Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет, кафедра математики

Вопросы, входящие в состав экзаменационных билетов по линейной алгебре, I поток

1. Понятие линейного пространства, примеры линейных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства, свойства линейно зависимых и линейно независимых элементов. Размерность линейного пространства, базис линейного пространства, связь базиса и размерности.
2. Координаты элемента линейного пространства, преобразование базиса, преобразование координат элемента линейного пространства при преобразовании базиса. Изоморфизм линейных пространств, сохранение размерности при изоморфизме.
3. Понятие подпространства, теорема о том, что подпространство является линейным пространством, размерность подпространства. Линейная оболочка конечного набора элементов линейного пространства. Сумма подпространств, прямая сумма подпространств. Теорема о достраивании базиса подпространства до базиса пространства.
4. Теорема Кронекера—Капелли. Однородная система линейных алгебраических уравнений и фундаментальная совокупность решений. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.
5. Понятие тензора, примеры тензоров. Сумма тензоров, умножение тензора на число, перестановка индексов, прямое произведение тензоров.
6. Понятие тензора, примеры тензоров. Сумма тензоров, умножение тензора на число, перестановка индексов, свёртка тензора.
7. Понятие линейного оператора, примеры линейных операторов. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор. Первая теорема Фредгольма (теорема о том, что $\mathrm{R}(A) = L$ тогда и только тогда, когда $\ker(A) = \{\theta\}$; здесь: $\mathrm{R}(A)$ — образ оператора A, $\ker(A)$ — ядро оператора A).
8. Сумма линейных операторов, умножение линейного оператора на число, произведение линейных операторов. Матрица линейного оператора, преобразование матрицы линейного оператора при преобразовании базиса.
9. Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения, собственные векторы, собственные подпространства, геометрическая кратность собственного значения.
10. Характеристический полином линейного оператора, алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора, приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
11. Корневые векторы. Жорданов базис, жорданова форма матрицы линейного оператора. Теорема о приведении матрицы линейного оператора к жордановой форме (без доказательства).
12. Линейная форма. Билинейная форма, симметричная билинейная форма, квадратичная форма.
13. Матрица билинейной формы, преобразование матрицы билинейной формы при преобразовании базиса. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
14. Закон инерции квадратичных форм.
15. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
16. Понятие линейного евклидова (унитарного) пространства, примеры линейных ев-

клидовых (унитарных) пространств. Неравенство Коши—Буняковского. Норма элемента линейного евклидова (унитарного) пространства.

17. Метрический тензор линейного евклидова (унитарного) пространства, вычисление координат элемента линейного евклидова (унитарного) пространства, подъём и опускание индексов.

18. Понятие линейного псевдоевклидова (псевдоунитарного) пространства, примеры линейных псевдоевклидовых (псевдоунитарных) пространств. Пространство Минковского $\mathrm{E}^{1,3}$ ($\mathrm{E}^{1,1}$). Преобразования Лоренца. Общий вид преобразований Лоренца в $\mathrm{E}^{1,1}$.

19. Метрический тензор линейного псевдоевклидова (псевдоунитарного) пространства, вычисление координат элемента линейного псевдоевклидова (псевдоунитарного) пространства, подъём и опускание индексов.

20. Ортогональное дополнение подпространства. Разложение линейного евклидова (унитарного) пространства в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Оператор ортогонального проектирования. Ортогональный базис, ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама—Шмидта.

21. Общий вид линейной формы в линейном евклидовом (унитарном) пространстве (связь между линейными формами и элементами линейного евклидова пространства). Общий вид билинейной формы в линейном евклидовом (унитарном) пространстве (связь между билинейными формами и линейными операторами). Подъём и опускание индексов.

22. Сопряженный оператор: определение и основные свойства. Вторая теорема Фредгольма (теорема о том, что $\mathrm{R}(A) = \ker(A^*)^{\perp}$; здесь: $\mathrm{R}(A)$ — образ оператора A, $\ker(A^*)$ — ядро оператора A^*).

23. Самосопряженный оператор: определение и основные свойства. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора. Теорема о приведении матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду. Спектральное разложение самосопряженного оператора.

24. Ортогональные (унитарные) операторы: определение и основные свойства. Ортогональные (унитарные) матрицы: определение и основные свойства.

25. Приведение матрицы симметричной билинейной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием. Одновременное приведение матриц двух симметричных билинейных форм к диагональному виду.

Теоретические задачи, входящие в состав экзаменационных билетов по линейной алгебре, I поток

1. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$), является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

2. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$), является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

3. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N\times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

4. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$) и подпространства антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$).

5. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства матриц с нулевым следом и подпространства матриц вида λI, где: $\lambda \in \mathbb{R}$, I — единичная матрица.

6. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^N$ представляет собой прямую сумму двух своих подпространств: подпространства столбцов, сумма элементов которых равна нулю и подпространства столбцов вида $\lambda \cdot (1, \ldots, 1)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Показать, что множество $\mathbb{C}^N$ является линейным пространством над полем вещественных чисел. Показать, что это же множество является линейным пространством над полем комплексных чисел. Найти размерность и указать какой-либо базис для каждого из указанных линейных пространств.

8. Рассматривается линейное вещественное пространство $P_{2N}(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше $2N$). Является ли подпространством пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$ множество всех полиномов F, удовлетворяющих условиям: $F(-1) = 0$, $F(1) = 0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

9. Рассматривается линейное пространство L, $\dim(L) = N \in \mathbb{N}$. Матрица C_1 является матрицей перехода от базиса e к базису e', а матрица C_2 — матрицей перехода от базиса e' к базису e''. Найти матрицу перехода от базиса e'' к базису e.

10. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$ (пространство всех матриц размера $N_2 \times N_1$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) можно ввести скалярное произведение по формуле: $(X, Y) = \mathrm{tr}(X^T Y)$ при $X, Y \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$ (здесь $\mathrm{tr}(X^T Y)$ — след матрицы $X^T Y$).

11. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_N$. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать равенство: $[A]^k_m = (e_k, Ae_m)$ при $k, m = \overline{1, N}$ (здесь $[A]$ — матрица оператора A в базисе e).

12. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_N$. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать равенство $\mathrm{tr}(A) =$

$\sum\limits_{k=1}^{N}(e_k, Ae_k)$ (здесь $\mathrm{tr}(A)$ — след оператора A).

13. Рассматривается линейное евклидово пространство H, $\dim(H) \in \mathbb{N}$. Пусть: P — линейный самосопряжённый оператор в пространстве H, $P^2 = P$. Доказать, что оператор P является оператором ортогонального проектирования на подпространство $\mathrm{R}(P)$ (здесь $\mathrm{R}(P)$ — образ оператора P).

14. Рассматривается линейное евклидово пространство H. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать, что оператор A является ортогональным оператором тогда и только тогда, когда: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H$.

15. Рассматривается линейное евклидово пространство H. Пусть A, B — линейные самосопряжённые операторы в пространстве H. Доказать, что оператор AB является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

16. Рассматривается линейное пространство L. Пусть A — линейный оператор в пространстве L. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора A является инвариантным подпространством оператора A. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора A? **Ответ обосновать**.

17. Рассматривается линейное евклидово пространство H с правым ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 (здесь H — ориентированное пространство). Пусть: $a \in H$; $Ax = [x, a]$ при $x \in H$ (здесь $[x, a]$ — векторное произведение векторов x, a). Доказать, что A — линейный оператор в пространстве H. Найти: матрицу оператора A в базисе e; ядро, образ, собственные значения, собственные векторы оператора A.

18. Рассматривается линейное унитарное пространство H. Пусть A — линейный оператор в пространстве H. Доказать, что $i(A - A^*)$ — самосопряжённый оператор.

19. Найти общий вид ортогональной матрицы размера 2×2.

20. Рассматривается линейное комплексное трёхмерное пространство L. Пусть: A — линейный оператор в пространстве L; λ — собственное значение оператора A алгебраической кратности 3. Написать все возможные виды жордановой формы матрицы оператора A в зависимости от геометрической кратности собственного значения λ.

