Лекция 2

АБСТРАКТНАЯ МЕРА ЛЕБЕГА

В данной лекции мы изложим схему А. Н. Колмогорова построения абстрактной меры Лебега.

§ 1. Введение

Построение абстрактной меры Лебега во многом повторяет построение меры Лебега плоских множеств. Поэтому по ходу доказательств тех или иных утверждений мы будем их сравнивать с соответствующими результатами из прошлой лекции.

§ 2. σ—алгебры

Идея построения любой меры и, в частности, меры Лебега заключается в том, чтобы сначала выбрать какой–нибудь достаточно широкий класс «элементарных» множеств, на котором меру как функцию, описывающую «размер» «элементарного» множества, можно задать достаточно простым образом, а затем продолжить некоторым способом эту меру на как можно более широкий класс множеств так, чтобы продолженная мера совпадала с исходной мерой на «элементарных» множествах. На этом пути нами будет построена мера Лебега.

Итак, прежде всего нам нужно ввести класс «элементарных» множеств. С этой целью введем понятия алгебры множеств и σ—алгебры множеств. Дадим определение.

Определение 1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется алгеброй множеств, если выполнены следующие свойства*:

(i) $\varnothing,\ X \in \mathcal{A}$;

(ii) *из принадлежности $A, B \in \mathcal{A}$ вытекает, что $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}$*;

В том случае, если выполнено дополнительное свойство

(iii) *для любой последовательности множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ вытекает, что*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

система множеств $\mathcal{A}$ называется σ—алгеброй.

Давайте приведем некоторые примеры σ—алгебр. Действительно, тривиальными примерами σ—алгебр является, например, семейство множеств $\mathcal{A}$, состоящее из $\varnothing$, X. Другим тривиальным примером является семейство $\mathcal{A}$, состоящее из всех подмножество множества X, который обозначается как 2^X. Можно несложно доказать, что для любого семейства подмножеств из множества X существует минимальная σ—алгебра, содержащая это семейство. Дадим определение.

Определение 2. *Пара $(\mathcal{A}, X)$, где $\mathcal{A}$ есть σ—алгебра $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется измеримым пространством.*

Теперь приступим к рассмотрению числовых функций, заданных на алгебрах и σ—алгебрах подмножеств некоторого множества. Дадим определения.

Определение 3. *Числовая функция μ называется аддитивной, если для всякого конечного объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ имеет место равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Определение 4. *Числовая функция μ называется счетно–аддитивной, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ такой, что*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Определение 5. *Счетно–аддитивная неотрицательная числовая функция μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется мерой.*

Итак, пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра подмножеств из X, на котором задана мера μ, т. е. счетно–аддитивная числовая функция. Это и есть то самое «элементарное» семейство множеств, на котором задана мера μ. Займемся теперь продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на некоторую σ—алгебру $\mathcal{A}_\mu$, содержащую $\mathcal{A}$.

§ 3. Мера Лебега

С этой целью введем так называемую внешнюю меру. Дадим определение.

Определение 6. *Внешняя мера $\mu^*(A)$ для каждого подмножества $A \subset X$ определяется следующим образом*:

$$\mu^*(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \Big| \; A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \; A_n \in \mathcal{A} \right\}. \tag{3.1}$$

Замечание. Из данного определения сразу следует, что для любых множеств $A \subset B \subset X$ верно неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. В самом деле, если $B \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то и $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. («Монотонность внешней меры».)

Теперь мы в состоянии дать определение измеримых по Лебегу относительно меры μ множеств $\mathcal{A}_\mu$. Пусть мера μ задана на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X. Дадим определение.

Определение 7. *Скажем, что множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу относительно меры μ, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Множество всех измеримых по Лебегу подмножеств множества X обозначается как $\mathcal{A}_\mu$.

