Лекция 12

ПРОСТРАНСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{D}'$

§ 1. Введение

В этой лекции мы рассмотрим три класса основных или, как иначе говорят, пробных функций $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$. При этом мы будем интенсивно пользоваться языком теории локально выпуклых пространств, развитый в предыдущей лекции. Затем, мы перейдем к рассмотрению соответствующих сопряженных пространств $\mathcal{D}'$, $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{E}'$ — классов распределений или, иначе, обобщенных функций. Для понимания этой лекции достаточно владеть основами теории локально выпуклых пространств, развитой в предыдущей лекции.

§ 2. Пространство распределений $\mathcal{D}'$

Перейдем к рассмотрению пространства распределений $\mathcal{D}'$. Дадим следующее определение.

Определение 6. *Через $\mathcal{D}'$ обозначим пространство линейных и непрерывных функционалов над локально выпуклым векторным топологическим пространством $\mathcal{D}$ относительно топологии τ — топологии строгого индуктивного предела пространств* $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$.

Замечание 3. Если следовать логике используемых нами обозначений, то нам следовало бы обозначить топологически сопряженное пространство к пространству $\mathcal{D}$ символом $\mathcal{D}^*$, а не $\mathcal{D}'$. Однако в литературе используется именно такое обозначение — $\mathcal{D}'$. В дальнейшем мы, как и обычно, будем обозначать действие линейного функционала $f^* \in \mathcal{D}'$ над основной функцией $\varphi \in \mathcal{D}$ посредством скобок двойственности:

$$\langle f^*, \varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathcal{D}' \quad \text{и} \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Кроме того, символом $\mathcal{D}^{\#}$ мы будем обозначать множество всех линейных функционалов над $\mathcal{D}$.

Теперь давайте обсудим свойство непрерывности распределения $f^* \in \mathcal{D}'$. Прежде всего отметим, что пространство $\mathcal{D}$ и пространство $\mathbb{C}^1$ являются борнологическими. Действительно, это следует из теоремы 2 настоящей лекции и теоремы 7 четвертой лекции. Таким образом, каждый элемент $f^* \in \mathcal{D}'$ является непрерывным отображением борнологического пространства $\mathcal{D}$ в борнологическое пространство $\mathbb{C}^1$:

$$f^* : \mathcal{D} \to \mathbb{C}^1.$$

Следовательно, из теоремы 8 четвертой лекции приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Каждый линейный функционал f^* является непрерывным в индуктивной топологии τ пространства $(\mathcal{D}, \tau)$, т. е. принадлежит $\mathcal{D}'$, тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ такой, что $\varphi_n \to \vartheta$, вытекает, что*

$$\langle f^*, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Замечание 4. Из результата теоремы 2 пункта (IV) вытекает, что в теореме 8 можно считать, что последовательность $\{\varphi_n\}$ имеет компактный носитель лежащий в некотором компакте K_n, а сходимость к нулю имеет место в смысле пространства Фреше $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$. Теперь мы можем сформулировать и доказать важный и интересный критерий того, чтобы линейный функционал f^* над $\mathcal{D}$ был распределением или иначе обобщенной функцией из $\mathcal{D}'$. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Следующие два условия эквивалентны*:
(i) $f^* \in \mathcal{D}'$;
(ii) $f^* \in \mathcal{D}^{\#}$ *и функция $\langle f^*, \varphi \rangle$ ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{D}$.*

Доказательство.

Действительно, если $f^* \in \mathcal{D}'$, то полунорма

$$p(\varphi) \equiv |\langle f^*, \varphi \rangle| \tag{2.1}$$

непрерывна. Но полунорма $p(\varphi)$ — это полунорма на борнологическом пространстве $\mathcal{D}$. Поэтому из теоремы 6 четвертой лекции вытекает, что она ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{D}$.

Пусть теперь $f^* \in \mathcal{D}^{\#}$ и функция $\langle f^*, \varphi \rangle$ ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{D}$. Но тогда опять из теоремы 6 четвертой лекции вытекает непрерывность полунормы (2.1). А значит и непрерывность линейного функционала f^*.

Теорема доказана.

Важным следствием этой теоремы является следующая лемма.

Лемма 1. *Линейный функционал $f^* \in \mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда найдется такой компакт $\mathrm{K}_n \subset \mathbb{R}^N$ и такая постоянная $\mathrm{M}_{nm} > 0$, что имеет место неравенство*:

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{2.2}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$.

Доказательство.

Достаточность. Из (2.2) получаем, что если $\{\varphi_k(x)\} \subset \subset (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ и $\varphi_k \to \vartheta$, то и

$$\langle f^*, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, в силу теоремы 8 и замечания 4 приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{D}^{'}$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{D}^{'}$, тогда полунорма (2.1) непрерывна над всем $(\mathcal{D}, \tau)$. Следовательно, эта полунорма непрерывна и над всяким $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$. А это в свою очередь означает, что найдется полунорма $p_{nm}(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$, такая, что

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} p_{nm}(\varphi).$$

Но полунорма $p_{nm}(\varphi)$ имеет следующий явный вид:

$$p_{nm}(\varphi) = \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,.$$

Формула (2.2) доказана.

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим вопрос о различных способах «топологизации» векторного пространства $\mathcal{D}^{'}$. Начнем со $*-$слабой топологии. Действительно, пусть

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathrm{A}\}$$

есть множество всех *конечных* подмножеств A из $\mathcal{D}$. Рассмотрим следующую систему множеств:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^\circ : \ \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}\,, \quad \mathrm{A}^\circ \equiv \left\{ f^* \in \mathcal{D}^{'} : \ \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant 1 \right\}. \qquad (2.3)$$

Тогда согласно определению $*-$слабой топологии мы приходим к выводу, что система множеств $\mathfrak{B}$, определенная формулой (2.3), образует базу окрестностей нуля этой топологии. Заметим, что каждый функционал $f^* \in \mathcal{D}^{'}$ определен на всяком конечном семействе элементов из $\mathcal{D}$. Поэтому при $*-$слабой «топологизации» векторного пространства $\mathcal{D}^{'}$ пространство $\mathcal{D}^{'}$ «не уменьшается». Дадим определение.

Определение 7. *Символом* $\left(\mathcal{D}^{'}_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ *мы назовем векторное топологическое пространство, полученное при $*-$слабой «топологизации» векторного пространства* $\mathcal{D}^{'}$.

Перейдем теперь к построению из $\mathcal{D}^{'}$ сильного сопряженного к $\mathcal{D}$ векторного топологического пространства. Рассмотрим следующую систему множеств:

$$\mathfrak{S} \equiv \{\mathrm{A}\}\,,$$

где A пробегает все *ограниченные* множества из $\mathcal{D}$. Рассмотрим следующую систему множеств

$$\mathfrak{B} \equiv \{A^\circ : A \in \mathfrak{S}\}, \quad A^\circ \equiv \left\{ f^* \in \mathcal{D}' : \sup_{\varphi \in A} |\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant 1 \right\}. \qquad (2.4)$$

Тогда согласно определению сильной топологии τ_s^* мы получим из векторного пространства $\mathcal{D}'$ сильное сопряженное к пространству $\mathcal{D}$, если за базу окрестностей нуля возьмем систему множеств (2.4). Дадим определение.

Определение 8. *Символом* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$ *мы назовем векторное топологическое пространство, полученное при сильной «топологизации» векторного пространства* $\mathcal{D}'$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Топология* τ_s^* *сильнее топологии* $\tau_{w^*}^*$.

Доказательство.

Надо доказать, что в топологии τ_s^* больше множеств, чем в $\tau_{w^*}^*$. Действительно, всякое конечное множество является ограниченным множеством, обратное, конечно, не верно. По этому в системе $\mathfrak{A}$ меньше множеств, чем в $\mathfrak{S}$. Следовательно в базе окрестностей нуля $\mathfrak{B}$, определенной формулой (2.3), меньше элементов, чем в базе окрестностей нуля $\mathfrak{B}$, определенной формулой (2.4).

Лемма доказана.

Теперь мы можем собрать воедино свойства локально выпуклых векторных топологических пространств $\left(\mathcal{D}'_{w^*}, \tau_{w^*}^*\right)$ и $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$, доказательство которых имеется в нашей работе [21].

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Пространство* $\left(\mathcal{D}'_{w^*}, \tau_{w^*}^*\right)$ *секвенциально полно*;

(ii) *Пространство* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$ *является полным борнологическим*;

(iii) *Всякий линейный ограниченный оператор, действующий из* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$ *в* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$, *непрерывен*;

(iv) *Для непрерывности оператора* $\mathbb{T}$, *действующего из* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$ *в* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности* $\{f_n^*\} \subset \left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$ *и* $f_n^* \to \vartheta$ *вытекало* $\mathbb{T} f_n^* \to \vartheta$ *в* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$.

Следствие 1. *Пусть задана последовательность* $\{f_n\} \subset \mathcal{D}'$ *такая, что для каждого* $\varphi \in \mathcal{D}$ *следующая числовая последовательность сходится*

$$\langle f_n, \varphi \rangle ,$$

тогда функционал определенный равенством

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle$$

принадлежит $\mathcal{D}'$.

Доказательство.

Это утверждение вытекает из пункта (i) теоремы 9. Действительно, поскольку числовая последовательность $\langle f_n, \varphi \rangle$ сходится, то она фундаментальна. Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной в $*-$слабой топологии пространства $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_{w*}$. Но тогда из утверждения (i) вытекает, что эта последовательность $\{f_n\}$ $*-$слабо сходится в $\mathcal{D}'$, т. е.

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

и $f \in \mathcal{D}'$.

Следствие доказано.

В дальнейшем построении теории обобщенных функций есть два не равнозначных направления. Можно рассматривать свойства обобщенных функций на основе введенного нами в параграфе 8 четвертой лекции понятия транспонированного оператора. При этом рассматривая всевозможные операторы

$$\mathbb{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

мы будем получать операторы,

$$\mathbb{T}^t : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'.$$

Таким способом можно вводить новые обобщенные функции, например, производная обобщенной функции. Но для того чтобы понять является ли данный оператор $\mathbb{T}^t$ непрерывным или нет в том или ином смысле, нам нужно использовать ту или иную топологию на $\mathcal{D}'$. Что мы уже, кстати, сделали. Поэтому вторым направлением является исследование свойств непрерывности линейных операторов, действующих в «топологизированных» пространствах обобщенных функций. Мы в наших дальнейших рассмотрениях будем в основном рассматривать первое направление, хотя и будем использовать некоторые преимущества второго направления. И здесь мы будем использовать результаты теоремы 9.

Теперь мы приступим к рассмотрению свойств функционалов из векторного пространства $\mathcal{D}'$ и получению новых обобщенных функций, используя способ транспонирования операторов. Напомним, определение транспонированного оператора. Пусть $\mathbb{T}$ — это линейный оператор, действующий из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$:

$$\mathbb{T} : (\mathcal{D}, \tau) \to (\mathcal{D}, \tau),$$

тогда транспонированным к нему оператором является следующий оператор

$$\mathbb{T}^t : \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau_s^*\right) \to \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau_s^*\right),$$

удовлетворяющий следующему равенству

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, \varphi \right\rangle \equiv \langle f^*, \mathbb{T}\varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad f^* \in \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right), \ \varphi \in (\mathcal{D}, \tau).$$

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 4. *Пусть $\mathbb{T}$ — это линейный ограниченный и инъективный оператор, действующий из $(\mathcal{D}, \tau)$ в $(\mathcal{D}, \tau)$. Тогда транспонированный оператор*

$$\mathbb{T}^t : \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right) \to \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right)$$

является линейным непрерывным оператором.

Доказательство.

Итак, пусть выполнены условия теоремы. Поскольку для пространства $\left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right)$ выполнены условия теоремы 9 (iv), то линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{f_n^*\} \subset \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right)$ сильно сходящейся (т. е. в топологии τ^*) к нулю вытекает, что последовательность $\{\mathbb{T}^t f_n^*\} \subset \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right)$ сильно сходится к нулю в пространстве $\left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right)$. Оператор $\mathbb{T}$ ограничен, т. е. переводит всякое ограниченное множество $\mathrm{B} \subset (\mathcal{D}, \tau)$ в ограниченное множество $\mathbb{T}(\mathrm{B}) \subset (\mathcal{D}, \tau)$. Пусть $\{f_n^*\}$ произвольная последовательность, сильно сходящаяся к нулю в $\left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right)$. Тогда согласно определению транспонированного оператора имеем

$$\sup_{\varphi \in \mathrm{B}} \left|\left\langle \mathbb{T}^t f_n^*, \varphi \right\rangle\right| = \sup_{\varphi \in \mathrm{B}} \left|\langle f_n^*, \mathbb{T}\varphi \rangle\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку множество $\mathbb{T}(\mathrm{B})$ ограничено. Отсюда сразу же получаем, что

$$\mathbb{T}^t f_n^* \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Мы ввели уже скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между пространством основных функций $(\mathcal{D}, \tau)$ и пространством линейных и непрерывных функционалов $\mathcal{D}^{'}$. Возникает вопрос: а есть ли некоторое векторное подпространство в $\mathcal{D}^{'}$ такое, что для указанных скобок двойственности, было достаточно простое явное представление? Ответ на этот вопрос положительный. Действительно, функции из $\mathcal{D}^{'}$ можно условно разделить на *регулярные* и *сингулярные*. Дадим определение.

Определение 9. *Элемент $f^* \in \mathcal{D}^{'}$ назовем регулярной обобщенной функцией, если существует такая локально интегрируемая* *функция* $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что имеет место следующее явное представление для скобок двойственности*:

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \tag{2.5}$$

В противном случае $f^* \in \mathcal{D}'$ *называется сингулярной обобщенной функцией.*

Замечание 8. Определение 9 корректно, поскольку для каждой функции $\varphi(x)$ из $\mathcal{D}$ найдется такой компакт $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$, что $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subset \mathrm{K}$. Поэтому интеграл в правой части этого определения сходится.

Отметим, что функция $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, соответствующая регулярному распределению $f^* \in \mathcal{D}'$ определена с точностью до меры Лебега нуль. Действительно, справедлива следующая лемма:

Лемма (Дюбуа–Раймонда). *Пусть* $f_1(x), f_2(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *два представителя обобщенной функции* $f^* \in \mathcal{D}'$, *т. е. имеют место равенства*

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_1(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_2(x)\varphi(x)\,dx.$$

Тогда $f_1(x) = f_2(x)$ *почти всюду.*

Доказательство.

Данная лемма следует из основной леммы вариационного исчисления, доказанной во второй лекции. Действительно, имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} [f_1(x) - f_2(x)]\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Поскольку

$$\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теперь осталось применить основную лемму вариационного исчисления.

Лемма доказана.

Замечание 5. Конечно, распределение f^* из $\mathcal{D}'$ не является, строго говоря, функцией, однако, очень удобно сопоставить обобщенной функции аргумент $x \in \mathbb{R}^N$ по следующему правилу:

$$\langle f^*(x), \varphi\rangle \equiv \langle f^*, \varphi(x)\rangle.$$

В дальнейшем мы будем использовать это правило.

Рассмотрим теперь ряд примеров.

ПРИМЕР 1. (дельта–функция Дирака) Дельта–функцией Дирака называют обобщенную функцию, действующую по формуле

$$\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0) \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

Как известно П. Дирак определял эту функцию как такую функцию, что для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(x)\varphi(x) = \varphi(0).$$

И еще тогда было отмечено, что в виде интеграла Лебега «дельта–функцию» так представить нельзя, потому что это сингулярная обобщенная функция. Покажем это. Допустим противное. Пусть существует $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ такая, что для любых $\varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0),$$

тогда для «шапочки»

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right\}, & \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \varepsilon \end{cases}$$

имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = e^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$0 = e^{-1}.$$

Следовательно, $\delta(x)$ — сингулярная обобщенная функция.

ПРИМЕР 2. (функция Хевисайда.) Функцией Хевисайда называют обобщенную функцию $\vartheta(x)$, действующую по формуле

$$\langle \vartheta(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_0^{+\infty} \cdots \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Это регулярная обобщенная функция и ее действие на основные функции из $\mathcal{D}$ задается по формуле (2.5) с помощью локально интегрируемой в $\mathbb{R}^N$ функции

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x_i \geqslant 0, \quad \forall\, i = \overline{1, N}, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Эту функцию еще называют функцией единичного скачка.

ПРИМЕР 3. (постоянная). Регулярную обобщенную функцию, действующую по правилу

$$\langle f, \varphi \rangle = c \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} c \cdot \varphi(x)\,dx,$$

называют постоянной.

ПРИМЕР 4. (главное значение интеграла от функции x^{-1}). Такое название закреплено за линейным функционалом

$$\mathcal{P}\frac{1}{x},$$

действующим по формуле

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle =$$
$$= V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1).$$

Линейность этого функционала следует из свойства линейности интеграла, осталось проверить его непрерывность. Пусть $\varphi_k(x) \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ при $k \to +\infty$, тогда, во-первых, $\varphi_k(x) = 0$ при $|x| > R$ для всех $k \in \mathbb{N}$, во-вторых,

$$\varphi_k^{'}(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad [-R, R] \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

т. е.

$$\max_{[-R;R]} \left| \varphi_k^{'}(x) \right| \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

поэтому

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi_k(x)}{x}\,dx = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(x)}{x}\,dx.$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях на $[-R, R]$ имеет место равенство

$$\varphi_k(x) - \varphi_k(0) = \varphi_k^{'}(x^{'})x \quad \text{при} \quad x^{'} \in [0, x]$$

или

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + x\varphi_k^{'}(x^{'}),$$

отсюда

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k^{'}(x^{'})}{x}\,dx.$$

Рассмотрим первое слагаемое из правой части

$$V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \right) \frac{\varphi_k(0)}{x}\,dx =$$
$$= \varphi_k(0) \cdot \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\ln|-\varepsilon| - \ln|-R| + \ln|R| - \ln|\varepsilon| \right) = 0,$$

таким образом

$$\left|\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x)\right\rangle\right| = \left|V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\varphi_k'(x')}{x}\,dx\right| = \left|V.p. \int\limits_{-R}^{R} \varphi_k'(x')\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{-R}^{R} \varphi_k'(x')\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-R}^{R} \left|\varphi_k'(x')\right|\,dx \leqslant 2R \max_{[-R,R]} \left|\varphi_k'(x)\right| \to +0$$

при $k \to +\infty$. Итак, линейный функционал

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

является обобщенной функцией на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

Покажем, что этот функционал является сингулярной обобщенной функцией. Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в $\mathbb{R}^1$ функция $f(x)$ такая, что для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\varphi(x)\,dx = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle.$$

Рассмотрим семейство основных функций типа «шапочка»

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right\}, & \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где c_ε выбираем так, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1,$$

т. е.

$$c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon},$$

где c не зависит от ε.

Вычислим теперь значения этого функционала на семействе функций $x\omega_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. С одной стороны

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\omega_\varepsilon(x)\right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\omega_\varepsilon(x)}{x}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Теперь предположим, что

$$f(x) \in \mathbb{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^1).$$

В этом случае в силу неравенства Гельдера получим неравенство

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)x\omega_\varepsilon(x)\,dx\right| = c_\varepsilon\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)x\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_\varepsilon\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right)\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{c\varepsilon}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\varepsilon^3\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\exp\left(-\frac{2}{1-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}\right)\,d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\varepsilon^{1/2}}{c}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t^2\exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)\,dt\right)^{1/2} \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. Теперь заметим, что $\mathbb{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^1)$ вложено в $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^1)$ плотно. Поэтому приходим к выводу, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)x\omega_\varepsilon(x)\,dx\right| \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$ и для функций $f(x) \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^1)$.

Полученное противоречие и означает, что

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

— сингулярная обобщенная функция.

ПРИМЕР 5. (формула Сохоцкого). Функционал

$$\frac{1}{x+i0}$$

определяется формулой

$$\left\langle\frac{1}{x+i0}, \varphi(x)\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx.$$

Докажем теперь формулу Сохоцкого:

$$\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - \pi i\delta(x).$$

Действительно, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Тогда найдется $R > 0$ такое, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > R$, и мы имеем

$$\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)(x-i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-R}^{R} \frac{(\varphi(x)-\varphi(0))\,(x-i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + i\varphi(0) \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-R}^{R} \frac{-\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle - i\pi\varphi(0) = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \varphi(x) \right\rangle.$$

Теперь мы приступаем к анализу тех линейных операций, которые допускают обобщенные функции.

I. *Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях.*

Пусть $f(x)$ локально интегрируемая в $\mathbb{R}^N$ функция и

$$x = \mathbb{A}y + b, \quad \det\mathbb{A} \neq 0$$

невырожденное линейное (в другой терминологии — аффинное) преобразование пространства $\mathbb{R}^N$ на себя, тогда для всех $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle f(\mathbb{A}y+b), \varphi(y)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\mathbb{A}y+b)\varphi(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right) \frac{dx}{|\det\mathbb{A}|} = \frac{1}{|\det\mathbb{A}|} \left\langle f(x), \varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)\right\rangle.$$

Определение 10. *Если* $\det\mathbb{A} \neq 0$, *то для всех* $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle f(\mathbb{A}y+b), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{|\det\mathbb{A}|} \left\langle f(x), \varphi\left(\mathbb{A}^{-1}(x-b)\right)\right\rangle.$$

Мы видим, что выполнены все условия следствия из теоремы 10 для линейных невырожденных отображений и поэтому это отображение является непрерывным из $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$ на все $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$.

ПРИМЕР 6. Доказать, что

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|^N}\delta(x), \quad a \neq 0.$$

Действительно, для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ имеем

$$\langle \delta(ax), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(ax_1, ax_2, ..., ax_N), \varphi(x_1, x_2, ..., x_N)\rangle =$$

$$= \frac{1}{|a||a|\cdots|a|}\left\langle \delta(x_1, x_2, ..., x_N), \varphi\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, ..., \frac{x_N}{a}\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{|a|^N}\varphi(0) = \frac{1}{|a|^N}\langle\delta(x), \varphi(x)\rangle = \left\langle \frac{1}{|a|^N}\delta(x), \varphi(x)\right\rangle.$$

П Р И М Е Р 7. Доказать, что

$$\delta(x-\nu) \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to +\infty \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1).$$

Согласно определениям сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ и замены переменных в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ получаем, что для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\langle\delta(x-\nu), \varphi(x)\rangle = \langle\delta(x), \varphi(x+\nu)\rangle = \varphi(\nu) \to 0 \quad \text{при} \quad \nu \to +\infty$$

поскольку $\varphi(x)$ финитна.

П Р И М Е Р 8. Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(x-k)$$

сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ для всех $a_k \in \mathbb{C}$. Действительно, пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, тогда

$$\left\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(x-k), \varphi(x)\right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\varphi(k),$$

согласно предыдущему примеру, правая часть этого равенства содержит конечное число слагаемых, поэтому ряд сходится.

