Календарный план лекций по линейной алгебре, I поток

Номера пунктов в списке соответствуют номерам лекций и недель

1. **Общие сведения о функциях.** Область определения функции, область значений функции; образ множества, прообраз множества; ограничение функции, суперпозиция функций, обратная функция.
2. **Подпространства.** Сумма r подпространств, прямая сумма r подпространств (определение, простейшие свойства); базис и размерность прямой суммы r подпространств, базис и размерность суммы двух подпространств.
3. **Тензорная алгебра.** Определение числового набора степени r, линейное пространство числовых наборов степени r; матрица перехода от базиса e к базису e' (определение, простейшие свойства), преобразование координат вектора; определение геометрического объекта степени r, линейное пространство геометрических объектов степени r; определение тензора порядка $\binom{q}{p}$, линейное пространство тензоров порядка $\binom{q}{p}$; прямое произведение тензоров, свёртка тензора, перестановка индексов тензора (определение, простейшие свойства); возможные обобщения.
4. **Общие сведения о линейных операторах.** Линейный оператор, ядро линейного оператора, образ линейного оператора (определение, простейшие свойства); условие обратимости линейного оператора, простейшие свойства обратимого линейного оператора; теорема о том, что $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$, первая теорема Фредгольма; линейное пространство линейных операторов, произведение линейных операторов.
5. **Матрица линейного оператора.** Определение, простейшие свойства; матрица суммы линейных операторов, матрица произведения числа и линейного оператора, матрица произведения линейных операторов; преобразование матрицы линейного оператора.
6. **Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.** Инвариантное подпространство линейного оператора; собственное значение, собственный вектор, собственное подпространство, геометрическая кратность собственного значения; теорема о том, что собственные подпространства, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы; характеристический полином линейного оператора, алгебраическая кратность собственного значения, теорема о том, геометрическая кратность меньше либо равна алгебраической; условия того, что матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду; теорема Гамильтона—Кэли.
7. **Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.**
8. **Линейные, билинейные и квадратичные формы.** Линейная (полулинейная) форма, компоненты линейной (полулинейной) формы, преобразование компонент линейной (полулинейной) формы; сопряжённое пространство, сопряжённый базис; билинейная (полуторалинейная) форма, симметричная билинейная (эрмитова полуторалинейная) форма; квадратичная (эрмитова квадратичная) форма, теорема о том, что для квадратичной (эрмитовой квадратичной) формы Q существует единственная симметричная билинейная (эрмитова полуторалинейная) форма A, удовлетворяющая условию: $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$; матрица билинейной (полуторалинейной) формы, преобразование матрицы билинейной (полуторалинейной) формы; матрица квадратичной (эрмитовой квадратичной) формы, преобразование матрицы квадратичной (эрмитовой квадратичной) формы.
9. **Метод Лагранжа, закон инерции, критерий Сильвестра.**
10. **Евклидовы (унитарные) и псевдоевклидовы пространства.** Скалярное произведение, неравенство Коши—Буняковского, норма, метрика (повторение определений и формулировок); ковариантный метрический тензор, контравариантный метрический тен-

зор; ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, оператор P_Q ортогонального проектирования на подпространство Q, ортогональное дополнение $Q^\perp$ к подпространству Q, процесс ортогонализации Грама—Шмидта; псевдоскалярное произведение.

11. **Сопряжённый оператор.** Связь между векторами и линейными формами в евклидовом (унитарном) пространстве, дираковский формализм, связь между операторами и билинейными (полуторалинейными) формами в евклидовом (унитарном) пространстве; сопряжённый оператор (определение, простейшие свойства), матрица сопряжённого оператора; вторая теорема Фредгольма; линейный ортогональный (унитарный) оператор (определение, простейшие свойства); линейный самосопряжённый оператор (определение, простейшие свойства), оператор ортогонального проектирования.

12. **Линейный самосопряжённый оператор. Спектральная теория.** Теорема о том, что собственные значения самосопряжённого оператора в унитарном пространстве являются вещественными числами, теорема о том, что собственные подпространства самосопряжённого оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, теорема о том, что корни продолженного характеристического полинома самосопряжённого оператора в евклидовом пространстве являются вещественными числами; теорема о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого оператора. Спектральное разложение самосопряжённого оператора; теорема о существовании ортонормированного базиса, в котором матрица симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) формы в евклидовом (унитарном) пространстве диагональна; одновременное приведение матриц двух симметричных билинейных (эрмитовых полуторалинейных) к диагональному виду.

13. **Кривые и поверхности второго порядка.** Аффинное пространство, аффинные координатные карты, аффинные преобразования координат (повторение определений и формулировок); вложение N-мерного аффинного пространства в $N+1$-мерное линейное пространство. Определение кривой (поверхности) второго порядка, коэффициенты уравнения кривой (поверхности) второго порядка, преобразование коэффициентов уравнения кривой (поверхности) второго порядка; упрощение уравнения кривой (поверхности) второго порядка, классификация кривых (поверхностей) второго порядка; ортогональные инварианты уравнения кривой (поверхности) второго порядка.

14. **Общие сведения о группах.** Алгебраическая система с одной двухместной алгебраической операцией, группа (определение, простейшие свойства); подгруппа (определение, простейшие свойства); примеры групп и подгрупп (группы $S(M)$, $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_N(\mathbb{K})$, O_N, SO_N, U_N, SU_N, $\Lambda_{1,N}$); гомоморфизм, первая теорема о гомоморфизме.

Список литературы

1. *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
2. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.
3. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра.
4. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.