Напомним, что

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Итак, мы предъявили способ продолжения меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на более широкое семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$, где продолжением меры μ является числовая функция μ^* — внешняя мера. Но для дальнейшего нам необходимо ответить на ряд вопросов. Во–первых, что представляет из себя множество $\mathcal{A}_\mu$? Во–вторых, является ли внешняя мера μ^* мерой на семействе множеств $\mathcal{A}_\mu$? На все эти вопросы отвечает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть μ — это конечная ($\mu(X) < +\infty$) и неотрицательная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) *$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, причем внешняя мера μ^* совпадает с мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$;*

(ii) *семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является σ–алгеброй, причем ограничение μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ является мерой*:

(iii) *мера μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ есть единственное неотрицательное продолжение меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на σ–алгебру $\mathcal{A}_\mu$.*

Доказательство.

(i) Ясно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, поскольку для каждого $A \in \mathcal{A}$ и всякого $\varepsilon > 0$ можно взять $A_\varepsilon = A$ и тогда

$$\mu(A \triangle A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon.$$

Докажем теперь, что внешняя мера μ^* совпадает с мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$. Действительно, по построению мера μ^* имеет место неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Пусть $A \in \mathcal{A}$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — такая последовательность, что

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

но тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap A_n.$$

Прежде всего, в силу неотрицательности и аддитивности меры μ имеет место неравенство

$$\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu(A_n).\ ^{1)}$$

Можно доказать, что из счетной аддитивности и положительности меры μ вытекает счетная субаддитивность [2)], т. е. имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

И, значит, имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Таким образом,

$$\mu(A) = \mu^*(A).$$

(ii). Сначала докажем, что семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является алгеброй. Действительно, сначала докажем, что дополнение измеримого множества измеримо. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

но тогда поскольку $X \setminus A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и имеет место равенство множеств

$$(X \setminus A_\varepsilon) \triangle (X \setminus A) = A_\varepsilon \triangle A,$$

[1)] Оно следует из тождества $\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus (A \cap A_n)) + \mu(A \cap A_n)$, где все входящие в него множества принадлежат $\mathcal{A}$.

[2)] Действительно, если $A = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то множество A можно представить в виде объединения непересекающихся множеств C_n, где $C_1 = B_1$, $C_n = B_n \setminus \cup_{l=2}^{n-1} B_l$ при $n \geqslant 2$, а $\mu(C_n) \leqslant \mu(B_n)$. Теперь можно воспользоваться определением счетной аддитивности.

то
$$\mu^*((X \setminus A_\varepsilon)\triangle(X \setminus A)) = \mu^*(A_\varepsilon \triangle A) \leqslant \varepsilon.$$
Значит, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.

Теперь докажем, что объединение двух измеримых множеств измеримо. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Значит, для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что
$$\mu^*(A\triangle A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\triangle B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$
С другой стороны, имеют место вложения
$$(A \cup B)\triangle(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A\triangle A_\varepsilon) \cup (B\triangle B_\varepsilon),$$
поэтому в силу монотонности внешней меры μ^* (см. замечание на с. 23) имеют место неравенства:
$$\mu^*((A \cup B)\triangle(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B\triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$
Значит, поскольку $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$. Докажем теперь, что $A \cap B \in \mathcal{A}_\mu$. Но это следствие следующего равенства множеств:
$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)).$$
Таким образом, $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра.

Для дальнейшего нам необходимо доказать счетную субаддитивность внешней меры μ^*, а именно, тот факт, что при условиях $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$ (в частности, при $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$) и $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) < +\infty$ верно неравенство $\mu^*(A) < \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon >$ > 0. Тогда по определению внешней меры для каждого из множеств $A_n \subset X$ найдется система множеств
$$\{B^\varepsilon_{nm}\} \subset \mathcal{A}$$
такая, что
$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} B^\varepsilon_{nm}$$
и
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^\varepsilon_{nm}\right) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
Тогда, поскольку $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} \cup_{m=1}^{+\infty} B^\varepsilon_{nm}$, в силу определения внешней меры $\mu^*(A)$ имеем
$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^\varepsilon_{nm}\right),$$

где в силу свойств сходящихся рядов с неотрицательными членами порядок суммирования не важен, т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n)+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем требуемое неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n),$$

т. е. мы доказали счетную субаддитивность внешней меры.

