

Задачи общего зачёта по линейной алгебре, I поток

1. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений задана расширенной матрицей A . **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы; найти размерность пространства решений соответствующей однородной системы; найти общее решение соответствующей однородной системы; найти частное решение неоднородной системы; найти общее решение неоднородной системы.

$$1.1. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{array} \right).$$

$$1.2. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & -8 \end{array} \right).$$

$$1.3. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

2. В линейном вещественном пространстве \mathbb{R}^3 заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4 . **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$$2.1. x_1 = (1, 0, 1)^T, x_2 = (5, 2, 3)^T, x_3 = (2, 1, 1)^T, x_4 = (4, 1, 3)^T.$$

$$2.2. x_1 = (1, 1, 1)^T, x_2 = (5, 3, 7)^T, x_3 = (5, 4, 6)^T, x_4 = (2, 1, 3)^T.$$

$$2.3. x_1 = (1, 0, 2)^T, x_2 = (3, 2, 8)^T, x_3 = (1, 1, 3)^T, x_4 = (2, -1, 3)^T.$$

3. В линейном вещественном пространстве \mathbb{R}^3 заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4 . **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства \mathbb{R}^3 .

$$3.1. x_1 = (1, 0, 1)^T, x_2 = (5, 2, 3)^T, x_3 = (2, 1, 1)^T, x_4 = (4, 1, 3)^T.$$

$$3.2. x_1 = (1, 1, 1)^T, x_2 = (5, 3, 7)^T, x_3 = (5, 4, 6)^T, x_4 = (2, 1, 3)^T.$$

$$3.3. x_1 = (1, 0, 2)^T, x_2 = (3, 2, 8)^T, x_3 = (1, 1, 3)^T, x_4 = (2, -1, 3)^T.$$

4. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4 . **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$$4.1. x_1(t) = 1 + t^2, x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2, x_3(t) = 2 + t + t^2, x_4(t) = 4 + t + 3t^2 \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

$$4.2. x_1(t) = 1 + t + t^2, x_2(t) = 5 + 3t + 7t^2, x_3(t) = 5 + 4t + 6t^2, x_4(t) = 2 + t + 3t^2 \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

$$4.3. x_1(t) = 1 + 2t^2, x_2(t) = 3 + 2t + 8t^2, x_3(t) = 1 + t + 3t^2, x_4(t) = 2 - t + 3t^2 \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

5. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4 . **Используя метод Гаусса**, выполнить следующие задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $P_2(\mathbb{R})$.

$$5.1. x_1(t) = 1 + t^2, x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2, x_3(t) = 2 + t + t^2, x_4(t) = 4 + t + 3t^2 \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

$$5.2. x_1(t) = 1 + t + t^2, x_2(t) = 5 + 3t + 7t^2, x_3(t) = 5 + 4t + 6t^2, x_4(t) = 2 + t + 3t^2 \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

5.3. $x_1(t) = 1 + 2t^2$, $x_2(t) = 3 + 2t + 8t^2$, $x_3(t) = 1 + t + 3t^2$, $x_4(t) = 2 - t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

6. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3 . Заданы столбцы координат $[x_1], [x_2], [x_3], [x]$ элементов x_1, x_2, x_3, x в базисе e . Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 образуют базис пространства L . Разложить элемент x по базису x_1, x_2, x_3 .

6.1. $[x_1] = (-1, 0, 1)^T$, $[x_2] = (-1, 1, 1)^T$, $[x_3] = (-1, 1, 0)^T$, $[x] = (1, 1, 1)^T$.

6.2. $[x_1] = (-1, 1, -1)^T$, $[x_2] = (0, -1, 1)^T$, $[x_3] = (-1, 1, 0)^T$, $[x] = (1, 0, 2)^T$.

6.3. $[x_1] = (-1, 0, -1)^T$, $[x_2] = (0, -1, 0)^T$, $[x_3] = (-1, 2, 0)^T$, $[x] = (2, 0, -1)^T$.

7. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3 . Заданы столбцы координат $[f_1], [f_2], [f_3], [f'_1], [f'_2], [f'_3]$ элементов $f_1, f_2, f_3, f'_1, f'_2, f'_3$ в базисе e . Доказать, что: элементы f_1, f_2, f_3 образуют базис пространства L ; элементы f'_1, f'_2, f'_3 образуют базис пространства L . Найти: матрицу перехода от базиса f к базису f' ; матрицу перехода от базиса f' к базису f . Задан столбец координат $[x](f)$ элемента x в базисе f . Найти столбец координат $[x](f')$ элемента x в базисе f' .

7.1. $[f_1] = (1, 2, 1)^T$, $[f_2] = (1, 1, 0)^T$, $[f_3] = (1, 1, 2)^T$, $[f'_1] = (0, -1, 1)^T$, $[f'_2] = (1, 0, 1)^T$, $[f'_3] = (0, -1, -1)^T$, $[x](f) = (1, 1, 1)^T$.

7.2. $[f_1] = (1, 1, 1)^T$, $[f_2] = (1, 2, 1)^T$, $[f_3] = (1, 1, 2)^T$, $[f'_1] = (-1, 0, -2)^T$, $[f'_2] = (0, -1, 1)^T$, $[f'_3] = (0, 1, 0)^T$, $[x](f) = (1, 0, 2)^T$.

7.3. $[f_1] = (2, 1, 1)^T$, $[f_2] = (1, 2, 1)^T$, $[f_3] = (1, 1, 1)^T$, $[f'_1] = (-3, -2, -2)^T$, $[f'_2] = (-1, -2, -1)^T$, $[f'_3] = (0, 3, 1)^T$, $[x](f) = (2, 0, -1)^T$.

8. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3 . Заданы: матрица $[A](e)$ линейного оператора A в базисе e ; матрица перехода $\alpha(e, e')$ от базиса e к базису e' . Найти матрицу $[A](e')$ оператора A в базисе e' .

8.1. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e, e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.2. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e, e') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.3. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e, e') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3 . Задана матрица $[A]$ линейного оператора A в базисе e . **Используя метод Гаусса**, найти: базис ядра оператора A ; размерность ядра оператора A .

9.1. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.2. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9.3. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3 . Задана матрица $[A]$ линейного оператора A в базисе e . **Используя метод Гаусса**, найти: базис образа оператора A ; размерность образа оператора A .

$$10.1. [A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$10.2. [A] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$10.3. [A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3 . Задана матрица $[A]$ линейного оператора A в базисе e . Найти все собственные значения оператора A . Для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность собственного значения; базис собственного подпространства; геометрическую кратность собственного значения (размерность собственного подпространства); общий вид собственного вектора.

$$11.1. [A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11.2. [A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11.3. [A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3, e_4 . Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e . Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе e . **Используя метод Лагранжа**, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе e' ; найти матрицу перехода от базиса e к базису e' ; найти матрицу перехода от базиса e' к базису e .

$$12.1. Q(x) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 + x^3x^4.$$

$$12.2. Q(x) = x^1x^2 + 2(x^3)^2 - 4x^3x^4 + 2(x^4)^2.$$

$$12.3. Q(x) = (x^1)^2 + 4x^1x^2 - (x^2)^2 - x^3x^4.$$

13. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2 . Заданы выражения для билинейных форм F_1, F_2, F_3 в базисе e . Какие из этих билинейных форм можно принять за скалярное произведение в пространстве L ? Какие из этих билинейных форм нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L , но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L ? Ответ обосновать.

$$13.1. F_1(x, y) = 3x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^2y^2, F_2(x, y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 + 3x^2y^2, F_3(x, y) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2.$$

$$13.2. F_1(x, y) = x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 + 2x^2y^2, F_2(x, y) = 2x^1y^1 + 2x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2, F_3(x, y) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + x^2y^2.$$

$$13.3. F_1(x, y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 + x^2y^2, F_2(x, y) = 8x^1y^1 + 2x^1y^2 + x^2y^1 + x^2y^2, F_3(x, y) = 2x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + x^2y^2.$$

