Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Физический факультет, кафедра математики

Вопросы по линейной алгебре, весенний семестр

(1 поток, лектор А. А. Шишкин)

1. Числовые поля. Линейное пространство (**ЛП**). Примеры **ЛП**. Линейная зависимость и линейная независимость элементов **ЛП**.
2. Размерность **ЛП**. Базис **ЛП**. Связь базиса и размерности **ЛП**.
3. Координаты элемента **ЛП**. Преобразование базиса. Преобразование координат элемента **ЛП** при преобразовании базиса. Изоморфизм **ЛП**.
4. Подпространство **ЛП**. Свойства подпространств.
5. Линейная оболочка (**ЛО**) конечного набора элементов **ЛП**. Свойства **ЛО**. **ЛО** столбцов матрицы Теоремы о ранге произведения матриц.
6. Системы линейных уравнений (**СЛУ**). Теорема Кронекера-Капелли. Однородные **СЛУ**. Фундаментальная совокупность решений однородной **СЛУ**.
7. Неоднородные **СЛУ**.
8. Евклидовы и унитарные пространства (**ЕП** и **УП**). Примеры **ЕП** и **УП**. Метрические свойства **ЕП**. Неравенство Коши-Буняковского.
9. Ортонормированный базис (**ОНБ**) в **ЕП**. Процесс ортогонализации Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства **ЕП**. Разложение **ЕП** на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.
10. Ортогональные и унитарные матрицы.
11. Общий вид линейного функционала. Изоморфизм **ЕП**.
12. Линейный оператор. Примеры. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому. Ядро и образ линейного оператора.
13. Действия над линейными операторами и соответствующие действия над матрицами. Теорема о **ЛП** линейных операторов, действующих в данном линейном пространстве над полем К.
14. Присоединенные векторы. Жорданов базис. Жорданова форма матрицы линейного оператора. Теорема о приведении матрицы линейного оператора к жордановой форме (без доказательства).
15. Умножение линейных операторов. Обратный оператор.
16. Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
17. Сопряжённый линейный оператор в **ЕП**.
18. Симметричный линейный оператор в **ЕП**.
19. Ортогональный линейный оператор в **ЕП**.
20. Сопряжённый линейный оператор в **УП**.
21. Эрмитов линейный оператор в **УП**.
22. Унитарный линейный оператор в **УП**.
23. Квадратичная форма (**КФ**). Матрица **КФ**. Изменение **КФ** при линейном преобразовании переменных.

24. Методы Лагранжа и ортогональных преобразований приведения **КФ** к каноническому виду.
25. Классификация **КФ**. Закон инерции **КФ**. Критерий Сильвестра.
26. Билинейные формы (**БФ**) и их связь с **КФ**. Метод Якоби приведения **КФ** к каноническому виду.
27. Симметричные **БФ**. Канонический базис **БФ**.
28. Приведение общего уравнения второй степени к каноническому виду. Классификация алгебраических уравнений второй степени и кривых второго порядка.
29. Инварианты алгебраического уравнения второй степени. Выражение коэффициентов канонического уравнения кривой второго порядка через его инварианты.
30. Тензоры. Примеры тензоров. Операции над тензорами.
31. Тензоры в **ЕП**. Метрические тензоры. Вычисление координат элемента **ЕП**. Подъём и опускание индексов. Физические примеры тензоров.
32. Группы. Примеры групп. Группа движений. Группа преобразований **ЛП**.
33. Псевдоевклидово пространство. Пространство Минковского. Группа преобразований Лоренца.

Теоретические задачи, входящие в экзаменационные билеты.
Первый поток, 2009 г

1. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^n(K_0)$ подмножество, состоящее из симметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T=A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
2. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^n(K_0)$ подмножество, состоящее из антисимметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T=-A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
3. Доказать, что линейное пространство V_3 представляет собой прямую сумму P_1 и P_2, где P_1 – множество векторов, ортогональных данному ненулевому вектору **b**, а P_2 - множество векторов, параллельных вектору **b**.
4. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве $H_2^2(C)$.
5. Доказать, что однородная система линейных уравнений $AX=\theta$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно зависимы.
6. Рассматривается линейное пространство $P_{2n}(K_0)$ полиномов степени не выше 2n. Является ли подпространством этого пространства множество всех полиномов p(x), удовлетворяющих условиям: $p(-1)=0$, $p(1)=0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

7. Рассматривается линейное пространство R, $\dim R=n\in\mathbf{N}$. Матрица A является матрицей перехода от базиса e к базису f, а матрица B – матрицей перехода от базиса f к базису g. Найти матрицу перехода от базиса g к базису e.

8. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^m(K_0)$ можно ввести скалярное произведение элементов X.Y по формуле: $(X,Y)=tr(X^TY)$, где $tr(X^TY)$ – след матрицы X^TY.

9.Пусть П – линейное пространство положительных чисел, в котором сумма элементов x,y определяется как произведение xy, а произведение элемента x на вещественное число c – степень x^c. Доказать, что в пространстве П любые два элемента x и y линейно зависимы.

10. Доказать, что размерность линейного пространства не меньше размерности любого его подпространства.

11. Доказать, что ранг матрицы равен размерности линейной оболочки её столбцов.

12. Доказать: если линейные пространства R и R* изоморфны , то линейно независимым элементам $x_1,x_2,\dots,x_m\in R$ соответствуют линейно независимые элементы $x_1^*,x_2^*,\dots,x_m^*\in R^*$.

13. В евклидовом пространстве **E** с ортонормированным базисом $(e_к)_n$ действует линейный оператор $\hat{A}$. Доказать равенство: $a^k_m=(e_k,\hat{A}e_m)$, $k,m=\overline{1,n}$, где $(a^k_m)^n_n$ - матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $(e_к)_n$.
14. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве **E**. Доказать, что оператор $\hat{A}$ является ортогональным оператором тогда и только тогда, когда $\|\hat{A}x\|=\|x\|$.
15. Пусть $\hat{A},\hat{B}$ – линейные симметричные операторы, действующие в евклидовом пространстве **E**. Доказать, что оператор $\hat{A}\hat{B}$ является симметричным тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$.
16. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве R. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора $\hat{A}$ является инвариантным подпространством оператора $\hat{A}$. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора $\hat{A}$? Ответ обоснуйте.
17. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном унитарном пространстве U. Доказать, что $i(\hat{A}-\hat{A}^*)$ – эрмитов оператор.
18. Найти общий вид ортогональной матрицы 2x2.
19. В линейном пространстве R_3 в базисе $(e_к)_3$ задана матрица $G=(g_{ij})=$ $=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$ дважды ковариантного тензора $[G]^0_2$. Доказать, что этот тензор можно трактовать как метрический тензор пространства R.
20. Пусть G – множество, состоящее из чисел 1,i,-1,-i. Доказать, что G абелева группа по умножению четвёртого порядка.
21. В ортонормированном базисе e_1,e_2 евклидова пространства элемент f_1 имеет координаты 1 и 0, а элемент f_2 – координаты $0{,}5\sqrt{3}$ и 0,5. Найти координаты метрического тензора $[G]^0_2$ в базисе $(f_k)_2$.
22. В ОНБ $(e_к)_2$ евклидова пространства элемент f_1 имеет координаты 1 и 0, а элемент f_2 – координаты $0{,}5\sqrt{3}$ и 0,5. Найти координаты контравариантного тензора $[G]^2_0$ в базисе $(f_k)_2$.
23. Пусть G – множество всех комплексных чисел, по модулю равных 1,а групповая операция есть умножение комплексных чисел. Доказать, что множество G с указанной операцией образует абелеву группу.
24. Доказать: если для любого элемента x группы G выполнено условие $x\circ x=e$, то G – абелева группа.

Образцы вычислительных задач, входящих в экзаменационные билеты

(1 поток, 2009 г.)

