'') = \alpha_{k'}^{k}(e, e')h_{O', e'}^{k'}(O'') + h_{O,e}^{k}(O') = h_{O,e}^{k}(O'') =$$
$$\beta_{N+1}^{k}(O, e; O'', e'').$$

Очевидно:

$$\sum_{k'=1}^{N+1} \beta_{k'}^{N+1}(O, e; O', e')\beta_{N+1}^{k'}(O', e'; O'', e'') = \sum_{k'=1}^{N} \beta_{k'}^{N+1}(O, e; O', e')\beta_{N+1}^{k'}(O', e'; O'', e'')+$$
$$\beta_{N+1}^{N+1}(O, e; O', e')\beta_{N+1}^{N+1}(O', e'; O'', e'') = 1 = \beta_{N+1}^{N+1}(O, e; O'', e'').$$

Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства $\vec{Q}$. Очевидно, $\beta(O, e; O', e')^{-1} = \beta(O', e'; O, e)$.

2. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$f_k(O, e) = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta_{k}^{k_0}(O_0, e_0; O, e)(f_0)_{k_0}, \quad k = \overline{1, N+1}.$$

Так как $\det\bigl(\beta(O_0, e_0; O, e)\bigr) \neq 0$, то: $f(O, e)$ — базис пространства L, $\alpha\bigl(f_0, f(O, e)\bigr) = \beta(O_0, e_0; O, e)$. Очевидно: $f(O, e) = f_0$ тогда и только тогда, когда: $O = O_0$, $e = e_0$.

Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — базисы пространства $\vec{Q}$. **Покажем, что** $\alpha\bigl(f(O, e), f(O', e')\bigr) = \beta(O, e; O', e')$. Пусть $k' = \overline{1, N+1}$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \beta_{k'}^{k}(O, e; O', e')f_k(O, e) = \sum_{k=1}^{N+1} \beta_{k'}^{k}(O, e; O', e') \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta_{k}^{k_0}(O_0, e_0; O, e)(f_0)_{k_0} =$$
$$\sum_{k_0=1}^{N+1}\left(\sum_{k=1}^{N+1} \beta_{k}^{k_0}(O_0, e_0; O, e)\beta_{k'}^{k}(O, e; O', e')\right)(f_0)_{k_0} = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta_{k'}^{k_0}(O_0, e_0; O', e')(f_0)_{k_0} = f_{k'}(O', e').$$

Следовательно, $\alpha\bigl(f(O, e), f(O', e')\bigr) = \beta(O, e; O', e')$.

3. Обозначим:

$$\psi(p) = h_{O_0, e_0}^{k_0}(p)(f_0)_{k_0} + (f_0)_{N+1}, \quad p \in Q.$$

Очевидно: $\psi\colon Q \implies L$, ψ — обратимая функция.

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$; $p \in Q$. **Покажем, что:**

$$\psi(p) = h_{O,e}^{k}(p)f_k(O, e) + f_{N+1}(O, e).$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big[\psi(p)\big]^k\big(f(O,e)\big) = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta^k_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\big[\psi(p)\big]^{k_0}(f_0) = \sum_{k_0=1}^{N} \beta^k_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\big[\psi(p)\big]^{k_0}(f_0) +$$
$$\beta^k_{N+1}(O,e;O_0,e_0)\big[\psi(p)\big]^{N+1}(f_0) = \alpha^k_{k_0}(e,e_0)h^{k_0}_{O_0,e_0}(p) + h^k_{O,e}(O_0) = h^k_{O,e}(p).$$

Очевидно:

$$\big[\psi(p)\big]^{N+1}\big(f(O,e)\big) = \sum_{k_0=1}^{N+1} \beta^{N+1}_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\big[\psi(p)\big]^{k_0}(f_0) =$$
$$\sum_{k_0=1}^{N} \beta^{N+1}_{k_0}(O,e;O_0,e_0)\big[\psi(p)\big]^{k_0}(f_0) + \beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O_0,e_0)\big[\psi(p)\big]^{N+1}(f_0) = 1.$$

Очевидно:

$$\psi(p) = \sum_{k=1}^{N+1}\big[\psi(p)\big]^k\big(f(O,e)\big)f_k(O,e) = \sum_{k=1}^{N}\big[\psi(p)\big]^k\big(f(O,e)\big)f_k(O,e) +$$
$$\big[\psi(p)\big]^{N+1}\big(f(O,e)\big)f_{N+1}(O,e) = h^k_{O,e}(p)f_k(O,e) + f_{N+1}(O,e).$$

13.2. Кривые и поверхности второго порядка

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$; $O_0 \in Q$, e_0 — базис пространства $\vec{Q}$, $A_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_0 = A_0^T$, $B_0 \in \mathbb{R}^N$, $C_0 \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = (A_0)_{k_0,m_0}h^{k_0}_{O_0,e_0}(p)h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + 2(B_0)_{m_0}h^{m_0}_{O_0,e_0}(p) + C_0, \quad p \in Q.$$

Будем говорить, что F — полином степени не выше 2 в пространстве Q. Пусть $A_0 \neq \Theta$. Будем говорить, что F — полином степени 2 в пространстве Q.

Определение. Пусть: $N = 2$ ($N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$); Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$. Будем говорить, что σ — кривая (поверхность) второго порядка в пространстве Q, если можно указать такой полином F степени 2 в пространстве Q, что $\sigma = \big\{p\colon p \in Q \wedge F(p) = 0\big\}$.

Замечание. Пусть: $A_1 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1 = A_1^T$, $B_1 \in \mathbb{R}^N$, $C_1 \in \mathbb{R}$; $A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_2 = A_2^T$, $B_2 \in \mathbb{R}^N$, $C_2 \in \mathbb{R}$; $(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m + C_1 = (A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m + C_2$ при $x \in \mathbb{R}^N$. **Покажем, что:** $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.

Очевидно:

$$(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m + C_1 = (A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m + C_2, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m + C_1 = (A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m + C_2, \quad x = \tilde{\theta};$$
$$C_1 = C_2.$$

Тогда: $(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m = (A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m$ при $x \in \mathbb{R}^N$.

Очевидно:

$$(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m = (A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$
$$(A_1)_{k,m}(tx)^k(tx)^m + 2(B_1)_m(tx)^m = (A_2)_{k,m}(tx)^k(tx)^m + 2(B_2)_m(tx)^m,$$
$$t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^N;$$
$$t(A_1)_{k,m}x^kx^m + 2(B_1)_mx^m = t(A_2)_{k,m}x^kx^m + 2(B_2)_mx^m, \quad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^N;$$

$$\lim_{t\to 0}\bigl(t(A_1)_{k,m}x^kx^m+2(B_1)_mx^m\bigr)=\lim_{t\to 0}\bigl(t(A_2)_{k,m}x^kx^m+2(B_2)_mx^m\bigr),\quad x\in\mathbb{R}^N;$$
$$2(B_1)_mx^m=2(B_2)_mx^m,\quad x\in\mathbb{R}^N;$$
$$B_1=B_2.$$

Тогда: $(A_1)_{k,m}x^kx^m=(A_2)_{k,m}x^kx^m$ при $x\in\mathbb{R}^N$. Так как: $A_1=A_1^T$, $A_2=A_2^T$, то $A_1=A_2$.

Замечание. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q)=N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(L)=N+1$; $O_0\in Q$, e_0 — базис пространства $\vec{Q}$, $A_0\in\mathbb{R}^{N\times N}$, $A_0=A_0^T$, $B_0\in\mathbb{R}^N$, $C_0\in\mathbb{R}$,

$$F(p)=(A_0)_{k_0,m_0}h^{k_0}_{O_0,e_0}(p)h^{m_0}_{O_0,e_0}(p)+2(B_0)_{m_0}h^{m_0}_{O_0,e_0}(p)+C_0,\quad p\in Q.$$

1. Обозначим:

$$D_0=\begin{pmatrix}A_0 & B_0^T\\ B_0 & C_0\end{pmatrix}.$$

Очевидно: $D_0\in\mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $D_0=D_0^T$,

$$F(p)=\sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}}(D_0)_{k_0,m_0}\bigl[\psi(p)\bigr]^{k_0}\bigl(f(O_0,e_0)\bigr)\bigl[\psi(p)\bigr]^{m_0}\bigl(f(O_0,e_0)\bigr),\quad p\in Q.$$

Обозначим:

$$D_{k,m}(f)=\sum_{k_0,m_0=\overline{1,N+1}}(D_0)_{k_0,m_0}\alpha^{k_0}_k\bigl(f(O_0,e_0),f\bigr)\alpha^{m_0}_m\bigl(f(O_0,e_0),f\bigr),$$
$$f\text{ — базис пространства } L,\ k,m=\overline{1,N+1}.$$

Очевидно: $D\in(TL)^0_2$, $D\bigl(f(O_0,e_0)\bigr)=D_0$; $D(f)=D(f)^T$ при: f — базис пространства L;

$$F(p)=\sum_{k,m=\overline{1,N+1}}D_{k,m}(f)\bigl[\psi(p)\bigr]^k(f)\bigl[\psi(p)\bigr]^m(f),\quad f\text{ — базис пространства } L,\ p\in Q.$$

Пусть: $O\in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$. Обозначим:

$$A_{k,m}(O,e)=D_{k,m}\bigl(f(O,e)\bigr),\quad k,m=\overline{1,N};$$
$$B_m(O,e)=D_{N+1,m}\bigl(f(O,e)\bigr),\quad m=\overline{1,N};$$
$$C(O,e)=D_{N+1,N+1}\bigl(f(O,e)\bigr).$$

Очевидно: $A(O,e)\in\mathbb{R}^{N\times N}$, $A(O,e)=A(O,e)^T$; $B(O,e)\in\mathbb{R}^N$, $B_m(O,e)=D_{N+1,m}\bigl(f(O,e)\bigr)=D_{m,N+1}\bigl(f(O,e)\bigr)$ при $m=\overline{1,N}$; $C(O,e)\in\mathbb{R}$;

$$F(p)=A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p)+2B_m(O,e)h^m_{O,e}(p)+C(O,e),\quad p\in Q.$$

Очевидно: $A(O_0,e_0)=A_0$, $B(O_0,e_0)=B_0$, $C(O_0,e_0)=C_0$.
Пусть: $O,O'\in Q$, e,e' — базисы пространства Q. **Покажем, что:**

$$A_{k',m'}(O',e')=A_{k,m}(O,e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e'),\quad k',m'=\overline{1,N};$$
$$B_{m'}(O',e')=\bigl(A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O')+B_m(O,e)\bigr)\alpha^m_{m'}(e,e'),\quad m'=\overline{1,N};$$
$$C(O',e')=A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O')h^m_{O,e}(O')+2B_m(O,e)h^m_{O,e}(O')+C(O,e).$$

Пусть $k', m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$A_{k',m'}(O',e') = D_{k',m'}\big(f(O',e')\big) =$$
$$\sum_{k,m=1}^{N+1} D_{k,m}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') =$$
$$\sum_{k,m=1}^{N} D_{k,m}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{m=1}^{N} D_{N+1,m}\big(f(O,e)\big)\beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{k=1}^{N+1} D_{k,N+1}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') =$$
$$A_{k,m}(O,e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e').$$

Пусть $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$B_{m'}(O',e') = D_{N+1,m'}\big(f(O',e')\big) =$$
$$\sum_{k,m=1}^{N+1} D_{k,m}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') =$$
$$\sum_{k,m=1}^{N} D_{k,m}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{m=1}^{N} D_{N+1,m}\big(f(O,e)\big)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{k=1}^{N+1} D_{k,N+1}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') =$$
$$\big(A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O') + B_m(O,e)\big)\alpha^m_{m'}(e,e').$$

Очевидно:

$$C(O',e') = D_{N+1,N+1}\big(f(O',e')\big) =$$
$$\sum_{k,m=1}^{N+1} D_{k,m}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e') =$$
$$\sum_{k,m=1}^{N} D_{k,m}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{m=1}^{N} D_{N+1,m}\big(f(O,e)\big)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e')+$$
$$\sum_{k=1}^{N} D_{k,N+1}\big(f(O,e)\big)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')+$$
$$D_{N+1,N+1}\big(f(O,e)\big)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e') =$$

$$A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O')h^m_{O,e}(O') + 2B_m(O,e)h^m_{O,e}(O') + C(O,e).$$

2. Пусть $O \in Q$. Можно указать такой математический объект A_O, что: A_O — билинейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $[A_O](e) = A(O,e)$ при: e — базис пространства $\vec{Q}$. Пусть e — базис пространства $\vec{Q}$. Так как $A(O,e) = A(O,e)^T$, то A_O — симметричная билинейная форма. Очевидно:

$$A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) = A_O\big(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}\big), \quad p \in Q.$$

Можно указать такой математический объект B_O, что: B_O — линейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $[B_O](e) = B(O,e)$ при: e — базис пространства $\vec{Q}$. Пусть e — базис пространства $\vec{Q}$. Очевидно:

$$B_m(O,e)h^m_{O,e}(p) = B_O\big(\overrightarrow{Op}\big), \quad p \in Q.$$

Можно указать такой математический объект C_O, что: $C_O = C(O,e)$ при: e — базис пространства $\vec{Q}$. Пусть e — базис пространства $\vec{Q}$. Очевидно: $C_O = C(O,e) \in \mathbb{R}$;

$$F(p) = A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e(p)}h^m_{O,e}(p) + 2B_m(O,e)h^m_{O,e}(p) + C(O,e) =$$
$$A_O\big(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}\big) + 2B_O\big(\overrightarrow{Op}\big) + C_O, \quad p \in Q.$$

Пусть $O, O' \in Q$. Очевидно:

$$A_{O'} = A_O;$$
$$B_{O'}(x) = A_O\big(\overrightarrow{OO'}, x\big) + B_O(x), \quad x \in \vec{Q};$$
$$C_{O'} = A_O\big(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OO'}\big) + 2B_O\big(\overrightarrow{OO'}\big) + C_O.$$

3. Пусть $O \in Q$. Можно указать такой математический объект $\hat{A}_O$, что: $\hat{A}_O \in \mathrm{Lin}(\vec{Q}, \vec{Q})$, $A_O(x,y) = (x, \hat{A}_O y)$ при $x, y \in \vec{Q}$. Так как A_O — симметричная билинейная форма, то $\hat{A}_O$ — самосопряжённый оператор.

Можно указать такой математический объект $\vec{B}_O$, что: $\vec{B}_O \in \vec{Q}$, $B_O(x) = (\vec{B}_O, x)$ при $x \in \vec{Q}$. Очевидно:

$$F(p) = A_O\big(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}\big) + 2B_O\big(\overrightarrow{Op}\big) + C_O = \big(\overrightarrow{Op}, \hat{A}_O\overrightarrow{Op}\big) + 2\big(\vec{B}_O, \overrightarrow{Op}\big) + C_O, \quad p \in Q.$$

Пусть $O, O' \in Q$. Очевидно:

$$\hat{A}_{O'} = \hat{A}_O;$$
$$\vec{B}_{O'} = \hat{A}_O\overrightarrow{OO'} + \vec{B}_O;$$
$$C_{O'} = \big(\overrightarrow{OO'}, \hat{A}_O\overrightarrow{OO'}\big) + 2\big(\vec{B}_O, \overrightarrow{OO'}\big) + C_O.$$

4. Пусть $A_0 \neq \Theta$. Тогда: $A(O,e) \neq \Theta$ при: $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$.

Пусть $O' \in Q$. Так как $\hat{A}_{O'}$ — самосопряжённый оператор, то существуют такие векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, что: e' — правый ортонормированный базис пространства $\vec{Q}$, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}_{O'}$. Тогда $[\hat{A}_{O'}](e')$ — диагональная матрица. Так как

e' — ортонормированный базис, то: $A(O',e') = [A_{O'}](e') = [\hat{A}_{O'}](e')$. Тогда $A(O',e')$ — диагональная матрица. Пусть: $\tilde{A} = A(O',e')$, $\tilde{B} = B(O',e')$, $\tilde{C} = C(O',e')$, $p \in Q$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C}.$$

Так как $\tilde{A} \neq \Theta$, то без ограничения общности можно считать, что существует такой номер $r = \overline{1,N}$, что: $\tilde{A}_{k,k} \neq 0$ при $k = \overline{1,r}$; $\tilde{A}_{k,k} = 0$ при $k = \overline{r+1,N}$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}\left(\tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}\right)^2 + \sum_{k=r+1}^{N} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}}.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A};$$
$$\tilde{\tilde{B}}_k = 0, \quad k = \overline{1,r};$$
$$\tilde{\tilde{B}}_k = \tilde{B}_k, \quad k = \overline{r+1,N};$$
$$\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}};$$
$$\tilde{\tilde{x}}^k = \tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}, \quad k = \overline{1,r};$$
$$\tilde{\tilde{x}}^k = \tilde{x}^k, \quad k = \overline{r+1,N}.$$

Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{A}}_{k,k}(\tilde{\tilde{x}}^k)^2 + \sum_{k=r+1}^{N} 2\tilde{\tilde{B}}_k\tilde{\tilde{x}}^k + \tilde{\tilde{C}}.$$

Обозначим, $e'' = e'$. Очевидно, можно указать такую точку $O'' \in Q$, что $\tilde{\tilde{x}} = h_{O'',e''}(p)$. В силу произвольности выбора точки $p \in Q$: $A(O'',e'') = \tilde{\tilde{A}}$, $B(O'',e'') = \tilde{\tilde{B}}$, $C(O'',e'') = \tilde{\tilde{C}}$.

Пусть: $\tilde{\tilde{B}}_k = 0$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{A}}_{k,k}(\tilde{\tilde{x}}^k)^2 + \tilde{\tilde{C}}.$$

Пусть $\exists k = \overline{1,N}(\tilde{\tilde{B}}_k \neq 0)$. Тогда: $r = \overline{1,N-1}$, $\exists k = \overline{r+1,N}(\tilde{\tilde{B}}_k \neq 0)$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tilde{B}}_{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{A}}_{k,k}(\tilde{\tilde{x}}^k)^2 + 2\tilde{\tilde{B}}_{r+1}\left(\tilde{\tilde{x}}^{r+1} + \frac{\tilde{\tilde{C}}}{2\tilde{\tilde{B}}_{r+1}}\right) + \sum_{k=r+2}^{N} 2\tilde{\tilde{B}}_k\tilde{\tilde{x}}^k.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \tilde{\tilde{A}};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{B}}} = \tilde{\tilde{B}};$$
$$\tilde{\tilde{\tilde{C}}} = 0;$$
$$\tilde{\tilde{\tilde{x}}}^{r+1} = \tilde{\tilde{x}}^{r+1} + \frac{\tilde{\tilde{C}}}{2\tilde{\tilde{B}}_{r+1}};$$
$$\tilde{\tilde{\tilde{x}}}^{k} = \tilde{\tilde{x}}^{k}, \quad k = \overline{1, N},\ k \neq r+1.$$

Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\tilde{\tilde{A}}}_{k,k}(\tilde{\tilde{\tilde{x}}}^k)^2 + \sum_{k=r+1}^{N} 2\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_k \tilde{\tilde{\tilde{x}}}^k.$$

Обозначим, $e''' = e''$. Очевидно, можно указать такую точку $O''' \in Q$, что $\tilde{\tilde{\tilde{x}}} = h_{O''',e'''}(p)$. В силу произвольности выбора точки $p \in Q$: $A(O''', e''') = \tilde{\tilde{\tilde{A}}}$, $B(O''', e''') = \tilde{\tilde{\tilde{B}}}$, $C(O''', e''') = \tilde{\tilde{\tilde{C}}}$.

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$; l — кривая второго порядка в пространстве Q. Тогда можно указать такой полином F степени 2 в пространстве Q, что $l = \{p\colon p \in Q \wedge F(p) = 0\}$.

Как показано выше, существует такая точка $O \in Q$, такой правый ортонормированный базис e пространства $\vec{Q}$ и такое число $r = \overline{1, 2}$, что: $A(O, e)$ — диагональная матрица, $A_{k,k}(O, e) \neq 0$, $B_k(O, e) = 0$ при $k = \overline{1, r}$; $A_{k,k}(O, e) = 0$ при $k = \overline{r+1, 2}$. Тогда в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$\sum_{k=1}^{r} A_{k,k}(x^k)^2 + \sum_{k=r+1}^{2} 2B_k x^k + C = 0.$$

1. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C < 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2}, C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} + \frac{(x^2)^2}{\frac{-C}{A_{2,2}}} = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} + \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}} \leqslant \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}$. Тогда l — эллипс.

2. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2} \neq 0, C = 0, \operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0.$$

Так как: $A_{1,1}, A_{2,2} < 0$ либо $A_{1,1}, A_{2,2} > 0$, то l — множество, состоящее из одной точки.

3. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C > 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2}, C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$, $\operatorname{sgn}(C) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}, A_{2,2}, C < 0$ либо $A_{1,1}, A_{2,2}, C > 0$, то $l = \varnothing$.

4. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, $A_{1,1}C \neq 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2}, C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Тогда в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} - \frac{(x^2)^2}{\frac{C}{A_{2,2}}} = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} - \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, l — гипербола.

5. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 2$; $A_{1,1}, A_{2,2} \neq 0$, $C = 0$, $\operatorname{sgn}(A_{2,2}) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0;$$
$$|A_{1,1}|\,(x^1)^2 - |A_{2,2}|\,(x^2)^2 = 0;$$
$$\left(\sqrt{|A_{1,1}|}\cdot x^1 - \sqrt{|A_{2,2}|}\cdot x^2\right)\left(\sqrt{|A_{1,1}|}\cdot x^1 + \sqrt{|A_{2,2}|}\cdot x^2\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{|A_{1,1}|}, \sqrt{|A_{2,2}|} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, имеющих одну общую точку.

6. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 \neq 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1}, B_2 \neq 0$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + 2B_2x^2 + C = 0.$$

Пусть: $\delta = \operatorname{sgn}\big(A_{1,1}B_2\big)$, $p \in Q$, $x = h_{O,e}(p)$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}(x^1)^2 + 2B_2x^2 + C = A_{1,1}(\delta x^1)^2 - 2B_2\delta\left(-\delta x^2 - \frac{C}{2B_2\delta}\right).$$

Обозначим: $\tilde{x}^1 = -\delta x^2 - \frac{C}{2B_2\delta}$, $\tilde{x}^2 = \delta x^1$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2B_2\delta\cdot\tilde{x}^1.$$

Можно указать такую точку $O' \in Q$ и такой правый ортонормированный базис e' пространства Q, что $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда в координатной карте $h_{O',e'}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2B_2\delta\cdot\tilde{x}^1 = 0;$$
$$(\tilde{x}^2)^2 = 2\frac{B_2}{A_{1,1}}\delta\cdot\tilde{x}^1.$$

Так как $\frac{B_2}{A_{1,1}}\delta > 0$, то l — парабола.

7. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C < 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = -\operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0;$$
$$(x^1)^2 - \frac{-C}{A_{1,1}} = 0;$$
$$\left(x^1 - \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)\left(x^1 + \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, не имеющих общих точек.

8. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C = 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C = 0$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 = 0;$$
$$x^1 = 0.$$

Тогда l — прямая.

9. Пусть: $A_{1,1}A_{2,2} = 0$, $B_2 = 0$, $A_{1,1}C > 0$. Тогда: $r = 1$; $A_{1,1} \neq 0$, $B_2 = 0$, $C \neq 0$, $\operatorname{sgn}(C) = \operatorname{sgn}(A_{1,1})$. Следовательно, в координатной карте $h_{O,e}$ множество l описывается уравнением:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}, C < 0$ либо $A_{1,1}, C > 0$, то $l = \varnothing$.

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(L) = N + 1$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.

Пусть $O \in Q$. Обозначим через $a_0(O), \ldots, a_N(O)$ — коэффициенты полинома $F_{\hat{A}_O}$. Пусть e — ортонормированный базис пространства $\vec{Q}$. Тогда:

$$a_0(O) = \det\bigl([\hat{A}_O](e)\bigr) = \det\bigl([A_O](e)\bigr) = \det\bigl(A(O,e)\bigr),$$
$$a_{N-1}(O) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}\bigl([\hat{A}_O](e)\bigr) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}\bigl([A_O](e)\bigr) = (-1)^{N-1}\operatorname{tr}\bigl(A(O,e)\bigr),$$
$$a_N(O) = (-1)^N.$$

Пусть: $O \in Q$, e — ортонормированный базис пространства Q. Обозначим: $I_k(O,e) = (-1)^{N-k}a_{N-k}$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда: $I_1(O,e) = \operatorname{tr}\bigl(A(O,e)\bigr)$, $I_N(O,e) = \det\bigl(A(O,e)\bigr)$. Обозначим, $I_{N+1}(O,e) = \det\Bigl(D\bigl(f(O,e)\bigr)\Bigr)$.

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; Q — аффинное евклидово ориентированное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = N$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(L) = N + 1$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.*

Справедливо утверждение: $I_k(O',e') = I_k(O,e)$ при: $O, O' \in Q$, e, e' — ортонормированные базисы пространства Q, $k = \overline{1, N+1}$.

Доказательство. Пусть: $O, O' \in Q$, e, e' — ортонормированные базисы пространства Q.

Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда: $I_k(O',e') = (-1)^{N-k}a_{N-k}(O') = (-1)^{N-k}a_{N-k}(O) = I_k(O,e)$.

Так как e, e' — ортонормированные базисы, то: $\alpha(e,e')^T\alpha(e,e') = \tilde{I}$, $\det\bigl(\alpha(e,e')\bigr)^2 = 1$. Тогда:

$$I_{N+1}(O',e') = \det\Bigl(D\bigl(f(O',e')\bigr)\Bigr) = \det\Bigl(\beta(O,e;O',e')^T D\bigl(f(O,e)\bigr)\beta(O,e;O',e')\Bigr) =$$

$$\det\bigl(\beta(O,e;O',e')\bigr)^2 \det\Bigl(D\bigl(f(O,e)\bigr)\Bigr) = \det\bigl(\alpha(e,e')\bigr)^2 I_{N+1}(O,e) = I_{N+1}(O,e). \quad \square$$

Лекция 14. Общие сведения о группах

Определение. Пусть: G — множество, $F\colon G \times G \implies G$. Будем говорить, что F — двухместная алгебраическая операция на множестве G. Будем говорить, что (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией.

Определение. Пусть (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией. Будем писать $x * y$ вместо $F(x, y)$.

Будем говорить, что F — ассоциативная алгебраическая операция ((G, F) — ассоциативная алгебраическая система), если: $(x * y) * z = x * (y * z)$ при $x, y, z \in G$.

Будем говорить, что F — коммутативная алгебраическая операция ((G, F) — коммутативная алгебраическая система; (G, F) — абелева алгебраическая система), если: $x * y = y * x$ при $x, y \in G$.

Замечание.

1. Пусть (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией.

   Обычно алгебраическую операцию F называют умножением. В этом случае пишут xy вместо $F(x, y)$. Такую запись называют мультипликативной записью алгебраической операции.

   Иногда алгебраическую операцию F называют сложением. В этом случае пишут $x+y$ вместо $F(x, y)$. Такую запись называют аддитивной записью алгебраической операции.

   Чаще всего алгебраическую операцию F называют сложением, если F — коммутативная алгебраическая операция.
2. Пусть: (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией, алгебраическая операция F называется умножением. Будем говорить, что (G, F) — алгебраическая система с умножением.
3. Пусть: (G, F) — алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией, алгебраическая операция F называется сложением. Будем говорить, что (G, F) — алгебраическая система со сложением.

Определение. Пусть (G, F) — алгебраическая система с умножением.

Будем говорить, что e — правая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$.

Обозначим, $E_r = \big\{e\colon e \in G \wedge \forall x \in G(xe = x)\big\}$.

Пусть $x \in G$. Будем говорить, что y — правый обратный элемент к элементу x в алгебраической системе (G, F), если: $y \in G$, $xy \in E_r$.

Будем говорить, что e — универсальная правая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = e)$.

Будем говорить, что e — левая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G(ex = x)$.

Обозначим, $E_l = \big\{e\colon e \in G \wedge \forall x \in G(ex = x)\big\}$.

Пусть $x \in G$. Будем говорить, что y — левый обратный элемент к элементу x в алгебраической системе (G, F), если: $y \in G$, $yx \in E_l$.

Будем говорить, что e — универсальная левая единица алгебраической системы (G, F), если: $e \in G$, $\forall x \in G(ex = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(yx = e)$.

Замечание. Пусть (G, F) — алгебраическая система со сложением. Тогда: вместо правой единицы будет правый ноль; вместо множества правых единиц E_r будет множество правых нулей Θ_r; вместо правого обратного элемента будет правый противоположный элемент; вместо универсальной правой единицы будет универсальный правый ноль; вместо левой единицы будет левый ноль; вместо множества левых единиц E_l будет множество левых нулей Θ_l; вместо левого обратного элемента будет левый противоположный элемент; вместо универсальной левой единицы будет универсальный левый ноль.

Определение. Пусть: G — множество, $F\colon G\times G \implies G$. Будем писать xy вместо $F(x,y)$. Пусть:

1. $(xy)z = x(yz)$ при $x,y,z\in G$;

2. $\exists e\in G\bigl(\forall x\in G(xe=x)\wedge\forall x\in G\exists y\in G(xy=e)\bigr)$.

Будем говорить, что F — групповая операция на множестве G. Будем говорить, что (G,F) — группа.

Пусть (G,F) — группа. Можно указать такой элемент e, что: $e\in G$, $\forall x\in G(xe=x)$, $\forall x\in G\exists y\in G(xy=e)$. Пусть $x\in G$. Можно указать такой элемент $\varphi(x)$, что: $\varphi(x)\in G$, $x\varphi(x)=e$.

Утверждение. *Справедливы утверждения:*

1. $\forall x\in G\bigl(\varphi(x)x=e\bigr)$;

2. $\forall x\in G(ex=x)$;

3. $\forall a\in G\forall y\in G\exists! x\in G(ax=y)$;

4. $\forall a\in G\forall y\in G\exists! x\in G(xa=y)$.

Доказательство.

1. Пусть $x\in G$. Тогда:

$$\varphi(x)x = \bigl(\varphi(x)x\bigr)e = \bigl(\varphi(x)x\bigr)\Bigl(\varphi(x)\varphi\bigl(\varphi(x)\bigr)\Bigr) = \Bigl(\bigl(\varphi(x)x\bigr)\varphi(x)\Bigr)\varphi\bigl(\varphi(x)\bigr) =$$
$$\Bigl(\varphi(x)\bigl(x\varphi(x)\bigr)\Bigr)\varphi\bigl(\varphi(x)\bigr) = \bigl(\varphi(x)e\bigr)\varphi\bigl(\varphi(x)\bigr) = \varphi(x)\varphi\bigl(\varphi(x)\bigr) = e.$$

2. Пусть $x\in G$. Тогда:

$$ex = \bigl(x\varphi(x)\bigr)x = x\bigl(\varphi(x)x\bigr) = xe = x.$$

3. Пусть $a,y\in G$. Пусть: $x_1,x_2\in G$, $ax_1=y$, $ax_2=y$. Тогда:

$$\begin{gathered} ax_1 = y,\\ \varphi(a)(ax_1) = \varphi(a)y,\\ \bigl(\varphi(a)a\bigr)x_1 = \varphi(a)y,\\ ex_1 = \varphi(a)y,\\ x_1 = \varphi(a)y. \end{gathered}$$

Аналогично, $x_2=\varphi(a)y$. Тогда: $x_1=\varphi(a)y=x_2$.

Обозначим, $x=\varphi(a)y$. Тогда: $x\in G$, $ax=a\bigl(\varphi(a)y\bigr)=\bigl(a\varphi(a)\bigr)y=ey=y$.

4. Пусть $a, y \in G$. Пусть: $x_1, x_2 \in G$, $x_1 a = y$, $x_2 a = y$. Тогда:

$$\begin{gathered}
x_1 a = y, \\
(x_1 a)\varphi(a) = y\varphi(a), \\
x_1\bigl(a\varphi(a)\bigr) = y\varphi(a), \\
x_1 e = y\varphi(a), \\
x_1 = y\varphi(a).
\end{gathered}$$

Аналогично, $x_2 = y\varphi(a)$. Тогда: $x_1 = y\varphi(a) = x_2$.

Обозначим, $x = y\varphi(a)$. Тогда: $x \in G$, $xa = \bigl(y\varphi(a)\bigr)a = y\bigl(\varphi(a)a\bigr) = ye = y$. □

Замечание.

1. **Покажем, что** $E_r = \{e\}$. Так как: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$, то $e \in E_r$. Пусть $\tilde{e} \in E_r$. Тогда: $\tilde{e} \in G$, $e\tilde{e} = e$. Так как: $e \in G$, $ee = e$, то $\tilde{e} = e$.

Пусть $x \in G$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $x\varphi(x) = e \in E_r$, то $\varphi(x)$ — правый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Пусть y — правый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Тогда: $y \in G$, $xy \in E_r$. Следовательно: $y \in G$, $xy = e$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $x\varphi(x) = e$, то $y = \varphi(x)$.

2. **Покажем, что** $E_l = \{e\}$. Так как: $e \in G$, $\forall x \in G(ex = x)$, то $e \in E_l$. Пусть $\tilde{e} \in E_l$. Тогда: $\tilde{e} \in G$, $\tilde{e}e = e$. Так как: $e \in G$, $ee = e$, то $\tilde{e} = e$.

Пусть $x \in G$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $\varphi(x)x = e \in E_l$, то $\varphi(x)$ — левый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Пусть y — левый обратный элемент к элементу x в группе (G, F). Тогда: $y \in G$, $yx \in E_l$. Следовательно: $y \in G$, $yx = e$. Так как: $\varphi(x) \in G$, $\varphi(x)x = e$, то $y = \varphi(x)$.

3. Будем говорить, что $\tilde{e}$ — единица группы (G, F), если $\tilde{e}$ — правая единица группы (G, F).

Пусть $x \in G$. Будем говорить, что y — обратный элемент к элементу x в группе (G, F), если y — правый обратный элемент к элементу x в группе (G, F).

Замечание. Пусть (G, F) — группа.

1. Обозначим через e единицу группы (G, F). Пусть $x \in G$. Обозначим через x^{-1} обратный элемент к элементу x в группе (G, F).

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_r \in G$. Так как:

$$\begin{gathered}
(x_1 \cdots x_r)(x_r^{-1} \cdots x_1^{-1}) = (x_1 \cdots x_{r-1})(x_r x_r^{-1})(x_{r-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}) = \\
(x_1 \cdots x_{r-1})e(x_{r-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}) = (x_1 \cdots x_{r-1})(x_{r-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}) = \cdots = x_1 x_1^{-1} = e,
\end{gathered}$$

то $(x_1 \cdots x_r)^{-1} = x_r^{-1} \cdots x_1^{-1}$.

3. Пусть $x \in G$. Пусть: $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$; $x_1, \ldots, x_n = x$. Обозначим, $x^n = x_1 \cdots x_n$. Пусть $n = 0$. Обозначим, $x^n = e$. Пусть: $n \in \mathbb{Z}$, $n \leqslant -1$; $x_1, \ldots, x_n = x^{-1}$. Обозначим, $x^n = x_1 \cdots x_n$.

Замечание. Пусть: (G, F) — группа; алгебраическая операция F называется сложением. Тогда: вместо единицы e будет ноль θ; вместо обратного элемента x^{-1} будет противоположный элемент $-x$; вместо степени x^n будет кратное nx.

Определение. Пусть (G, F) — группа. Будем говорить, что Q — подгруппа группы (G, F), если:

1. $Q \subseteq G$;

2. $Q \neq \varnothing$;

3. $xy \in Q$ при $x, y \in Q$;

4. $x^{-1} \in Q$ при $x \in Q$.

Утверждение. *Пусть: (G, F) — группа; Q — подгруппа группы (G, F). Тогда $e \in Q$.*

Доказательство. Так как Q — подгруппа группы (G, F), то: $Q \subseteq G$, $Q \neq \varnothing$, $\forall x \in Q \forall y \in Q(xy \in Q)$, $\forall x \in Q(x^{-1} \in Q)$.

Так как $Q \neq \varnothing$, то можно указать такой элемент x, что $x \in Q$. Тогда: $e = xx^{-1} \in Q$. □

Утверждение. *Пусть (G, F) — группа.*

1. Пусть Q — подгруппа группы (G, F). Тогда: $Q \subseteq G$, $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$ — группа; e — единица группы $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$ при $x \in Q$.

2. Пусть: $Q \subseteq G$, $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$ — группа. Тогда Q — подгруппа группы (G, F).

Доказательство.

1. Так как Q — подгруппа группы (G, F), то: $Q \subseteq G$, $e \in Q$, $\forall x \in Q \forall y \in Q(xy \in Q)$, $\forall x \in Q(x^{-1} \in Q)$.

Так как $Q \subseteq G$, то: Q — множество, $F|_{Q\times Q}$ — функция, $\mathrm{D}\bigl(F|_{Q\times Q}\bigr) = (Q \times Q) \cap (G \times G) = Q \times Q$. Пусть $x, y \in Q$. Тогда: $F|_{Q\times Q}(x, y) = F(x, y) \in Q$. Следовательно, $\mathrm{R}\bigl(F|_{Q\times Q}\bigr) \subseteq Q$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q\times Q}(x, y)$ при $x, y \in Q$.

Пусть $x, y, z \in Q$. Тогда: $(x \otimes y) \otimes z = (xy)z = x(yz) = x \otimes (y \otimes z)$.

Пусть $x \in Q$. Тогда: $x \otimes e = xe = x$, $x \otimes x^{-1} = xx^{-1} = e$. Итак: $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$ — группа; e — единица группы $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$ при $x \in Q$.

2. По условию, $Q \subseteq G$. Так как $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$ — группа, то $Q \neq \varnothing$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q\times Q}(x, y)$ при $x, y \in Q$. Обозначим через e_Q единицу группы $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$. Пусть $x \in Q$. Обозначим через $\varphi_Q(x)$ — обратный элемент к элементу x в группе $\bigl(Q, F|_{Q\times Q}\bigr)$.

Пусть $x, y \in Q$. Тогда: $xy = x \otimes y \in Q$.

Очевидно: $e_Q e_Q = e_Q \otimes e_Q = e_Q$. Так как $e_Q e = e_Q$, то $e_Q = e$. Пусть $x \in Q$. Очевидно: $x\varphi_Q(x) = x \otimes \varphi_Q(x) = e_Q = e$. Так как $xx^{-1} = e$, то $\varphi_Q(x) = x^{-1}$. Тогда: $x^{-1} = \varphi_Q(x) \in Q$. Итак, Q — подгруппа группы (G, F). □

Утверждение. *Пусть: (G, F) — группа; $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — не пустое семейство подгрупп группы (G, F); $D = \bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$. Тогда D — подгруппа группы (G, F).*

Доказательство. Так как: $Q_\alpha \subseteq G$ при $\alpha \in I$, то $D \subseteq G$. Так как: $e \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$, то $e \in D$. Тогда $D \neq \varnothing$.

Пусть: $x, y \in D$; $\alpha \in I$. Тогда $x, y \in Q_\alpha$. Следовательно, $xy \in Q_\alpha$. Тогда $xy \in D$.

Пусть: $x \in D$; $\alpha \in I$. Тогда $x \in Q_\alpha$. Следовательно, $x^{-1} \in Q_\alpha$. Тогда $x^{-1} \in D$. Итак, D — подгруппа группы (G, F). □

Утверждение. *Пусть: (G, F) — группа; Q_1 — подгруппа группы (G, F).*

1. Пусть Q_2 — подгруппа группы $\bigl(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\bigr)$. Тогда: $Q_2 \subseteq Q_1$, Q_2 — подгруппа группы (G, F).

2. Пусть: $Q_2 \subseteq Q_1$, Q_2 — подгруппа группы (G, F). Тогда Q_2 — подгруппа группы $\bigl(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\bigr)$.

Доказательство.

1. Так как Q_1 — подгруппа группы (G, F), то: $Q_1 \subseteq G$, $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ — группа; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ при $x \in Q_1$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q_1\times Q_1}(x, y)$ при $x, y \in Q_1$. Пусть $x \in Q_1$. Обозначим через $\varphi_{Q_1}(x)$ обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$.

Так как Q_2 — подгруппа группы $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$, то: $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Так как: $Q_1 \subseteq G$, $Q_2 \subseteq Q_1$, то $Q_2 \subseteq G$.

Пусть $x, y \in Q_2$. Тогда: $xy = x \otimes y \in Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Тогда: $x^{-1} = \varphi_{Q_1}(x) \in Q_2$. Итак: $Q_2 \subseteq Q_1$, Q_2 — подгруппа группы (G, F).

2. Так как Q_1 — подгруппа группы (G, F), то: $Q_1 \subseteq G$, $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ — группа; x^{-1} — обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$ при $x \in Q_1$. Обозначим: $x \otimes y = F|_{Q_1\times Q_1}(x, y)$ при $x, y \in Q_1$. Пусть $x \in Q_1$. Обозначим через $\varphi_{Q_1}(x)$ обратный элемент к элементу x в группе $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$.

По условию, $Q_2 \subseteq Q_1$. Так как Q_2 — подгруппа группы (G, F), то $Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть $x, y \in Q_2$. Тогда: $x \otimes y = xy \in Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Тогда: $\varphi_{Q_1}(x) = x^{-1} \in Q_2$. Итак, Q_2 — подгруппа группы $\big(Q_1, F|_{Q_1\times Q_1}\big)$.

□

Замечание. Пусть (G, F) — группа.

1. Покажем, что G — подгруппа группы (G, F). Очевидно, $G \subseteq G$. Так как (G, F) — группа, то $G \neq \varnothing$.

Пусть $x, y \in G$. Тогда $xy \in G$.

Пусть $x \in G$. Тогда $x^{-1} \in G$. Итак, G — подгруппа группы (G, F).