21. Рассматривается линейное комплексное трёхмерное пространство L. Пусть: A — линейный оператор в пространстве L; λ_1, λ_2 — собственные значения оператора A алгебраических кратностей 2, 1. Написать все возможные виды жордановой формы матрицы оператора A в зависимости от геометрических кратностей собственных значений λ_1, λ_2.

22. Рассматривается линейное комплексное четырёхмерное пространство L. Пусть: A — линейный оператор в пространстве L; λ — собственное значение оператора A алгебраической кратности 4. Написать все возможные виды жордановой формы матрицы оператора A в зависимости от геометрической кратности собственного значения λ.

23. Рассматривается линейное комплексное четырёхмерное пространство L. Пусть: A — линейный оператор в пространстве L; λ_1, λ_2 — собственные значения оператора A алгебраических кратностей 3, 1. Написать все возможные виды жордановой формы матрицы оператора A в зависимости от геометрических кратностей собственных значений λ_1, λ_2.

24. Рассматривается линейное комплексное четырёхмерное пространство L. Пусть: A — линейный оператор в пространстве L; λ_1, λ_2 — собственные значения оператора A алгебраических кратностей 2, 2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Написать все возможные виды жордановой формы матрицы оператора A в зависимости от геометрических кратностей собственных значений λ_1, λ_2.

25. Рассматривается линейное пространство L над числовым полем K, $\dim(L) \in \mathbb{N}$. Пусть A — линейный оператор в пространстве L. Найти все числа $\lambda \in K$, для которых

$\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$ (здесь $\mathrm{R}(A-\lambda I)$ — образ оператора $A-\lambda I$).

26. Рассматривается линейное пространство L над числовым полем K, $\dim(L) \in \mathbb{N}$. Пусть A — линейный оператор в пространстве L. Найти все числа $\lambda \in K$, для которых $\mathrm{R}(A-\lambda I) \neq L$ (здесь $\mathrm{R}(A-\lambda I)$ — образ оператора $A-\lambda I$).

Образцы вычислительных задач, входящих в состав экзаменационных билетов по линейной алгебре, I поток

1. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы: $x_1(t) = -1+3t+2t^2$, $x_2(t) = 2t+3t^2$, $x_3(t) = -1+7t+8t^2$ при $t \in \mathbb{R}$. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3 по найденному базису.

2. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы: $x_1(t) = 1+t^2$, $x_2(t) = 5+2t+3t^2$, $x_3(t) = 2+t+t^2$, $x_4(t) = 4+t+3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $P_2(\mathbb{R})$.

3. В линейном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$) заданы элементы: $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, 0, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, 0)^T$. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама—Шмидта (без нормировки).

4. В линейном евклидовом пространстве $P_2\big([-1, 1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$ степени не выше 2; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$ при $t \in [-1, 1]$. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама—Шмидта (без нормировки).

5. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2, x в базисе e: $[x_1] = (1, 0, 0, 1)^T$, $[x_2] = (1, 1, 0, 0)^T$, $[x] = (1, 0, 0, 0)^T$. Найти: проекцию элемента x на подпространство $L(x_1, x_2)$, перпендикуляр элемента x к подпространству $L(x_1, x_2)$.

6. В линейном евклидовом пространстве $P_1\big([-1, 1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$ степени не выше 1; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [-1, 1]$. Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис пространства $P_1\big([-1, 1]\big)$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе e.

7. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ выполнить задания: найти базис линейной оболочки симметричных матриц: $X_{1,p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_{2,p} = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_{3,p} = \begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; найти размерность линейной оболочки $L\big(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}\big)$; разложить элементы $X_{1,p}$, $X_{2,p}$, $X_{3,p}$ по найденному базису.

8. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы элементы: $e_1 = (1, 2)^T$, $e_2 = (2, 5)^T$, $e'_1 = (2, 1)^T$, $e'_2 = (-1, 3)^T$. Доказать, что: элементы e_1, e_2 образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$; элементы e'_1, e'_2 образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. Найти: матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e.

9. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2. Пусть: $x = 2e_1+e_2$, $y = e_1+3e_2$. Найти: нормы элементов x, y; угол между элементами x, y. Применить к последовательности x, y процесс ортогонализации Грама—Шмидта.

10. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным бази-

сом e_1, e_2, e_3. Подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q. **Ответ обосновать**.

11. В линейном вещественном пространстве $P_1\big([0,2]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[0,2]$ степени не выше 1) задан линейный оператор, действующий по правилу: $(Ax)(t) = \int\limits_0^2 (t-\tau)x(\tau)\,d\tau$ при: $x \in P_1\big([0,2]\big)$, $t \in [0,2]$. Найти матрицу оператора A в базисе: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [0,2]$.

12. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2 в базисе e: $[x_1] = (1,0,0,1)^T$, $[x_2] = (1,1,0,0)^T$. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования P на подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе e.

13. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ исследовать на совместность неоднородную СЛАУ, заданную расширенной матрицей $\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right)$. Найти общее решение во всех случаях, когда система совместна.

14. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы: матрица $[A](e)$ линейного оператора A в базисе e; матрица перехода $\alpha(e,e')$ от базиса e к базису e'. Найти матрицу оператора A в базисе e'. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e,e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица линейного оператора A в базисе e: $[A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти все собственные значения оператора A. Для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность собственного значения; базис собственного подпространства; геометрическую кратность собственного значения (размерность собственного подпространства); общий вид собственного вектора.

16. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица линейного самосопряжённого оператора A в базисе e: $[A](e) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис e' из собственных векторов оператора A; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу оператора A в базисе e'.

17. Рассматривается линейное евклидово двумерное пространство H. Известно, что одна из двух данных матриц является матрицей некоторого линейного самосопряженного оператора в некотором (неортогональном) базисе. Установить, какая именно. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

18. В линейной оболочке $L(\cos, \sin)$ задан линейный оператор, действующий по правилу: $(Ax)(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ при: $x \in L(\cos, \sin)$, $t \in \mathbb{R}$. Найти: матрицу оператора A в базисе $\cos$, $\sin$; собственные значения и собственные векторы оператора A.

19. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Заданы

выражения для билинейных форм F_1, F_2, F_3 в базисе e. Какие из этих билинейных форм можно принять за скалярное произведение в пространстве L? Какие из этих билинейных форм нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L, но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L? **Ответ обосновать**. $F_1(x, y) = 3x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^2y^2$, $F_2(x, y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 + 3x^2y^2$, $F_3(x, y) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$.

20. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица билинейной формы F_λ в базисе e: $[F_\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ билинейную форму F_λ можно принять за скалярное произведение в пространстве L? При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ билинейную форму F_λ нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L, но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L? **Ответ обосновать**.

21. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица квадратичной формы Q_λ в базисе e: $[Q_\lambda](e) = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ исследовать квадратичную форму Q_λ на знакоопределённость и записать её канонический вид.

22. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e: $Q(x) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3$. Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе e. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе e'; найти матрицу перехода от базиса e к базису e'; найти матрицу перехода от базиса e' к базису e.

23. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e: $Q(x) = 3(x^1)^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2$. Найти: матрицу квадратичной формы Q в базисе e; ортонормированный базис e', в котором матрица квадратичной формы Q имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу квадратичной формы Q в базисе e'.

24. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы выражения для квадратичных форм Q_1, Q_2 в базисе e: $Q_1(x) = 2(x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 9(x^2)^2 + 8x^2x^3 + 2(x^3)^2$, $Q_2(x) = 3(x^1)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 + 5(x^2)^2 + 4x^2x^3 + (x^3)^2$. Найти матрицы квадратичных форм Q_1, Q_2 в базисе e. Одновременно привести квадратичные формы Q_1, Q_2 к каноническому виду: найти матрицы квадратичных форм Q_1, Q_2 в каноническом базисе e'; найти матрицу перехода от базиса e к базису e'.

25. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса и смещения начала отсчёта: найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат; найти матрицу перехода от «старого» базиса к «новому»; найти матрицу перехода от «нового» базиса к «старому»; найти начало отсчёта канонической системы координат.

26. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. **Используя ортогональные инварианты**, найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат.

Структура экзаменационного билета по линейной алгебре, I поток

1. Вычислительная задача.
2. Теоретическая задача.
3. Вопрос по линейной алгебре.
4. Вопрос по линейной алгебре.