1. В линейном пространстве $P_2(K_0)$ полиномов степени не выше 2 заданы элементы $x_1(t)=-1+3t+2t^2$, $x_2(t)=2t+3t^2$, $x_3(t)=-1+7t+8t^2$. Найти размерность и базис линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3)$ и разложить указанные элементы по найденному базису.
2. В линейном пространстве $P_2(K_0)$ полиномов степени не выше 2 заданы элементы $x_1(t)=1+t^2$, $x_2(t)=5+2t+3t^2$, $x_3(t)=2+t+t^2$, $x_4(t)=4+t+3t^2$. Найти размерность и базис линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Достроить найденный базис до базиса пространства $P_2(K_0)$.
3. В линейном евклидовом пространстве E_3 (скалярное произведение определяется формулой $(x,y)=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3$) заданы элементы $x_1=(1,1,1)^т$, $x_2=(1,0,0)^т$, $x_3=(0,1,0)^т$. Доказать, что эти элементы линейно независимы и применить к ним процесс ортогонализации Шмидта (без нормировки).
4. В линейном евклидовом пространстве P_2 полиномов на сегменте $[-1,1]$ степени не выше 2, где скалярное произведение определяется формулой $(x,y)=\int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$, заданы элементы $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$. Доказать, что эти элементы линейно независимы и применить к ним процесс ортогонализации Шмидта (без нормировки).
5. В линейном евклидовом пространстве E_4 с ОНБ $(e_к)_4$ заданы столбцы координат элементов x_1, x_2, x в базисе $(e_к)_4$: $X_1=(1,0,0,1)^т$, $X_2=(1,1,0,0)^т$, $X=(1,0,0,0)^т$. Найти: проекцию элемента x на линейную оболочку $L(x_1,x_2)$, перпендикуляр элемента x к $L(x_1,x_2)$.
6. В линейном евклидовом пространстве P_1 полиномов на сегменте $[-1,1]$ степени не выше 1, где скалярное произведение определяется формулой $(x,y)=\int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$,заданы элементы $e_1(t)=1$, $e_2(t)=t$. Доказать, что указанные элементы образуют базис пространства P_1. Найти ковариантный метрический тензор в базисе e_1,e_2.
7. $\forall p \in K_0$ выполнить задания: а) найти базис линейной оболочки следующих симметричных матриц: $X_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) найти размерность этой линейной оболочки; в) разложить элементы X_1, X_2, X_3 по найденному базису.
8. В линейном пространстве $T_2(K_0)$ заданы элементы: $e_1=(1,2)^т$, $e_2=(2,5)^т$, $e_1^*=(2,1)^т$, $e_2^*=(-1,3)^т$. Доказать: а) элементы e_1,e_2 образуют базис пространства $T_2(K_0)$; б) элементы e_1^*,e_2^* образуют базис пространства $T_2(K_0)$; в) найти матрицу перехода от базиса e к базису e*; г) найти матрицу перехода от базиса e* к базису e.

9. В линейном евклидовом пространстве E_2 с ОНБ $e=(e_1,e_2)$ даны элементы $x=2e_1+e_2$, $y=e_1+3e_2$. Найти нормы элементов x,y и угол между ними. Применить к этим элементам процесс ортогонализации Шмидта.

10. В линейном евклидовом пространстве E_3 с ОНБ e_1,e_2,e_3 подпространство C задано уравнением: $x^1-2x^2+3x^3=0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству C. Ответ обосновать.

11. В линейном евклидовом пространстве T_4 найти проекцию Y и перпенди - куляр Z, опущенный из столбца $X=(2,-5,3,4)^т$ на линейную оболочку L, натянутую на столбцы $X_1=(1,3,3,5)^т$ и $X_2=(1,3,-5,-3)^т$.

12. В линейном пространстве P_1 всех полиномов на сегменте [0,2] степени не выше 1 задан линейный оператор, действующий по правилу:

$\hat{A}x(t)=\int\limits_0^2(t-\tau)x(\tau)d\tau$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $e_1(t)=1$, $e_2(t)=t$.

13. $A_e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве $R_3(K_0)$, в базисе $e=(e_к)_3$. Матрица перехода от базиса e к базису $e^*=(e_к^*)_3$ имеет вид: $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе e*.

14. $A_e=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве $R_3(K_0)$, в базисе $(e_к)_3$. Найти все собственные значения оператора $\hat{A}$. Для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность собственного значения; базис собственного подпространства; геометрическую кратность собственного значения (размерность собственного подпространства); общий вид собственного вектора.

15. $A_e=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$- матрица симметричного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном евклидовом пространстве E_3, в ОНБ $e=(e_к)_3$. Найти: ОНБ e* из собственных векторов оператора $\hat{A}$; матрицу перехода от базиса e к базису e*; матрицу перехода от базиса e* к базису e; матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе e*.