14. В линейном евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2$) заданы элементы f_1, f_2 . Доказать, что элементы f_1, f_2 образуют базис пространства \mathbb{R}^2 . Найти ковариантный метрический тензор в базисе f .

$$14.1. f_1 = (1, 1)^T, f_2 = (0, 1)^T.$$

$$14.2. f_1 = (-1, 1)^T, f_2 = (1, 0)^T.$$

$$14.3. f_1 = (1, 2)^T, f_2 = (2, 1)^T.$$

15. В линейном евклидовом пространстве $P_1([0, 1])$ (пространство всех полиномов на сегменте $[0, 1]$ степени не выше 1; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt$) заданы элементы: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [0, 1]$. Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис пространства $P_1([0, 1])$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе e .

16. В линейном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$) заданы элементы x_1, x_2, x_3 . Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс Грама–Шмидта (без нормировки).

$$16.1. x_1 = (1, 1, 1)^T, x_2 = (1, 0, 0)^T, x_3 = (0, 1, 0)^T.$$

$$16.2. x_1 = (1, 0, 1)^T, x_2 = (0, 0, 1)^T, x_3 = (1, 1, 0)^T.$$

$$16.3. x_1 = (1, 1, -1)^T, x_2 = (0, 1, 0)^T, x_3 = (0, 0, 1)^T.$$

17. В линейном евклидовом пространстве $P_1([0, 1])$ (пространство всех полиномов на сегменте $[0, 1]$ степени не выше 1; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt$) заданы элементы: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ при $t \in [0, 1]$. Доказать, что элементы x_1, x_2 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2 процесс Грама–Шмидта (без нормировки).

18. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 . Заданы столбцы координат $[x_1], [x_2], [x]$ элементов x_1, x_2, x в базисе e . Найти: проекцию элемента x на подпространство $L(x_1, x_2)$, перпендикуляр элемента x к подпространству $L(x_1, x_2)$.

$$18.1. [x_1] = (1, 0, 0, 1)^T, [x_2] = (1, 1, 0, 0)^T, [x] = (1, 0, 0, 0)^T.$$

$$18.2. [x_1] = (1, 0, 0, -1)^T, [x_2] = (1, 0, 2, 0)^T, [x] = (1, 0, 0, 0)^T.$$

$$18.3. [x_1] = (1, 1, 0, 1)^T, [x_2] = (1, 0, 0, 0)^T, [x] = (1, -1, 0, 0)^T.$$

19. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4 . Заданы столбцы координат $[x_1], [x_2]$ элементов x_1, x_2 в базисе e . Найти матрицу оператора ортогонального проектирования P на подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе e .

$$19.1. [x_1] = (1, 0, 0, 1)^T, [x_2] = (1, 1, 0, 0)^T.$$

$$19.2. [x_1] = (1, 0, 0, -1)^T, [x_2] = (1, 0, 2, 0)^T.$$

$$19.3. [x_1] = (1, 1, 0, 1)^T, [x_2] = (1, 0, 0, 0)^T.$$

20. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 . Подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q . **Ответ обосновать.**

21. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 . Задана матрица линейного самосопряжённого оператора A в базисе e : $[A](e) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис e' из собственных векторов оператора A ;

матрицу перехода от базиса e к базису e' ; матрицу перехода от базиса e' к базису e ; матрицу оператора A в базисе e' .

22. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 . Задана матрица симметричной билинейной формы A в базисе e : $[A](e) =$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис e' , в котором матрица билинейной формы

A имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса e к базису e' ; матрицу перехода от базиса e' к базису e ; матрицу билинейной формы A в базисе e' .

23. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2 . Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса и смещения начала отсчёта: найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат; найти матрицу перехода от «старого» базиса к «новому»; найти матрицу перехода от «нового» базиса к «старому»; найти начало отсчёта канонической системы координат.

24. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2 . Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. **Используя ортогональные инварианты**, найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат.