

Лекция 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

В этой лекции мы рассмотрим такие фундаментальные понятия современного нелинейного функционального анализа, как сильная, слабая и *-слабая сходимости, а также важные понятия рефлексивности и сепарабельности.

§ 1. Введение

Напомним определение нормированного пространства:

Определение 1. Нормированным пространством называется линейное пространство \mathbb{B} над полем комплексных чисел \mathbb{C}^1 такое, что определена неотрицательная функция — норма $\| \cdot \|$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- (i) $\|x\| \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{B}$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \vartheta \in \mathbb{B}$, где ϑ — нулевой элемент линейного пространства \mathbb{B} ;
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in \mathbb{B}$;
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}^1$ и всех $x \in \mathbb{B}$.

Напомним теперь определение пространства Банаха. С этой целью введем понятие фундаментальной последовательности или последовательности Коши.

Определение 2. Последовательность $\{u_n\} \in \mathbb{B}$ (\mathbb{B} — нормированное пространство) называется фундаментальной последовательностью или последовательностью Коши, если

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|u_n - u_m\| = 0. \quad (1.1)$$

Напомним понятие полноты нормированного пространства.

Определение 3. Нормированное пространство \mathbb{B} называется полным, если каждая фундаментальная последовательность сходится в этом пространстве, т. е. если для любой последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ из условия, что

$$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n, m \rightarrow +\infty$$

следует существование такого $u \in \mathbb{B}$, что

$$\|u - u_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Объединение понятие нормированного пространства и полноты приводит нас к понятию пространства Банаха:

Определение 4. *Полное нормированное пространство называется пространством Банаха.*

На одном и том же линейном пространстве, вообще говоря, можно ввести нормы самым различным образом, но как соотнести эти различные нормы? Ведь относительно одних норм линейное бесконечномерное пространство является полным, а относительно других — нет. На выручку приходит понятие эквивалентных норм.

Определение 5. *На одном и том же линейном пространстве \mathbb{B} две нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ называются эквивалентными, если найдутся такие две постоянные $0 < c_1 < c_2$, что имеют место неравенства*

$$c_1\|u\|' \leq \|u\| \leq c_2\|u\|' \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B}.$$

§ 2. Сильная, слабая и *—слабая сходимости.

Как хорошо известно из курса линейной алгебры для любого конечномерного линейного пространства \mathbb{B} существует, так называемое, линейно-сопряженное пространство $\mathbb{B}^\#$, состоящее из линейных функций — функционалов:

$$f : x \in \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}^1,$$

причем в силу линейности функционалов пространство $\mathbb{B}^\#$ тоже линейное, причем размерности пространства \mathbb{B} . Эта конструкция легко переносится на случай бесконечномерного пространства.

Определение 6. *Пространство $\mathbb{B}^\#$ — это линейное пространство линейных функционалов над пространством \mathbb{B} .*

Однако, в отличие от конечномерного пространства, когда все нормы на нем эквивалентны, в случае бесконечномерного линейного пространства \mathbb{B} на нем можно задать различные виды сходимостей. Начнем с того, что на пространстве Банаха уже есть сходимость, которую мы назовем *сильной*:

Определение 7. *Сильной сходимостью последовательности $\{u_n\}$ в банаховом пространстве \mathbb{B} к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$ называется сходимость по норме следующей числовой последовательности:*

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad \text{для некоторого } u \in \mathbb{B}. \quad (2.1)$$

В дальнейшем сильную сходимость будем обозначать следующим образом:

$$u_n \rightarrow u \quad \text{в } \mathbb{B} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

С учетом введенного понятия сильной сходимости в линейно-сопряженном пространстве $\mathbb{B}^\#$ к пространству \mathbb{B} можно выделить линейное подпространство линейных и непрерывных функционалов:

Определение 8. *Непрерывным функционалом из пространства $\mathbb{B}^\#$ называется элемент $f \in \mathbb{B}^\#$, удовлетворяющий тому условию, что числовая последовательность $\{\langle f, u_n \rangle\}$ сходится к числу $\langle f, u \rangle$ для любой сильно сходящейся последовательности $u_n \rightarrow u$ в банаховом пространстве \mathbb{B} .*

Возникает вопрос: что можно сказать о линейном пространстве \mathbb{B}^* ? Можно ли ввести на нем такую норму, относительно которой это пространство является банаховым, или нет? Для ответа на эти вопросы введем на линейном, очевидно, бесконечномерном пространстве \mathbb{B}^* (в том случае, конечно, когда \mathbb{B} бесконечномерно) норму следующим образом:

$$\|f\|_* \equiv \sup_{\|u\|=1} |\langle f, u \rangle|. \quad (2.2)$$

Докажем, что это действительно норма. Ясно, что $\|f\|_* \geq 0$. Пусть $\|f\|_* = 0$. Докажем, что отсюда следует, что $f = \vartheta$, где $\vartheta \in \mathbb{B}^*$ — есть нулевой функционал. Пусть противное: $f \neq \vartheta$. Пусть $v \in \mathbb{B}$ — это произвольный ненулевой фиксированный элемент, тогда найдется такое $R > 0$, что

$$\|u\| = 1 \quad \text{для} \quad u = \frac{v}{R},$$

и мы имеем

$$|\langle f, u \rangle| = 0 \Rightarrow \langle f, v \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B}.$$

Значит, f — это нулевой функционал линейного пространства \mathbb{B}^* , но в линейном пространстве $\mathbb{B}^* \subset \mathbb{B}^\#$ нулевой функционал единственный, т. е. $f = \vartheta$. Таким образом, свойство (i) доказано. Докажем теперь свойство (ii). Действительно,

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_* &= \sup_{\|u\|=1} |\langle f_1 + f_2, u \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} |\langle f_1, u \rangle| + \sup_{\|u\|=1} |\langle f_2, u \rangle| = \|f_1\|_* + \|f_2\|_*, \end{aligned}$$

поскольку в силу того, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это билинейный функционал над $\mathbb{B}^* \otimes \mathbb{B}$, то

$$|\langle f_1 + f_2, u \rangle| = |\langle f_1, u \rangle + \langle f_2, u \rangle| \leq |\langle f_1, u \rangle| + |\langle f_2, u \rangle|.$$

Свойство (iii) имеет место в силу следующей цепочки равенств:

$$|\langle \alpha f, u \rangle| = |\alpha \langle f, u \rangle| = |\alpha| |\langle f, u \rangle|.$$

Справедлива следующая полезная лемма:

Лемма 1. *Пусть $u \in \mathbb{B}$ и $f \in \mathbb{B}^*$, тогда имеет место следующее неравенство*

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_* \|u\|. \quad (2.3)$$

Доказательство.

По определению нормы (2.2) пространства \mathbb{B}^* имеем неравенство

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех } \|u\| = 1. \quad (2.4)$$

Пусть $v \in \mathbb{B}$, тогда если $v = \vartheta$ — нулевой функционал пространства \mathbb{B} , то неравенство (2.3), очевидно, выполнено. Пусть теперь $v \neq \vartheta$, тогда найдется такое $R > 0$, что $\|v\| = R$, но тогда для

$$u = \frac{v}{R} \quad \text{имеем } \|u\| = 1,$$

и, значит, после подстановки в (2.4) получим в силу свойств скобок двойственности следующее неравенство

$$|\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_* \|v\| \quad \text{для всех } v \in \mathbb{B} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Для произвольного нормированного пространства \mathbb{B} сопряженное пространство \mathbb{B}^* является банаховым относительно нормы (2.2).*

Доказательство.

Действительно, пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это фундаментальная последовательность функционалов, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geq N(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\|f_n - f_m\|_* \leq \varepsilon.$$

Но тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\langle f_n, u \rangle - \langle f_m, u \rangle| \leq \|f_n - f_m\|_* \|u\| \leq \varepsilon \|u\|$$

«по-точечено» по $u \in \mathbb{B}$. Следовательно, для каждого фиксированного $u \in \mathbb{B}$ последовательность

$$\{\langle f_n, u \rangle\} \subset \mathbb{C}^1$$

является фундаментальной и, следовательно, сходится в \mathbb{C}^1 , т. е. найдется такой функционал $f \in \mathbb{B}^*$, что «по-точечено» имеет место следующее предельное равенство:

$$\langle f, u \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, u \rangle.$$

Чтобы доказать полноту \mathbb{B}^* предположим, что $\|f_n - f_m\|_* < \varepsilon$ при $n, m \geq n(\varepsilon)$. Тогда $\langle f, u \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, u \rangle$ существует для каждого $u \in \mathbb{B}$ и

$$\begin{aligned} |\langle f, u \rangle - \langle f_n, u \rangle| &\leq |\langle f, u \rangle - \langle f_m, u \rangle| + \|f_m - f_n\|_* \|u\| < \\ &< |\langle f, u \rangle - \langle f_m, u \rangle| + \varepsilon \|u\|. \end{aligned}$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от m , то, полагая $m \rightarrow +\infty$, получаем, что $|\langle f, u \rangle - \langle f_n, u \rangle| \leq \varepsilon$ при $n \geq n(\varepsilon)$ равномерно

по $u \in \mathbb{B}$ для которых $\|u\| \leq 1$. Отсюда из леммы 1 следует, что $\|f\|_* < +\infty$ и что $\|f - f_n\|_* \rightarrow 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, пространство \mathbb{B}^* является банаховым относительно нормы $\|\cdot\|_*$. Совершенно понятно, что сходимость по норме $\|\cdot\|_*$ — есть сильная сходимость в пространстве \mathbb{B}^* .

Перейдем теперь к понятию слабой сходимости последовательностей банахова пространства \mathbb{B} . Дадим следующее определение.

Определение 9. *Последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ называется слабо сходящейся к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$, если для любого элемента $f \in \mathbb{B}^*$ имеем*

$$\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle.$$

Слабую сходимость последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$ будем обозначать следующим образом:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{B}.$$

Теперь можно ввести понятие слабой фундаментальной последовательности или слабой последовательности Коши.

Определение 10. *Последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ нормированного пространства \mathbb{B} называется слабо фундаментальной или слабой последовательностью Коши, если для любого фиксированного $f \in \mathbb{B}^*$ имеем*

$$|\langle f, u_n \rangle - \langle f, u_m \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty. \quad (2.5)$$

Очевидно, как всегда, что слабо сходящаяся последовательность $u_n \rightharpoonup u$ в нормированном пространстве \mathbb{B} является слабо фундаментальной. В определенном смысле сильная сходимость в банаховом пространстве \mathbb{B} является *равномерной* сходимостью, а слабая сходимость — *поточечной*.

Замечание 4. Всякая сильно сходящаяся последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ является слабо сходящейся. Действительно, в силу леммы 1 имеет место оценка:

$$|\langle f, u_n \rangle - \langle f, u \rangle| \leq \|u_n - u\| \|f\|_* \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Возникает естественный вопрос: всякая ли слабо фундаментальная последовательность является слабо сходящейся в пространстве \mathbb{B} ? Во-первых, заметим, что даже в том случае, когда \mathbb{B} — есть пространство Банаха, то отсюда отнюдь не следует, что всякая слабо фундаментальная последовательность слабо сходится в \mathbb{B} . Действительно, «банаховость» пространства \mathbb{B} лишь гарантирует, что **сильно фундаментальная** последовательность или просто фундаментальная последовательность сходится в \mathbb{B} . Очевидно, что фундаментальная по-

следовательность — есть слабо фундаментальная последовательность, но обратное неверно. Поэтому введем новое понятие.

Определение 11. *Банахово пространство \mathbb{B} называется слабо полным, если всякая слабо фундаментальная последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$:*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } \mathbb{B}.$$

Лемма 2. *Гильбертово пространство \mathbb{H} со счетным базисом слабо полно.*

Доказательство.

Пусть \mathbb{H} имеет счетный ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$, т.е. произвольный элемент $u \in \mathbb{H}$ можно представить в виде ряда

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}^1,$$

причем этот ряд абсолютно сходится, т.е.

$$\left\| u - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

где указанная норма определяется через скалярное произведение

$$\|u\| \equiv (u, u)^{1/2}.$$

Предположим, что гильбертово пространство \mathbb{H} уже отождествлено со своим сопряженным, т.е. $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$. Тогда слабая фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ эквивалентна следующему предельному равенству:

$$(u_n - u_m, v) \rightarrow 0 \text{ для всех } v \in \mathbb{H} \text{ при } n, m \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

Итак, разложим элемент u_n последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{H}$ по базису $\{e_k\}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{nk} e_k,$$

тогда предельное равенство (2.6) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_{nk} - \alpha_{mk}) (e_k, v) \rightarrow 0 \text{ для всех } v \in \mathbb{H} \quad (2.7)$$

при $n, m \rightarrow +\infty$. Будем последовательно брать $v = e_j$ при $j = 1, 2, \dots, n, \dots$. Тогда из (2.7) получим

$$\alpha_{nk} - \alpha_{mk} \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow +\infty \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Значит, числовая последовательность $\{\alpha_{nk}\}_{n=1}^{+\infty}$ фундаментальна для всех $k \in \mathbb{N}$. Стало быть, она имеет предел

$$\alpha_{nk} \rightarrow \alpha_k \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Но отсюда следует, что

$$(u_n, v) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{nk}(e_k, v) \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(e_k, v) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty$$

для всех $v \in \mathbb{H}_l \equiv \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_l\}$ при $l \in \mathbb{N}$, где символом $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_l\}$ обозначена линейная оболочка указанных элементов гильбертова пространства \mathbb{H} . В силу произвольности $l \in \mathbb{N}$ получаем, что

$$u_n \rightarrow u = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем ввести понятие $*$ -слабой сходимости в пространстве \mathbb{B}^* . Дадим следующее определение:

Определение 12. *Последовательность элементов $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*$ -слабо сходится к некоторому элементу $f \in \mathbb{B}^*$, если для любого $u \in \mathbb{B}$ имеет место предельное равенство*

$$|\langle f_n, u \rangle - \langle f, u \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (2.8)$$

Обозначается $*$ -слабая сходимость следующим образом:

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad * \text{-слабо в } \mathbb{B}^* \quad (2.9)$$

Разумеется, что из сильной сходимости в пространстве \mathbb{B}^* относительно нормы (2.2) последовательности элементов $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ следует их $*$ -слабая сходимость. Действительно, в силу леммы 1 имеем неравенство

$$|\langle f_n - f, u \rangle| \leq \|f_n - f\|_* \|u\|.$$

Как мы уже доказали, линейное пространство $\mathbb{B}^* \subset \mathbb{B}^\#$ является банаховым в силу результата теоремы 2 относительно нормы (2.2). Теперь возникает вопрос: при каких условиях пространство \mathbb{B}^* является $*$ -слабо полно в смысле ниже следующего определения?

Определение 13. *Пространство \mathbb{B}^* называется $*$ -слабо полным, если всякая $*$ -слабо фундаментальная последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ сходится, т. е. если при выполнении следующего условия*

$$|\langle f_n, u \rangle - \langle f_m, u \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty, \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B} \quad (2.10)$$

найдется такой элемент $f \in \mathbb{B}^*$, что

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad * \text{-слабо в } \mathbb{B}^*.$$

Частичный ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 3. *Гильбертово пространство \mathbb{H} со счетным базисом $*$ -слабо полно.*

Доказательство.

Мы можем считать, что гильбертово пространство \mathbb{H} уже отождествлено со своим сопряженным: $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$. Поэтому $*$ -слабая сходимость в гильбертовом пространстве эквивалентна просто слабой сходимости. Далее осталось применить лемму 2.

Лемма доказана.

Продолжим наше исследование дальше. Поскольку \mathbb{B}^* является линейным, то для него существует пространство линейных функционалов $\mathbb{B}^{\#\#}$. Если теперь рассмотреть только те из функционалов пространства $\mathbb{B}^{\#\#}$, которые являются непрерывными относительно нормы (2.2), то уже стандартным образом приходим к пространству \mathbb{B}^{**} . Дадим следующее определение:

Определение 14. *Через \mathbb{B}^{**} обозначено пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством \mathbb{B}^* , относительно нормы (2.2), т. е. множество линейных функционалов $v \in \mathbb{B}^{\#\#}$, которые удовлетворяют условию*

$$|\langle v, f_n \rangle_* - \langle v, f \rangle_*| \rightarrow 0 \quad \text{для всех } f_n \rightarrow f \text{ сильно в } \mathbb{B}^*, \quad (2.11)$$

при $n \rightarrow +\infty$ относительно нормы (2.2), где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ обозначены скобки двойственности между банаховыми пространствами \mathbb{B}^{**} и \mathbb{B}^* , т. е. $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ — это билинейный функционал над $\mathbb{B}^{**} \otimes \mathbb{B}^*$.

Понятно, что в силу теоремы 2 пространство \mathbb{B}^{**} действительно является банаховым относительно нормы

$$\|v\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v, f \rangle_*| \quad (2.12)$$

и в силу леммы 1 имеет место полезное неравенство

$$|\langle v, f \rangle_*| \leq \|v\|_{**} \|f\|_*, \quad \text{для всех } v \in \mathbb{B}^{**} \text{ и } f \in \mathbb{B}^*. \quad (2.13)$$

Заметим, что линейными и непрерывными относительно нормы (2.2) функционалами над пространством \mathbb{B}^* являются все элементы пространства \mathbb{B} . Действительно, во-первых, имеем

$$\langle \cdot, u \rangle : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

во-вторых, имеют место выражения в силу леммы 1

$$|\langle f_n, u \rangle - \langle f, u \rangle| \leq \|f_n - f\|_* \|u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

как только $f_n \rightarrow f$ сильно в \mathbb{B}^* относительно нормы (2.2). Поэтому пространство \mathbb{B} можно отождествить с некоторым подпространством в \mathbb{B}^{**} . Теперя понятна и связь скобок двойственности:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{и} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_*.$$

Действительно, имеем

$$\langle u, f \rangle_* = \langle f, u \rangle \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**} \text{ и } f \in \mathbb{B}^*.$$

Поэтому в одном частном, но важном случае, когда \mathbb{B} можно отождествить со всем пространством \mathbb{B}^{**} , получаем

$$\langle u, f \rangle_* = \langle f, u \rangle \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B} = \mathbb{B}^{**} \text{ и } f \in \mathbb{B}^*. \quad (2.14)$$

В следующем параграфе мы будем интенсивно исследовать именно этот случай.

Возникает естественный вопрос о том, как устроено множество $\mathbb{B}^{**} \setminus \mathbb{B}$ в том случае, когда \mathbb{B} является собственным подпространством пространства \mathbb{B}^{**} ? Ответ на этот вопрос выходит за рамки нашего исследования. Давайте более внимательно рассмотрим как вкладывается банахово пространство \mathbb{B} в банахово пространство \mathbb{B}^{**} . Мы уже выяснили, что существует оператор \mathbb{J} , который сопоставляет каждому элементу пространства \mathbb{B} некоторый элемент пространства \mathbb{B}^{**} , причем, очевидно, этот оператор линейный. Докажем, что этот оператор является изометричным:

$$\mathbb{J} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^{**}, \quad \|\mathbb{J}u\|_{**} = \|u\| \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B}. \quad (2.15)$$

Действительно, пусть $u \neq \vartheta$, где ϑ — нулевой элемент пространства \mathbb{B} , поскольку в противном случае равенство (2.15) очевидно. С одной стороны, имеем

$$\|v\|_{**} = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle v, f \rangle_*| = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_* \|u\| = \|u\|, \quad v = \mathbb{J}u.$$

С другой стороны, имеем

$$|\langle f, u \rangle| = |\langle v, f \rangle_*| \leq \|v\|_{**} \|f\|_*,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \|u\| \left| \left\langle f, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \right| &\leq \|v\|_{**} \|f\|_*, \\ \|u\| \sup_{\|w\|=1} |\langle f, w \rangle| &\leq \|v\|_{**} \|f\|_*, \\ \|u\| \|f\|_* &\leq \|v\|_{**} \|f\|_*, \end{aligned}$$

Значит,

$$\|u\| = \|v\|_{**}, \quad v = \mathbb{J}u, \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B}.$$

Теперь перейдем к исследованию вопросов о свойствах слабой и $*$ -слабой сходимостей.

Напомним формулировку одного из следствий из теоремы Банаха–Штейнгауза, которую иногда и называют теоремой Банаха–Штейнгауза:

Теорема о резонансе. Пусть $\{\mathbb{T}_n\}$ — последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих банахово про-

пространство \mathbb{X} в нормированное пространство \mathbb{Y} . Тогда если последовательность

$$\{\|\mathbb{T}_n x\|\}$$

ограничена при каждом фиксированном $x \in \mathbb{X}$, то и последовательность $\{\|\mathbb{T}_n\|\}$ ограничена.

Эта теорема доказана в работе [11].

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Справедливы следующие два утверждения:

- (i) Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ из банахова пространства \mathbb{B} ограничена, причем

$$\text{если } u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|u_\infty\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|;$$

- (ii) Всякая $*$ -слабо сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ из банахова пространства \mathbb{B}^* ограничена, причем

$$\text{если } f_n \xrightarrow{*} f_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|f_\infty\|_* \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_*.$$

Доказательство.

Доказательство (i). В силу уже установленного изометрического вложения $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}$ мы можем рассмотреть слабо сходящуюся последовательность

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ слабо в } \mathbb{B},$$

как последовательность функционалов из \mathbb{B}^{**} :

$$I_n(f) \equiv \langle u_n, f \rangle_* = \langle f, u_n \rangle \text{ для всех } f \in \mathbb{B}^* \text{ и } n \in \mathbb{N},$$

Поскольку последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится в \mathbb{B} , то для каждого фиксированного $f \in \mathbb{B}^*$ числовая последовательность $I_n(f)$ ограничена, но тогда по теореме о резонансе имеем, что последовательность $\{\|u_n\|\}$ тоже ограничена. Теперь заметим, что если отождествить \mathbb{B} с некоторым подпространством в \mathbb{B}^{**} , то можно обозначать элемент $u \in \mathbb{B}$ и соответствующий ему элемент $\mathbb{J}u \in \mathbb{B}^{**}$ одной и той же буквой u . С учетом этого замечания имеем

$$\|u_n\| = \|u_n\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_n, f \rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_n \rangle|,$$

поэтому получаем следующее неравенство

$$\|u_n\| \geq |\langle f, u_n \rangle| \text{ для всех } f \in \mathbb{B}^*.$$

Перейдем к нижнему пределу при $n \rightarrow +\infty$ в последнем неравенстве и получим неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| \geq |\langle f, u_\infty \rangle| \text{ для всех } f \in \mathbb{B}^*, \quad (2.16)$$

поскольку

$$\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u_\infty \rangle \text{ при } n \rightarrow +\infty \text{ для всех } f \in \mathbb{B}^*.$$

Поскольку левая часть неравенства (2.16) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, то возьмем супремум от обеих частей по $f \in \mathbb{B}^* : \|f\|_* = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| \geq \|u_\infty\|,$$

поскольку

$$\|u_\infty\| = \|u_\infty\|_{**} = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle u_\infty, f \rangle_*| = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle f, u_\infty \rangle|.$$

Доказательство (ii). Введем обозначение

$$K_n(u) \equiv \langle f_n, u \rangle \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B} \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку числовая последовательность $\{K_n(u)\}$ сходится для каждого $u \in \mathbb{B}$, то из теоремы о резонансе вытекает ограниченность числовой последовательности $\{\|f_n\|_*\}$. По определению нормы $\|\cdot\|_*$ имеем

$$\|f_n\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_n, u \rangle| \geq |\langle f_n, u \rangle|.$$

Теперь перейдем к нижнему пределу при $n \rightarrow +\infty$, тогда поскольку

$$\langle f_n, u \rangle \rightarrow \langle f_\infty, u \rangle \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B},$$

то получим неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_* \geq |\langle f_\infty, u \rangle|. \quad (2.17)$$

Поскольку левая часть неравенства (2.17) не зависит от $u \in \mathbb{B}$, то перейдем в обеих частях к супремуму по $u \in \mathbb{B} : \|u\| = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_* \geq \|f_\infty\|_*,$$

поскольку

$$\|f_\infty\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_\infty, u \rangle|.$$

Теорема доказана.

§ 3. Рефлексивность и сепарабельность

В предыдущем параграфе мы отметили, что важный случай банаховых пространств такой, когда банахово пространство \mathbb{B} можно отождествить (очевидно, изометрически) с банаховым пространством \mathbb{B}^{**} . Дадим следующее определение:

*Определение 15. Банахово пространство \mathbb{B} , которое можно отождествить со своим дважды сопряженным пространством \mathbb{B}^{**} , называется рефлексивным.*

Замечание 5. Заметим, что если \mathbb{B} — это рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым. Действительно,

это следствие простейших рассуждений. Сопряженное пространство \mathbb{W}^* к нормированному пространству \mathbb{W} является банаховым пространством в силу теоремы 2. Дважды сопряженное пространство \mathbb{W}^{**} является банаховым как сопряженное к нормированному пространству \mathbb{W}^* . Пусть теперь $\{u_n\}$ фундаментальная последовательность по норме пространства \mathbb{W} , но тогда имеем цепочку равенств

$$\|u_n - u_m\| = \|\mathbb{J}u_n - \mathbb{J}u_m\|_{**} \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty, \quad (3.1)$$

значит, последовательность $\{\mathbb{J}u_n\} \subset \mathbb{W}^{**}$ является фундаментальной в \mathbb{W}^{**} , то в силу полноты \mathbb{W}^{**} она сходится к некоторому элементу $u^{**} \in \mathbb{W}^{**}$. Но поскольку в силу рефлексивности \mathbb{W} отображение $\mathbb{J} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^{**}$ — есть «изометрия на», то получаем, что найдется такой элемент $u \in \mathbb{W}$, что

$$u^{**} = \mathbb{J}u.$$

А стало быть опять в силу изометрии \mathbb{J} имеем

$$\|u_n - u\| = \|\mathbb{J}u_n - \mathbb{J}u\|_{**} = \|\mathbb{J}u_n - u^{**}\|_{**} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Приведем некоторые результаты о свойствах рефлексивных пространств и о достаточных условиях рефлексивности банаховых пространств.

Прежде всего мы можем дать ответ на вопрос из второго параграфа о достаточных условиях слабой полноты банахова пространства:

Теорема 3. *Рефлексивные банаховы пространства слабо полны.*

Доказательство.

Итак, пусть $\{u_n\} \subset \mathbb{W}$ — есть слабо фундаментальная последовательность рефлексивного банахова пространства \mathbb{W} , т.е. имеет место выражение

$$|\langle f, u_n \rangle - \langle f, u_m \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty \quad \text{для всех } f \in \mathbb{W}^*.$$

Введем обозначение:

$$I_n \equiv \langle f, u_n \rangle.$$

В силу слабой фундаментальности последовательности $\{u_n\}$ приходим к выводу, что $\{I_n\}$ является фундаментальной числовой последовательностью, а, значит, она сходится к некоторому числу

$$I_n \rightarrow I_\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Значит, для каждого $f \in \mathbb{W}^*$ последовательность $\{I_n\}$ ограничена и, стало быть, по теореме о резонансе приходим к выводу, что последовательность ограничена $\{\|u_n\|\}$. Ниже мы докажем теорему 5 о том, что в этом случае из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{W} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$I_{n_k} \rightarrow \langle f, u \rangle \quad \text{при } k \rightarrow +\infty \quad \text{для каждого } f \in \mathbb{B}^*.$$

Но ранее мы доказали, что исходная числовая последовательность $\{I_n\}$ сходится к некоторому числу I_∞ . В силу единственности предела числовых последовательностей приходим к выводу, что

$$I_n = \langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad \text{для каждого } f \in \mathbb{B}^*.$$

Теорема доказана.

Для дальнейшего нам понадобится новое понятие — сепарабельность, которое мы неявно уже использовали при доказательстве леммы 2. В этой теореме мы рассматривали гильбертово пространство со *счетным базисом*. Действительно, если рассмотреть все возможные линейные комбинации этого счетного базиса с рациональными коэффициентами, то для произвольного элемента $u \in \mathbb{H}$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент u_ε из построенного множества, что будет иметь место неравенство

$$\|u - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Дадим следующее определение:

Определение 16. *Банахово пространство \mathbb{B} называется сепарабельным если в этом пространстве существует счетное всюду в \mathbb{B} плотное множество \mathbb{M} , т. е. если любой элемент $u \in \mathbb{B}$ можно приблизить с любой наперед заданной точностью элементом из множества $\mathbb{M} \subset \mathbb{B}$.*

Приведем без доказательства следующую полезную лемму.

Лемма 4. *Если сепарабельно банахово пространство \mathbb{B}^* , то сепарабельно и нормированное пространство \mathbb{B} .*

Доказательство этой леммы приведено в [11].

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 4. *Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства \mathbb{B} . Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в \mathbb{B} подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:*

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{B} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Доказательство.

Для простоты докажем эту теорему для случая *сепарабельного* банахова пространства \mathbb{B} .

Поскольку пространство \mathbb{B} рефлексивно, значит мы можем отождествить пространство \mathbb{B} с дважды сопряженным \mathbb{B}^{**} . Стало быть, имеем $\mathbb{B}^{**} = \mathbb{B}$, а так как \mathbb{B} сепарабельно, то сепарабельно и пространство \mathbb{B}^{**} , но это пространство является сопряженным к банахову пространству \mathbb{B}^* . Значит, в силу леммы 4 пространство \mathbb{B}^* является сепарабельным. Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это счетное всюду плотное в \mathbb{B}^*

множество. Поскольку последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ ограничена по норме, то числовая последовательность

$$\langle f_1, u_n \rangle$$

ограниченная, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_1, u_{n_1} \rangle.$$

Числовая последовательность

$$\langle f_2, u_{n_1} \rangle$$

тоже ограниченная, а значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_2, u_{n_2} \rangle.$$

Продолжая таким образом этот процесс мы получим подпоследовательность $\{u_{n_{k+1}}\}$, которая слабо сходится на элементах f_j при $j = 1, \dots, k + 1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$ исходной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится на счетном всюду плотном в \mathbb{B}^* множестве $\{f_n\}$.

Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u_\infty \in \mathbb{B}$. Пусть $f \in \mathbb{B}^*$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f, u_{m_m} \rangle| &\leq |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{n_n} \rangle| + \\ &+ |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + |\langle f, u_{m_m} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| \leq \\ &\leq \|f - f_k\|_* \|u_{n_n}\| + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_m}\|. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{f_k\}$ в пространстве \mathbb{B}^* относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\} \subset \mathbb{B}$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \rightarrow +\infty$. Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f, u_{n_n} \rangle\}$$

является фундаментальной при любом $f \in \mathbb{B}^*$. Значит, сходится. Стало быть, найдется некоторый элемент $u \in \mathbb{B}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем получить аналогичный результат в случае пространства \mathbb{B}^* .

Теорема 5. Пусть \mathbb{B} — есть сепарабельное банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов

банахова пространства \mathbb{B}^* . Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$ -слабо сходящуюся в \mathbb{B}^* подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad * \text{-слабо в } \mathbb{B}^* \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Доказательство.

Действительно, пусть $\{u_k\} \subset \mathbb{B}$ — счетное всюду в \mathbb{B} плотное. Поскольку последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ ограниченная, то числовая последовательность

$$\{\langle f_n, u_1 \rangle\}$$

ограниченная и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_{n_1}, u_1 \rangle.$$

Теперь числовая последовательность

$$\{\langle f_{n_1}, u_2 \rangle\}$$

тоже ограниченная и поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_{n_2}, u_1 \rangle.$$

Продолжая таким образом этот процесс мы получим подпоследовательность $\{f_{n_{k+1}}\} \subset \{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*$ -слабо сходящуюся на элементах u_j , где $j = 1, 2, \dots, k$. Извлекая диагональную подпоследовательность, получим итоговую подпоследовательность $\{f_{n_n}\} \subset \mathbb{B}^*$, которая $*$ -слабо сходится на счетном всюду в \mathbb{B} плотном множестве $\{u_k\} \subset \mathbb{B}$.

Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{f_{n_n}\} \subset \mathbb{B}^*$ $*$ -слабо сходится к некоторому элементу $f_\infty \in \mathbb{B}^*$. Пусть $u \in \mathbb{B}$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\langle f_{n_n}, u \rangle - \langle f_{m_m}, u \rangle| &\leq |\langle f_{n_n}, u \rangle - \langle f_{n_n}, u_k \rangle| + \\ &+ |\langle f_{n_n}, u_k \rangle - \langle f_{m_m}, u_k \rangle| + |\langle f_{m_m}, u \rangle - \langle f_{m_m}, u_k \rangle| \leq \\ &\leq \|u - u_k\| \|f_{n_n}\|_* + |\langle f_{n_n}, u_k \rangle - \langle f_{m_m}, u_k \rangle| + \|u - u_k\| \|f_{m_m}\|_*. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{u_k\}$ в пространстве \mathbb{B} относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{f_{n_n}\} \subset \{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \rightarrow +\infty$. Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f_{n_n}, u \rangle\}$$

является фундаментальной при любом $u \in \mathbb{B}$. Значит, сходится. Стало быть, найдется некоторый элемент $f \in \mathbb{B}^*$, что

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad * \text{-слабо в } \mathbb{B}^* \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

Заметим, что данное утверждение можно доказать без требования сепарабельности банахова пространства \mathbb{B}^* (см., например, [6]).

Теперь мы можем предъявить достаточные условия $*$ -слабой полноты пространства \mathbb{B}^* . Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Банахово пространство \mathbb{B}^* $*$ -слабо полно при условии, что банахово пространство \mathbb{B} сепарабельно.*

Доказательство.

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — $*$ -слабо фундаментальная последовательность, т. е. выполнено предельное равенство

$$|\langle f_n, u \rangle - \langle f_m, u \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty \quad \text{для каждого } u \in \mathbb{B}.$$

Введем обозначение:

$$K_n \equiv \langle f_n, u \rangle.$$

Тогда мы приходим к выводу, что в силу теоремы о резонансе последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ сильно в \mathbb{B}^* ограничена, т. е.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_* < +\infty.$$

Но тогда в силу теоремы 6 из последовательности $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ можно извлечь $*$ -слабо сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad \text{\textit{*}-слабо в } \mathbb{B}^* \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Значит, числовая последовательность K_{n_n} сходится:

$$K_{n_n} \rightarrow \langle f, u \rangle \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad \text{для каждого } u \in \mathbb{B}.$$

Но числовая последовательность $\{K_n\}$ по исходному предположению фундаментальная, поэтому в силу единственности предела числовых последовательностей имеем

$$K_n \equiv \langle f_n, u \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad \text{для каждого } u \in \mathbb{B}.$$

Лемма доказана.

Свойство банахова пространства \mathbb{B} быть рефлексивным, конечно, зависит от нормы, относительно которой определено пространство \mathbb{B} , а именно свойств *выпуклости* нормы. Введем новые понятия, относящиеся к свойствам выпуклости нормы.

Определение 17. *Пусть \mathbb{B} — это банахово пространство.*

(i) *Пространство \mathbb{B} называется строго выпуклым если*

$$\|u + v\| \neq \|u\| + \|v\| \quad (3.2)$$

для всех линейно независимых элементов $u, v \in \mathbb{B}$;

(ii) *Пространство \mathbb{B} называется равномерно выпуклым если для любых двух последовательностей $\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathbb{B}$ таких, что $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$ и*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n + v_n\| = 2,$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - v_n\| = 0. \quad (3.3)$$

Можно дать эквивалентные определения строгой и равномерной выпуклости в терминах « $\varepsilon - \delta$ »:

Определение 18. Пусть \mathbb{B} — это банахово пространство.

(i) Пространство \mathbb{B} называется строго выпуклым, если из неравенств $\|u\| \leq 1$ и $\|v\| \leq 1$ и $u \neq v$ следует, что

$$\|u + v\| < 2. \quad (3.4)$$

(ii) Пространство \mathbb{B} называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ и $\|u - v\| \geq \varepsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon)). \quad (3.5)$$

Замечание 6. Легко проверить, что необходимое и достаточное условие банахова пространства \mathbb{B} быть строго выпуклым следующее: Для любых $u \neq v$, из условия $\|u\| = \|v\| = 1$ вытекает, что $\|\lambda u + (1 - \lambda)v\| < 1$ для всех $\lambda \in (0, 1)$. Таким образом, строго выпуклое банахово пространство \mathbb{B} таково, что отрезок соединяющий различные точки $u, v \in \mathbb{B}$ единичной сферы пространства \mathbb{B} лежит целиком (за исключением u и v) внутри сферы.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. Равномерно выпуклое банахово пространство является строго выпуклым.

Доказательство.

Действительно, пусть \mathbb{B} — это равномерно выпуклое банахово пространство и предположим, что

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|, \quad \text{где } u \neq 0 \text{ и } v \neq 0.$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\|u\| \leq \|v\|$. Тогда справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} 2 &\geq \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|\|v\|} \|\|v\|(u + v) - (\|v\| - \|u\|)v\| \geq \\ &\geq \frac{1}{\|u\|\|v\|} [\|v\|(\|u\| + \|v\|) - (\|v\| - \|u\|)\|v\|] = 2, \end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством

$$\| \|u_1\| - \|u_2\| \| \leq \|u_1 - u_2\|,$$

которое является следствием неравенства треугольника. Таким образом, получили, что

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| = 2,$$

откуда в силу равномерной выпуклости \mathbb{B} вытекает, что

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| = 0.$$

Следовательно,

$$\|v\|u = \|u\|v.$$

Значит, элементы u и v линейно зависимы.

Лемма доказана.

Приведем без доказательства следующий важный результат В. Д. Мильмана.

Теорема 6. *Всякое равномерно выпуклое банахово пространство \mathbb{B} рефлексивно.*

Теперь мы готовы к формулировке и доказательству важного критерия сильной сходимости в банаховом пространстве \mathbb{B} при условии слабой сходимости. Этот критерий довольно часто используется в приложениях при исследовании слабых решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

Теорема 7. *Если \mathbb{B} — это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

и

$$\|u_n\| \rightarrow \|u\|$$

вытекает, что

$$u_n \rightarrow u \text{ сильно в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \rightarrow +\infty$. Теперь возьмем $\varepsilon_n = \|v_n - u\|$, тогда по определению 18 найдется такая неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$ и $\delta(0) = 0$, что

$$\|v_n + u\| \leq 2(1 - \delta(\|v_n - u\|)). \quad (3.6)$$

Поскольку в силу теоремы Мильмана банахово пространство \mathbb{B} рефлексивно, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \|v_n + u\| &= \|v_n + u\|_{**} = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle v_n + u, f \rangle_*| = \\ &= \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle f, v_n + u \rangle| \geq |\langle f, v_n + u \rangle| \end{aligned} \quad (3.7)$$

Переходя к нижнему пределу в неравенстве (3.6) с учетом неравенства (3.7), получим следующее неравенство:

$$2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta(\|v_n - u\|)) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |\langle f, v_n + u \rangle| = 2 |\langle f, u \rangle|, \quad (3.8)$$

поскольку $v_n \rightharpoonup u$ слабо в \mathbb{B} . Левая часть неравенства (3.8) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, поэтому можно перейти к supremum по всем $f \in \mathbb{B}^*$: $\|f\|_* = 1$ и получить неравенство

$$2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta(\|v_n - u\|)) \geq 2\|u\|_{**} = 2\|u\| = 2.$$

Которое возможно только в том случае, когда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u\| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\|v_n \rightarrow u \text{ сильно в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \rightarrow \|u\| = 1$.

Теорема доказана.

§ 4. Пример — пространства Лебега

Теперь мы проиллюстрируем полученные в этой лекции общие результаты на примере пространств Лебега. Прежде всего дадим определения сильной, слабой и *-слабой сходимостей для пространств $L^p(\Omega)$, где Ω область евклидова пространства \mathbb{R}^N , а $p \in [1, +\infty]$. Итак, дадим определения.

Определение 19. Последовательность $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ называется сильно сходящейся к элементу $u \in L^p(\Omega)$ при $p \in [1, +\infty]$, если имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

Определение 20. Последовательность $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ называется слабо сходящейся к элементу $u \in L^p(\Omega)$ при $p \in [1, +\infty]$, если имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f, u_n \rangle_p = \langle f, u \rangle_p \quad \text{для всех } f \in (L^p(\Omega))^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in [1, +\infty]$.

Определение 21. Последовательность $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ называется *-слабо сходящейся к функции $f \in L^\infty(\Omega)$, если для всех $u \in L^1(\Omega)$ имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_n \langle f_n, u \rangle_\infty = \langle f, u \rangle_\infty \quad \text{для всех } u \in L^1(\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^\infty(\Omega)$ и $L^1(\Omega)$.

Заметим, что в определении 20 фигурирует пространство $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in [1, +\infty)$. Оказывается справедлива следующая теорема о явном выражении этого банахова пространства.

Теорема 8. *Банахово пространство $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in (1, +\infty)$ совпадает с банаховым пространством $L^q(\Omega)$ при $q = p/(p-1)$, а в случае $p = 1$ банахово пространство $(L^1(\Omega))^*$ совпадает с пространством $L^\infty(\Omega)$.*

В силу этой теоремы мы приходим к следующему важному выводу о том, что пространства Лебега $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, +\infty)$ являются рефлексивными. Кроме того, мы намеренно определяли $*$ -слабую сходимость только для банахова пространства $L^\infty(\Omega)$, поскольку в силу рефлексивности пространств $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, +\infty)$ для этих пространств слабая сходимость эквивалентна $*$ -слабой сходимости.

Таким образом, для пространств Лебега имеют место общие результаты теорем 2, 4 и 5, которые мы переформулируем в терминах лебеговских пространств.

Теорема 9. *Справедливы следующие два утверждения:*

- (i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ из банахова пространства $L^p(\Omega)$ при $p \in [1, +\infty)$ ограничена, причем*

$$\text{если } u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|u_\infty\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|;$$

- (ii) *Всякая $*$ -слабо сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ из банахова пространства $L^\infty(\Omega)$ ограничена, причем*

$$\text{если } f_n \xrightarrow{*} f_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|f_\infty\|_* \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_*.$$

Теорема 10. *Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, +\infty)$. Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $L^p(\Omega)$ подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:*

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \text{ слабо в } L^p(\Omega) \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Теорема 11. *Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства $L^\infty(\Omega)$. Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$ -слабо сходящуюся в $L^\infty(\Omega)$ подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:*

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \text{ } * \text{-слабо в } L^\infty(\Omega) \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Теперь рассмотрим вопрос о равномерной выпуклости пространств Лебега $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, +\infty)$. Действительно, имеет место утверждение, доказанное, например, в нашей работе [17]:

Теорема 12. *Банаховы пространства $L^p(\Omega)$ равномерно выпуклы при $p \in (1, +\infty)$.*

Таким образом, в силу общего результата теоремы 7 приходим к следующему утверждению:

Теорема 13. Из того условия, что при $p \in (1, +\infty)$

$$u_n \rightarrow u \text{ слабо в } L^p(\Omega) \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

и

$$\|u_n\|_p \rightarrow \|u\|_p$$

вытекает, что

$$u_n \rightarrow u \text{ сильно в } L^p(\Omega) \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, мы рассмотрели приложение построенной общей теории банаховых пространств к пространствам Лебега $L^p(\Omega)$ при $p \in [1, +\infty]$.

§ 5. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [1], [4], [11], [12] и [26].