2. Покажем, что $\{e\}$ — подгруппа группы (G, F). Очевидно: $\{e\} \subseteq G$, $\{e\} \neq \varnothing$.

Пусть $x, y \in \{e\}$. Тогда $x, y = e$. Следовательно: $xy = ee = e \in \{e\}$.

Пусть $x \in \{e\}$. Тогда $x = e$. Следовательно: $x^{-1} = e^{-1} = e \in \{e\}$. Итак, $\{e\}$ — подгруппа группы (G, F).

Замечание (примеры).

1. Пусть M — множество. Обозначим через $S(M)$ множество всех функций σ, удовлетворяющих условиям: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Обозначим: $F(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 \circ \sigma_2$ при $\sigma_1, \sigma_2 \in S(M)$; $e(x) = x$ при $x \in M$. Тогда: $\big(S(M), F\big)$ — группа; e — единичный элемент группы $\big(S(M), F\big)$; σ^{-1} — обратный элемент к элементу σ в группе $\big(S(M), F\big)$ при $\sigma \in S(M)$.

Очевидно: $S(M)$ — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F) = S(M) \times S(M)$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in S(M)$. Тогда: $\sigma_1\sigma_2$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma_1\sigma_2) = M$, $\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2) \subseteq M$. Пусть $z \in M$. Так как $\mathrm{R}(\sigma_1) = M$, то можно указать такой элемент y, что: $y \in M$, $z = \sigma_1(y)$. Так как $\mathrm{R}(\sigma_2) = M$, то можно указать такой элемент x, что: $x \in M$, $y = \sigma_2(x)$. Тогда: $x \in M$, $z = \sigma_1\big(\sigma_2(x)\big)$; $x \in M$, $z = (\sigma_1\sigma_2)(x)$; $z \in \mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)$. Следовательно, $M \subseteq \mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2) \subseteq M$, $M \subseteq \mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2)$, то $\mathrm{R}(\sigma_1\sigma_2) = M$. Тогда $\sigma_1\sigma_2 \in S(M)$. Следовательно, $\mathrm{R}(F) \subseteq S(M)$.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S(M)$. Тогда $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$.

Очевидно, $e \in S(M)$. Пусть $\sigma \in S(M)$. Тогда: $(\sigma e)(x) = \sigma\big(e(x)\big) = \sigma(x)$ при $x \in M$; $(\sigma\sigma^{-1})(x) = \sigma\big(\sigma^{-1}(x)\big) = x = e(x)$ при $x \in M$. Итак: $\big(S(M), F\big)$ — группа; e — единичный элемент группы $\big(S(M), F\big)$; σ^{-1} — обратный элемент к элементу σ в группе $\big(S(M), F\big)$ при $\sigma \in S(M)$.

2. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; (L, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Тогда:

(L, F_1) — группа; θ — нулевой элемент группы (L, F_1) (алгебраическая операция F_1 называется сложением); $-x$ — противоположный элемент к элементу x в группе (L, F_1) при $x \in L$.

Так как (L, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то: L — множество, $F_1\colon L\times L \implies L$.

Пусть $x, y, z \in L$. Тогда: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Пусть $x \in L$. Тогда: $x + \theta = x$, $x + (-x) = \theta$. Итак: (L, F_1) — группа; θ — нулевой элемент группы (L, F_1); $-x$ — противоположный элемент к элементу x в группе (L, F_1) при $x \in L$.

3. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Обозначим: $F(A, B) = AB$ при $A, B \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}), F\bigr)$ — группа; I — единица группы $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}), F\bigr)$; A^{-1} — обратный элемент к элементу A в группе $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}), F\bigr)$ при $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Очевидно: $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathrm{GL}_N(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Пусть $A, B \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $AB \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Следовательно, $AB \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда $\mathrm{R}(F) \subseteq \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Пусть $A, B, C \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда $(AB)C = A(BC)$.

Очевидно, $I \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Пусть $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $AI = A$, $AA^{-1} = I$. Итак: $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}), F\bigr)$ — группа; I — единица группы $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}), F\bigr)$; A^{-1} — обратный элемент к элементу A в группе $\bigl(\mathrm{GL}_N(\mathbb{K}), F\bigr)$ при $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

4. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$ множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) = 1$. Тогда $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Пусть $A \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) = 1 \neq 0$. Следовательно, $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Тогда $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Так как $I \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$, то $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K}) \neq \varnothing$.

Пусть $A, B \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $AB \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$. Следовательно, $AB \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$.

Пусть $A \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Тогда: $A^{-1} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A^{-1}) = \bigl(\det(A)\bigr)^{-1} = 1$. Следовательно, $A^{-1} \in \mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$. Итак, $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

5. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через O_N множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $AA^T = I$. Тогда O_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.

Пусть $A \in \mathrm{O}_N$. Тогда: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $AA^T = I$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det(AA^T) = \det(I)$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det(A)\det(A^T) = 1$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Следовательно, $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. Тогда $\mathrm{O}_N \subseteq \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. Так как $I \in \mathrm{O}_N$, то $\mathrm{O}_N \neq \varnothing$.

Пусть $A, B \in \mathrm{O}_N$. Тогда: $AB \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $(AB)(AB)^T = A(BB^T)A^T = AIA^T = AA^T = I$. Следовательно, $AB \in \mathrm{O}_N$.

Пусть $A \in \mathrm{O}_N$. Тогда: $A^{-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^T = A^{-1}A = I$. Следовательно, $A^{-1} \in \mathrm{O}_N$. Итак, O_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.

6. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через SO_N множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $AA^T = I$, $\det(A) = 1$. Тогда: SO_N — подгруппа группы O_N, SO_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$.

Очевидно, $\mathrm{SO}_N = \mathrm{O}_N \cap \mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$. Тогда: SO_N — подгруппа группы O_N, SO_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{R})$.

7. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через U_N множество всех матриц A, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A\overline{A^T} = I$. Тогда U_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$.

Пусть $A \in \mathrm{U}_N$. Тогда: $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A\overline{A^T} = I$; $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\det\bigl(A\overline{A^T}\bigr) = \det(I)$; $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\det(A)\det\bigl(\overline{A^T}\bigr) = 1$; $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Следовательно, $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. Тогда

$\mathrm{U}_N \subseteq \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. Так как $I \in \mathrm{U}_N$, то $\mathrm{U}_N \neq \varnothing$.

Пусть $A, B \in \mathrm{U}_N$. Тогда: $AB \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $(AB)\overline{(AB)^T} = A\big(B\overline{B^T}\big)\overline{A^T} = AI\overline{A^T} = A\overline{A^T} = I$. Следовательно, $AB \in \mathrm{U}_N$.

Пусть $A \in \mathrm{U}_N$. Тогда: $A^{-1} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A^{-1}\overline{(A^{-1})^T} = A^{-1}\overline{\big(\overline{A^T}\big)^T} = A^{-1}A = I$. Следовательно, $A^{-1} \in \mathrm{U}_N$. Итак, U_N — подгруппа группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$.

8. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через SU_N множество всех матриц, удовлетворяющих условиям: $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A\overline{A^T} = I$, $\det(A) = 1$. Тогда: SU_N — подгруппа группы U_N, SU_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{C})$.