II. *Умножение обобщенных функций.*

Пусть $f(x)$ локально интегрируема в $\mathbb{R}^N$ и $a(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Тогда имеем

$$\langle a(x)f(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)a(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \langle f(x), a(x)\varphi(x)\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

О п р е д е л е н и е 11. *Если* $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $a(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, *тогда для всех* $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle a(x)f(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), a(x)\varphi(x)\rangle.$$

Относительно этого отображения отметим только одно. Если $a(x) \neq \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$, тогда выполнены все условия теоремы 10, и мы приходим к выводу, что это непрерывная операция из $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$ в $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$.

П Р И М Е Р 9. Доказать, что для всех $a(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

Действительно, для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), a(x)\varphi(x)\rangle = a(0)\varphi(0) = \\ = a(0)\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle = \langle a(0)\delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

В частности, $x\delta(x) = 0$.

ПРИМЕР 10. Введем функционал

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx.$$

Доказать, что

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, тогда

$$\left\langle x\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x\varphi(x)\right\rangle = \\ = V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x) - 0\varphi(0)}{x^2}\, dx = V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle.$$

ПРИМЕР 11. Вычислить пределы в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ при $t \to +\infty$ обобщенных функций

$$\frac{e^{ixt}}{x \pm i0},$$

определенные выражением

$$\left\langle \frac{e^{ixt}}{x \pm i0}, \varphi(x)\right\rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\, dx.$$

Как уже мы ранее установили, справедливы следующие формулы Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

из которых можно сделать вывод, что две новые обобщенные функции являются сингулярными.

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, тогда

$$\left\langle \frac{e^{ixt}}{x - i0}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle e^{ixt}\left(i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\right), \varphi(x)\right\rangle = \\ = \left\langle i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{ixt}\varphi(x)\right\rangle = i\pi\varphi(0) + \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{ixt}\varphi(x)\right\rangle.$$

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{ixt}\varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\cos(xt)\varphi(x) + i\sin(xt)\varphi(x)}{x}\, dx =$$

$$= \left\langle \mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}, \varphi(x) \right\rangle + i\pi \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\sin(xt)}{\pi x}\varphi(x)\, dx,$$

где обобщенная функция

$$\mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}$$

определена соотношением

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}, \varphi(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x}\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1).$$

Докажем теперь, что при $t \to +\infty$

$$\mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x} \to 0 \quad \text{в смысле} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1).$$

Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получаем

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\cos(tx)}{x} \left(\varphi(0) + x\varphi'(x') \right) dx,$$

где $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [-R, R]$. В силу нечетности функции

$$\frac{\cos(xt)}{x},$$

имеем равенство

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \int\limits_{-R}^{R} \varphi'(x') \cos(tx)\, dx,$$

откуда в силу леммы Римана вытекает равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \left\langle \mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}, \varphi(x) \right\rangle = 0.$$

Кроме того, можно доказать следующее предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\sin(xt)}{\pi x}\varphi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\pi x}\varphi(x)\, dx \to \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle .$$

Таким образом, при $t \to +\infty$ для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\left\langle \frac{e^{ixt}}{x - i0}, \varphi(x) \right\rangle \to 2i\pi\varphi(0) = \langle 2\pi i\delta(x), \varphi(x)\rangle$$

или

$$\frac{e^{ixt}}{x - i0} \to 2\pi i\delta(x) \quad \text{в смысле} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1).$$

III. *Дифференцирование обобщенных функций.*

Если $f(x) \in \mathbb{C}^p(\mathbb{R}^N)$ и $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, то для всех α с $|\alpha| \leqslant p$ справедливо интегрирование по частям для $N-$кратного интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot \partial^\alpha \varphi(x)\, dx.$$

Внеинтегральные члены обратились в нуль в силу финитности основной функции $\varphi(x)$. Поскольку функции $\partial^\alpha f(x)$ и $f(x)$ локально интегрируемы, то стало быть они порождают регулярные обобщенные функции, так что справедливо следующее равенство

$$\langle \partial^\alpha f(x), \varphi(x)\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \partial^\alpha \varphi(x)\rangle\,.$$

Определение 12. *Для всех α, всех $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ и всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ производная обобщенной функции $\partial^\alpha f(x)$ определяется равенством*

$$\langle \partial^\alpha f(x), \varphi(x)\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \partial^\alpha \varphi(x)\rangle\,.$$

Здесь мы заметим, что отображение $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha : (\mathcal{D}, \tau) \to (\mathcal{D}, \tau)$ является инъективным ограниченным отображением. Поэтому выполнены все условия теоремы 10, из которой заключаем, что введенное линейное транспонированное отображение

$$\partial^\alpha : \left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right) \to \left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$$

является непрерывным.

ПРИМЕР 12. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ имеет место равенство

$$\vartheta'(x) = \delta(x).$$

Действительно, для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ справедлива следующая цепочка равенств

$$\left\langle \vartheta'(x), \varphi(x) \right\rangle = -\left\langle \vartheta(x), \varphi'(x) \right\rangle = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

Пример 13. Пусть функция $f(x)$ такова, что $f(x) \in \mathbb{C}^1(x \leqslant x_0) \cap \mathbb{C}^1(x \geqslant x_0)$. Покажем, что

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0),$$

где $\delta(x-x_0)$ — δ-функция Дирака: $\langle \delta(x-x_0), \varphi\rangle = \varphi(x_0)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$, $[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ — скачок функции $f(x)$ в точке x_0, $\{f'(x)\}$ — классическая производная там, где она существует.

Действительно, если $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, то

$$\begin{gathered}
\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int f(x)\varphi'(x)\,dx = \\
= [f(x_0+0) - f(x_0-0)]\,\varphi(x_0) + \int \{f'(x)\}\varphi(x)dx = \\
= \langle \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0), \varphi\rangle.
\end{gathered}$$

Пример 14. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, тогда

$$\begin{gathered}
\left\langle \frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi'(x)\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi'(x)}{x}dx = \\
= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\left(\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \Big|_{\varepsilon}^{+\infty}\right) + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx\right) = \\
= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(0)}{x^2}\,dx + \right. \\
\left. + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\right) = \\
= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right) - \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle = \\
= -\varphi'(0-0) + \varphi'(0+0) - \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle,
\end{gathered}$$

так как $\varphi'(0-0) = \varphi'(0+0)$ для любой $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

Пример 15. Найти общее решение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ дифференциального уравнения

$$x^2 y''' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Поскольку данное дифференциальное уравнение является линейным и неоднородным, то общее решение представимо в виде суммы $y_1(x) \in \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — некоторого частного решения неоднородного уравнения и $y_2(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — общего решения соответствующего однородного уравнения. Найдем эти составляющие в отдельности:

$$x^2 y_1''' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Можно доказать, что

$$x^2 \mathcal{P}\frac{1}{x^3} = \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

где функционал

$$\mathcal{P}\frac{1}{x^3}$$

определяется выражением

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^3}\, dx.$$

Стало быть, функция y_1 подходит на роль частного решения неоднородного уравнения, если

$$y_1''' = \mathcal{P}\frac{1}{x^3}.$$

Можно доказать, что

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}.$$

Поэтому для функции $y_1(x) \equiv \frac{1}{2}\ln|x|$ имеем:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\ln|x|, \quad y_1' = \frac{1}{2}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \quad y_1'' = -\frac{1}{2}\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \quad y_1''' = \mathcal{P}\frac{1}{x^3}.$$

Тем самым частное решение построено.

Известно, что общим решением уравнения

$$x^m u = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$$

является функция

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x).$$

Поскольку составляющая $y_2(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^2 y_2''' = 0,$$

то

$$y_2''' = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x).$$

Проинтегрируем это уравнение последовательно три раза.

$$y_2'' = c_0\vartheta(x) + c_1\delta(x) + c_2,$$
$$y_2' = c_0 x\vartheta(x) + c_1\vartheta(x) + c_2 x + c_3,$$
$$y_2 = c_0\frac{x^2}{2}\vartheta(x) + c_1 x\vartheta(x) + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Итак, общим решением является функция

$$y = \frac{1}{2}\ln|x| + \Big(c_0 x^2 + c_1 x\Big)\vartheta(x) + c_2 x^2 + c_3 x + c_4,$$

где c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 — это произвольные постоянные.

ПРИМЕР 16. Определим обобщенную функцию

$$\delta(at - |x|) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad a > 0,$$

равенством

$$\delta(at - |x|) = \vartheta(t)\delta(at + x) + \vartheta(t)\delta(at - x),$$

где обобщенные функции $\vartheta(t)\delta(at \pm x)$ есть результаты линейной замены переменных $\tau = t$, $\xi = at \pm x$ у обобщенной функции $\vartheta(\tau)\delta(\xi)$, т. е.

$$\langle\vartheta(t)\delta(at + x), \varphi(t, x)\rangle = \int\limits_0^{+\infty}\varphi(t, -at)\,dt,$$

$$\langle\vartheta(t)\delta(at - x), \varphi(t, x)\rangle = \int\limits_0^{+\infty}\varphi(t, at)\,dt.$$

ПРИМЕР 17. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(at - |x|) = a\delta(at - |x|).$$

Здесь

$$\vartheta(at - |x|) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad at - |x| \geqslant 0, \\ 0, & \text{при} \quad at - |x| < 0. \end{cases}$$

Пусть $\varphi(t, x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, тогда

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(at - |x|), \varphi(t, x)\right\rangle = -\left\langle\vartheta(at - |x|), \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle =$$
$$= -\int\limits_{-\infty}^{0} dx\int\limits_{-x/a}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt - \int\limits_{0}^{+\infty} dx\int\limits_{x/a}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\varphi(t,x)\Big|_{-x/a}^{+\infty}\right) dx - \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\varphi(t,x)\Big|_{x/a}^{+\infty}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi\left(-\frac{x}{a}, x\right) dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{a}, x\right) dx.$$

В первом интеграле осуществим замену переменных $\tau = -x/a$, а вовтором $\tau = x/a$, тогда получим цепочку равенств

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\vartheta(at-|x|), \varphi(t,x)\right\rangle = -a\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(\tau, -a\tau)\, d\tau + a\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\tau, a\tau)\, d\tau =$$

$$= a\left(\langle\vartheta(t)\delta(at+x), \varphi(t,x)\rangle + \langle\vartheta(t)\delta(at-x), \varphi(t,x)\rangle\right) =$$

$$= a\langle\delta(at-|x|), \varphi(t,x)\rangle.$$

Из определения 12 вытекает, что все обобщенные функции из $\mathcal{D}'$ бесконечное число раз дифференцируемые. Это наводит на следующее соображение — а может быть, все обобщенные функции являются производными конечного порядка от обобщенных функций? Оказывается наше условное деление на регулярные и сингулярные функции совершенно не случайно! Все обобщенные функции можно получить из класса регулярных обобщенных функций с помощью операции дифференцирования.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *— это произвольное распределение. Тогда найдется такой компакт* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$*, такой мультииндекс* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ *и такая непрерывная функция* $f(x) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^N\right)$*, что имеет место представление*

$$\langle f^*, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}), \tag{2.6}$$

где $\alpha = (n+2, n+2, ..., n+2)$.

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что компакт $\mathbb{K} \subset \mathrm{Q}$, где

$$\mathrm{Q} \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ 0 \leqslant x_k \leqslant 1, \ k = \overline{1, N}\right\}.$$

Для всякой функции $\psi(x) \in (\mathcal{D}(Q), \tau_{\mathrm{Q}})$ справедлива следующая формула среднего значения:

$$|\psi(x)| \leqslant \max_{x\in\mathrm{Q}} |\partial_{x_i}\psi(x)|\,. \tag{2.7}$$

Введем оператор:

$$\partial \equiv \partial_{x_1}\partial_{x_2}\cdots\partial_{x_N}.$$

Для любой функции $\psi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{Q}), \tau_{\mathrm{Q}})$ имеет место следующее представление:

$$\psi(x) = \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_{y_1} \partial_{y_2} \cdots \partial_{y_N} \psi(y) =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_y \psi(y). \quad (2.8)$$

Напомним, что на локально выпуклом пространстве $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ топология τ_{K} определяется счетной системой норм:

$$\|\psi\|_n \equiv \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Из (2.8) вытекает равенство

$$\partial^\alpha \psi(x) = \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_0^{x_N} dy_N \partial_y \partial_y^\alpha \psi(y)\, dy. \quad (2.9)$$

Действительно, достаточно в формуле (2.8) взять вместо функции $\psi(y)$ функцию $\partial_y^\alpha \psi(y)$.

Отсюда и из формулы (2.7) получаем неравенство

$$\|\psi\|_n \leqslant \int\limits_{\mathrm{Q}} \left|\partial^{n+1} \psi(y)\right| \, dy, \quad (2.10)$$

которое справедливо для всех $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{Q})$. С другой стороны, для любого распределения $f^* \in \mathcal{D}'$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$ и такое число $\mathrm{M} > 0$, что имеет место неравенство

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant M \|\varphi\|_n \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}).$$

Поэтому отсюда и из (2.10) получим следующее неравенство:

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M} \int\limits_{\mathrm{K}} \left|\partial^{n+1} \varphi(x)\right| \, dx \text{ для всех } \varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}) \subset (\mathcal{D}(\mathrm{Q}), \tau_{\mathrm{Q}}). \quad (2.11)$$

Теперь заметим, что оператор дифференцирования ∂^β, как мы уже отмечали, действует инъективно из $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ в $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$. Действительно, ядром оператора ∂^β являются полиномы по переменным $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$, которые, очевидно, принадлежат пространству $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ тогда и только тогда, когда это полиномы с нулевыми коэффициентами. Поэтому оператор

$$\partial^{n+1} : (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}}) \to (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$$

является инъективным. Введем векторное пространство

$$\mathrm{X}_n \equiv \left\{\partial^{n+1}\mathcal{D}(\mathrm{K})\right\},$$

которое действительно векторное, как инъективный образ векторного пространства. Определим теперь на X_n линейный функционал:

$$\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n \equiv \langle f^*, \varphi\rangle, \tag{2.12}$$

где $\psi_n = \partial^{n+1}\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{K})$. Причем из (2.11) вытекает, что для всех $\psi_n \in \mathrm{X}_n$ имеет место неравенство

$$|\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n| \leqslant \mathrm{M}\int\limits_{\mathrm{K}} \left|\partial^{n+1}\varphi(x)\right|\, dx = \mathrm{M}\int\limits_{\mathrm{K}} |\psi_n(x)|\, dx.$$

Следовательно, по теореме Хана–Банаха линейный функционал f_1^* можно продолжить с X_n до линейного функционал над $\mathbb{L}^1(\mathrm{K})$. Иначе говоря, найдется такая функция $g(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathrm{K})$, что имеет место равенство

$$\langle f_1^*, \psi_n\rangle_n = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x)\psi_n(x)\, dx = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x)\partial^{n+1}\varphi(x)\, dx.$$

Отсюда и из (2.12) мы пришли к равенству

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathrm{K}} g(x)\partial^{n+1}\varphi(x)\, dx \quad \text{для некоторой} \quad g(x) \in \mathbb{L}^\infty(\mathrm{K}). \tag{2.13}$$

Теперь продолжим функцию $g(x)$ нулем вне компакта K и, таким образом, получим, что $g(x) \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. Введем функцию

$$\overline{f}(x) = (-1)^N \int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} dy_2 \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_N} dy_N g(y)$$

и тогда, интегрируя по частям в (2.13), получим равенство

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathrm{R}^N} \overline{f}(x)\partial^{n+2}\varphi(x)\, dx =$$
$$= (-1)^{n+2}\int\limits_{\mathrm{R}^N} f(x)\partial^{n+2}\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}), \tag{2.14}$$

где по построению функция $f(x) = (-1)^{n+2}\overline{f}(x) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Теперь осталось положить $\alpha = (n+2, n+2, ..., n+2)$ и получить из (2.14) равенство

$$\langle f^*, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\mathrm{R}^N} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}).$$

Теорема доказана.

Замечание 6. Из теоремы 11 вытекает, что локально каждая обобщенная функция $f^* \in \mathcal{D}'$ представима как производная конечного порядка от некоторой непрерывной функции. В следующей теореме мы докажем, что это, на самом деле, глобальный результат.

Рассмотрим теперь понятие носителя обобщенной функции. Будем говорить, что обобщенная функция $f^* \in \mathcal{D}'$ обращается в нуль на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, если

$$\langle f^*, \varphi\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \operatorname{supp}\{\varphi\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Дадим определение.

Определение 13. *Носителем* $\operatorname{supp}\{f^*\}$ *обобщенной функции из* $\mathcal{D}'$ *назовем наименьшее замкнутое множество в* $\mathbb{R}^N$ *такое, что она обращается в нуль на множестве* $\mathbb{R}^N \setminus \operatorname{supp}\{f^*\}$.

Теорема 6. *Пусть* $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *и носитель* $\operatorname{supp}\{f^*\} \subset \mathrm{K}$, *где* K — *это компакт в* $\mathbb{R}^N$. *Тогда существуют такие непрерывные функции* $f_\beta(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что*

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \sum_{\beta_i \leqslant n+2} (-1)^{|\beta|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\beta(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Доказательство.

Пусть компакт $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$ — носитель обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$. Пусть U — это открытое множество в $\mathbb{R}^N$ такое, что $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ и $\overline{\mathrm{U}}$ компакт. Применим формулу (2.6) к компакту $\overline{\mathrm{U}}$:

$$\langle f^*, \psi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \psi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \psi(x) \in \mathcal{D}\left(\overline{\mathrm{U}}\right).$$

Пусть теперь $\varphi(x) \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, а от функции $\psi(x)$ мы потребуем, чтобы она была равна 1 в окрестности компакта K. Поскольку K — это носитель обобщенной функции f^*, то имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\langle f^*, \varphi\rangle = \langle f^*, \psi\varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \left(\varphi(x)\psi(x)\right)\, dx = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \sum_{\beta_i \leqslant \alpha_i = n+2} c_{\alpha\beta} \partial^{\alpha-\beta}\psi(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx = \\
&= \sum_{\beta_i \leqslant n+2} (-1)^{|\beta|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_\beta(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

где

$$f_\beta(x) = (-1)^{|\alpha|-|\beta|} c_{\alpha\beta} f(x) \partial^{\beta-\alpha}\psi(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 7. Тем самым мы пришли к следующему глобальному результату: каждая обобщенная функция с компактным носителем представима в виде

$$f^*(x) = \sum_{\alpha_i \leqslant n+2} \partial^\alpha f_\alpha(x),$$

где $f_\alpha(x) \in \mathbb{C}_0\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Теперь мы докажем один важный результат, тоже относящийся к распределениям с компактным носителем и производной.

Теорема 7. *Пусть носитель обобщенной функции $f^* \in \mathcal{D}'$ состоит из одной точки* — $\operatorname{supp}\{f^*\} = \{0\}$, *тогда имеет место равенство*:

$$f^*(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \partial_x^\alpha \delta(x).$$

Доказательство.

Поскольку $f^* \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, то согласно лемме 1 найдется такое компактное множество $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$ и постоянная $\mathrm{M} > 0$, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M} \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{2.15}$$

для всех $\varphi(x) \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$. Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi_\varepsilon = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x),$$

где функция $\eta(x)$ равна 1 при $|x| \leqslant 1/2$ и нулю при $|x| \geqslant 1$. Поскольку носитель обобщенной функции f^* состоит из точки $\{0\}$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\langle f^*, \varphi\rangle = \langle f^*, \varphi_\varepsilon\rangle = \\
&\quad = \left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\varphi(x) - \mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\right]\right\rangle + \left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\right\rangle,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi) \equiv \sum_{|\beta| \leqslant 2m+1} \frac{\partial_x^\beta \varphi(x)}{\beta!}\Big|_{x=0} x^\beta.$$

Прежде всего заметим, что последнее слагаемое в неравенстве (2.16) не зависит от $\varepsilon > 0$. Действительно, поскольку в окрестности точки $x = 0$ функции $\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 = \eta(x)$, то имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}
&\left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\right\rangle = \\
&\qquad = \langle f^*, \eta(x)\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\rangle = \sum_{|\beta| \leqslant 2m+1} c_\beta \partial_x^\beta \varphi(0) = \\
&\qquad = \left\langle \sum_{|\beta| \leqslant 2m+1} c_\beta \partial_x^\beta \delta(x), \varphi \right\rangle, \quad c_\beta \equiv \frac{\langle f^*, \eta(x) x^\beta\rangle}{\beta!}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Теперь воспользуемся неравенством (2.15) для величины

$$\left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\varphi(x)-\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\right]\right\rangle.$$

Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств

$$\left|\left\langle f^*, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\varphi(x)-\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\right]\right\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in \mathrm{K}}\left|\partial^\alpha\left[\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\varphi(x)-\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\right]\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^m}\max_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{|x|\leqslant\varepsilon}\left|\partial^\alpha\left[\varphi(x)-\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)\right]\right| \leqslant c\varepsilon,$$

поскольку имеет место цепочка выражений:

$$\partial^\alpha\varphi(x)-\partial^\alpha\mathcal{P}_{2m+1}(\varphi)=\sum_{2m+2\leqslant|\beta|\leqslant n}\frac{\partial^\beta\varphi(0)}{\beta!}\frac{(\beta)!}{(\beta-\alpha-1)!}x^{\beta-\alpha}+\overline{\overline{o}}(|x|^{n+1})$$

при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$.

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (2.16) и (2.17) вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

В заключение мы рассмотрим еще одну операцию над обобщенными функциями из $\mathcal{D}'$ — операцию *свертки*. Сначала введем операцию свертки основных функций. Действительно, пусть $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ тогда рассмотрим следующее выражение:

$$\varphi * \psi \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{2.18}$$

Прежде всего отметим, что интеграл в правой части равенства (2.18) определен для всех $x \in \mathbb{R}^N$, поскольку обе функции из $\mathcal{D}$. Кроме того, можно ввести оператор сдвига с отражением $\mathcal{T}_z$:

$$\mathcal{T}_z u(x) \equiv u(z-x),$$

с помощью которого легко преобразовать выражение (2.18):

$$\varphi * \psi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{T}_y\varphi(x)\psi(y)\,dy.$$

Теперь попробуем определить свертку основной и обобщенной функций. Пусть сначала обобщенная функция $f^* \in \mathcal{D}'$ является регулярной с представителем $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Тогда ее свертку с произвольной основной функцией $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ можно представить в следующем виде:

$$f^* * \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi(x-y)f(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N}f(y)\mathcal{T}_y\varphi(x)\,dy.$$

Но это выражение нам подсказывает, как определить свертку произвольной обобщенной функции с основной функцией. Дадим следующее определение.

Определение 14. *Сверткой обобщенной функции* $f^* \in \mathcal{D}'$ *с основной функцией* $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ *называется следующая конструкция*:

$$f^* * \varphi \equiv \langle f^*(y), \mathcal{T}_y \varphi(x) \rangle .$$

Можно также ввести свертку двух обобщенных функций. По этому поводу смотри работу [6]. Мы же на этом закончим исследование пространства $\mathcal{D}'$.

Замечание 8. Отметим что все результаты этого параграфа остаются в силе, если рассмотреть вместо $\mathcal{D}'$ пространство $\mathcal{D}'(\Omega)$, где Ω — есть открытое подмножество $\mathbb{R}^N$.

§ 3. Литературные указания.

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [3], [6], [11], [12], [17], [18], [26], [28], [29], [30] и [32].