16. В евклидовом пространстве E_2 действует линейный симметричный оператор. Известно, что одна из матриц $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}-5 & -14\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ является матрицей этого оператора в некотором не ортогональном базисе. Установить, какая именно.

17. В линейной оболочке L(sin,cos) задан линейный оператор, действующий по правилу: $\hat{A}x(t)=\frac{d^2}{dx^2}x(t)$. Найти: матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе cos, sin; собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

18. В линейном пространстве $R_2(K_0)$ с базисом e_1,e_2 заданы в этом базисе билинейные формы: $B_1(x,y)=3x^1y^1+2x^1y^2+2x^2y^1+2x^2y^2$, $B_2(x,y)=2x^1y^1+x^1y^2$ - $- x^2y^1+3x^2y^2$, $B_3(x,y)=x^1y^1+3x^1y^2+3x^2y^1+4x^2y^2$. Какие из этих билинейных форм можно принять за скалярное произведение в пространстве $R_2(K_0)$, но можно принять за псевдоскалярное произведение в этом пространстве?

19. В линейном пространстве $R_2(K_0)$ в базисе $e=(e_1,e_2)$ для каждого $c\in K_0$ задана матрица билинейной формы $B_e=\begin{pmatrix} c & -2c \\ -2c & 4 \end{pmatrix}$. При каком значении c билинейную форму B(x,y) можно принять за скалярное произведение в пространстве $R_2(K_0)$? При каком значении c билинейную форму B(x,y) нельзя принять за скалярное произведение в пространстве $R_2(K_0)$, но можно принять за псевдоскалярное произведение в этом линейном пространстве?

20. В линейном пространстве $R_2(K_0)$ в базисе $e=(e_к)_2$ для каждого $c\in K_0$ задана матрица квадратичной формы $X^тAX$ $A=\begin{pmatrix} c & -2c \\ -2c & 4 \end{pmatrix}$. Для каждого значения c исследовать эту квадратичную форму на знакоопределённость и записать её канонический вид.

21. В линейном пространстве $R_4(K_0)$ в базисе $e=(e_к)_4$ задана квадратичная форма $X^тAX= x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3$. Найти матрицу этой квадратичной формы в базисе e. Методом Лагранжа привести квадратичную форму к каноническому виду. Найти матрицу квадратичной формы в каноническом базисе e*. Найти матрицу перехода от базиса e к базису e*. Найти матрицу перехода от базиса e* к базису e.

22. В евклидовом пространстве E_3 в ОНБ $e=(e_к)_3$ задана квадратичная форма $X^тAX=3(x^1)^2-4x^1x^3+(x^2)^2+3(x^3)^2$. Найти: матрицу квадратичной формы в базисе e; ОНБ e*, в котором матрица этой квадратичной формы имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса e к базису e*; матрицу перехода от базиса e* к базису e; матрицу квадратичной формы в базисе e*.

23. В линейном пространстве $R_3(K_0)$ в базисе $e==(e_к)_3$ заданы две квадратичные формы $X^тA_1X=2(x^1)^2-6x^1x^2-4x^1x^3+9(x^2)^2+8x^2x^3+2(x^3)^2$ и $X^тA_2X=3(x^1)^2-2x^1x^2-2x^1x^3+5(x^2)^2+4x^2x^3+(x^3)^2$. Найти матрицы этих квадратичных форм в базисе e. Одновременно привести эти квадратичные формы к каноническому виду.

24. В евклидовом пространстве B_2 с началом отсчёта O и ОНБ e_1,e_2 кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2-4x^1x^2+5(x^2)^2+8x^1-2x^2+9=0$. Привести это уравнение к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса и смещения начала отсчёта. Найти матрицу перехода от «старого» базиса к «новому».

25. В евклидовом пространстве B_2 с началом отсчёта O и ОНБ e_1,e_2 кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2-4x^1x^2+5(x^2)^2+8x^1-2x^2+9=0$.

Используя инварианты уравнения I_1, I_2, I_3, найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат.

Структура экзаменационного билета по линейной алгебре.

1. Вычислительная задача.
2. Теоретическая задача.
3. Вопрос по теории.
4. Вопрос по теории.