Очевидно, $\mathrm{SU}_N = \mathrm{U}_N \cap \mathrm{SL}_N(\mathbb{C})$. Тогда: SU_N — подгруппа группы U_N, SU_N — подгруппа группы $\mathrm{SL}_N(\mathbb{C})$.

9. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через $Q(\alpha)$ матрицу, удовлетворяющую условиям: $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$; $Q_1^1(\alpha) = \mathrm{ch}(\alpha)$, $Q_1^2(\alpha) = \mathrm{sh}(\alpha)$, $Q_2^1(\alpha) = \mathrm{sh}(\alpha)$, $Q_2^2(\alpha) = \mathrm{ch}(\alpha)$; $Q_m^k(\alpha) = \delta_m^k$ при: $k, m = \overline{1, N+1}$, $k \geqslant 3 \vee m \geqslant 3$. Иными словами, обозначим:

$$Q(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) & \mathrm{sh}(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{sh}(\alpha) & \mathrm{ch}(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим, $\Lambda_{1,N} = \mathrm{R}(Q)$. Тогда $\Lambda_{1,N}$ — подгруппа группы $\mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда: $Q(\alpha)Q(\beta) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$; $\big(Q(\alpha)Q(\beta)\big)_1^1 = \mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta) + \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) = \mathrm{ch}(\alpha+\beta)$, $\big(Q(\alpha)Q(\beta)\big)_1^2 = \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta)+\mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) = \mathrm{sh}(\alpha+\beta)$, $\big(Q(\alpha)Q(\beta)\big)_2^1 = \mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) + \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta) = \mathrm{sh}(\alpha+\beta)$, $\big(Q(\alpha)Q(\beta)\big)_2^2 = \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{sh}(\beta) + \mathrm{ch}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\beta) = \mathrm{ch}(\alpha+\beta)$; $\big(Q(\alpha)Q(\beta)\big)_m^k = \delta_m^k$ при: $k, m = \overline{1, N+1}$, $k \geqslant 3 \vee m \geqslant 3$. Следовательно, $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha+\beta)$. Очевидно, $Q(0) = I$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда: $Q(\alpha)Q(-\alpha) = Q(0) = I$. Следовательно, $Q(\alpha)^{-1} = Q(-\alpha)$.

Пусть $A \in \Lambda_{1,N}$. Тогда можно указать такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $A = Q(\alpha)$. Следовательно: $A = Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\det(A) = \det\big(Q(\alpha)\big) = \big(\mathrm{ch}(\alpha)\big)^2 - \big(\mathrm{sh}(\alpha)\big)^2 = 1$. Тогда $A \in \mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$. Следовательно, $\Lambda_{1,N} \subseteq \mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$. Так как: $I = Q(0) \in \Lambda_{1,N}$, то $\Lambda_{1,N} \neq \varnothing$.

Пусть $A, B \in \Lambda_{1,N}$. Тогда можно указать такие числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что: $A = Q(\alpha)$, $B = Q(\beta)$. Следовательно: $AB = Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha+\beta) \in \Lambda_{1,N}$.

Пусть $A \in \Lambda_{1,N}$. Тогда можно указать такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $A = Q(\alpha)$. Следовательно: $A^{-1} = Q(\alpha)^{-1} = Q(-\alpha) \in \Lambda_{1,N}$. Итак, $\Lambda_{1,N}$ — подгруппа группы $\mathrm{SL}_{N+1}(\mathbb{R})$.

Определение. Пусть: (G_1, F_1), (G_2, F_2) — алгебраические системы с умножением. Будем говорить, что ψ — гомоморфизм из (G_1, F_1) в (G_2, F_2), если: $\psi\colon G_1 \to G_2$; $xy \in \mathrm{D}(\psi)$ при $x, y \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ при $x, y \in \mathrm{D}(\psi)$.

Теорема (первая теорема о гомоморфизме)**.** *Пусть: (G_1, F_1) — группа, (G_2, F_2) — алгебраическая система с умножением; ψ — гомоморфизм из (G_1, F_1) в (G_2, F_2), $\mathrm{D}(\psi) = G_1$. Тогда: $\big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big)$ — группа; $\psi(e_1)$ — единица группы $\big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big)$; $\psi(u^{-1})$ — обратный элемент к элементу $\psi(u)$ в группе $\big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big)$ при $u \in G_1$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{R}(\psi) \subseteq G_2$. Тогда: $\mathrm{R}(\psi)$ — множество, $F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}$ — функция, $\mathrm{D}\big(F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big) = \big(\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)\big) \cap (G_2 \times G_2) = \mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)$. Пусть $x, y \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда можно указать такие элементы u, v, что: $u, v \in G_1$, $x = \psi(u)$, $y = \psi(v)$. Следовательно:

$F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}(x,y) = F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big(\psi(u),\psi(v)\big) = F_2\big(\psi(u),\psi(v)\big) = \psi\big(F_1(u,v)\big) \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда $\mathrm{R}\big(F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big) \subseteq \mathrm{R}(\psi)$. Обозначим: $F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}(x,y) = x \otimes y$ при $x, y \in \mathrm{R}(\psi)$.

Пусть $u, v, w \in G_1$. Тогда:

$$\big(\psi(u)\otimes\psi(v)\big)\otimes\psi(w) = \big(\psi(u)\psi(v)\big)\psi(w) = \psi(uv)\psi(w) = \psi\big((uv)w\big) =$$
$$\psi\big(u(vw)\big) = \psi(u)\psi(vw) = \psi(u)\big(\psi(v)\psi(w)\big) = \psi(u)\otimes\big(\psi(v)\otimes\psi(w)\big).$$

Пусть $u \in G_1$. Тогда:

$$\psi(u)\otimes\psi(e_1) = \psi(u)\psi(e_1) = \psi(ue_1) = \psi(u);$$
$$\psi(u)\otimes\psi(u^{-1}) = \psi(u)\psi(u^{-1}) = \psi(uu^{-1}) = \psi(e_1).$$

Пусть $x, y, z \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда можно указать такие элементы u, v, w, что: $u, v, w \in G_1$, $x = \psi(u)$, $y = \psi(v)$, $z = \psi(w)$. Следовательно:

$$(x\otimes y)\otimes z = \big(\psi(u)\otimes\psi(v)\big)\otimes\psi(w) =$$
$$\psi(u)\otimes\big(\psi(v)\otimes\psi(w)\big) = x\otimes(y\otimes z).$$

Пусть $x \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда можно указать такой элемент u, что: $u \in G_1$, $x = \psi(u)$. Тогда:

$$x\otimes\psi(e_1) = \psi(u)\otimes\psi(e_1) = \psi(u) = x;$$
$$x\otimes\psi(u^{-1}) = \psi(u)\otimes\psi(u^{-1}) = \psi(e_1).$$

Итак: $\big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big)$ — группа; $\psi(e_1)$ — единица группы $\big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big)$; $\psi(u^{-1})$ — обратный элемент к элементу $\psi(u)$ в группе $\big(\mathrm{R}(\psi),\, F_2|_{\mathrm{R}(\psi)\times\mathrm{R}(\psi)}\big)$ при $u \in G_1$. $\square$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.

[5] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.