Теперь докажем следующее неравенство:

$$|\mu^*(A)-\mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A\triangle B) \tag{3.3}$$

для всех $A, B \in X$, для которых $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$. Действительно, справедливы следующие вложения:

$$A \subset B \cup (A\triangle B), \quad B \subset A \cup (A\triangle B),$$

поэтому в силу субаддитивности внешней меры [1]) имеет место неравенства

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A\triangle B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A\triangle B).$$

Стало быть, пришли к (3.3).

Приступим теперь к доказательству конечной аддитивности внешней меры на $\mathcal{A}_\mu$. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ и $A\cap B = \varnothing$. Нам нужно доказать следующую оценку снизу:

$$\mu^*(A\cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B). \tag{3.4}$$

Теперь заметим, что в силу (3.3) имеет место следующее неравенство:

$$\mu^*(A\cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \mu^*((A\cup B)\triangle(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)), \tag{3.5}$$

где A_ε и B_ε удовлетворяют условию (3.2). С другой стороны,

$$\mu^*((A\cup B)\triangle(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B\triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{3.6}$$

Таким образом, из (3.5) и (3.6) вытекает оценка снизу

$$\mu^*(A\cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{3.7}$$

Теперь заметим, что на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ и μ^* совпадают. Поэтому в силу конечной аддитивности меры μ на $\mathcal{A}$ имеет место следующее равенство:

$$\mu^*(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon\cap B_\varepsilon). \tag{3.8}$$

---

[1]) Эта субаддитивность, очевидно, является частным случаем только что доказанной счетной субаддитивности.

Заметим, что в силу $A \cap B = \varnothing$ имеет место вложение

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon).$$

И поэтому верна следующая оценка сверху:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqslant \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, из (3.8) приходим к оценке снизу

$$\mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \geqslant \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{3.9}$$

Но тогда из (3.7) приходим к такой оценке снизу:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon) + \mu^*(B_\varepsilon) - 2\varepsilon. \tag{3.10}$$

С другой стороны, в силу неравенства (3.3) имеют место неравенства

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \mu^*(A \triangle A_\varepsilon), \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(B \triangle B_\varepsilon).$$

Стало быть, отсюда приходим к неравенствам

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (3.10) приходим к следующему неравенству:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - 3\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего имеем

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{3.11}$$

для всех $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ при условии $A \cap B = \varnothing$.

Теперь наша задача доказать, что счетное объединение измеримых множеств измеримо. С этой целью нам достаточно рассмотреть случай попарно непересекающихся множеств. Действительно, пусть $A_n \in \mathcal{A}_\mu$, тогда вместо счетного объединения

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

можно взять

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,$$

где

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Ясно, что $\{B_n\} \subset \mathcal{A}_\mu$ и попарно не пересекаются, причем имеет место равенство

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

В силу конечной аддитивности функции μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ и ее монотонности по включению (см. замечание на с. 23) мы приходим к следующим неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{n}\mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \mu^*(X) \leqslant \mu(X) < +\infty$$

в силу конечности меры μ. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$ сходится. Следовательно, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $n \in \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mu^*(A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.12}$$

В силу измеримости конечных объединений измеримых множеств для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*\left(B\triangle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.13}$$

Следовательно, в силу вложения

$$B\triangle\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \left(B\triangle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\bigcup\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k,$$

конечной аддитивности внешней меры и ее счетной субаддитивности приходим к неравенству

$$\mu^*\left(B\triangle\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \mu^*\left(B\triangle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mu^*(A_k) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает измеримость счетного объединения измеримых множеств. Значит, $\mathcal{A}_\mu$ — это $\sigma-$алгебра.

Надо, однако доказать, что действительно

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n),$$

где

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

при оговоренных выше условиях. Но это действительно так, потому что, во-первых,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n)$$

в силу счетной субаддитивности внешней меры, а во-вторых, в силу ее «монотонности» и конечной аддитивности

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n),$$

т. е. можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^* A \leqslant \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Устремляя N к бесконечности, имеем равенство (3).

(iii). Теперь докажем, что μ^* является единственным продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на $\sigma-$алгебру $\mathcal{A}_\mu$. Пусть нет. Тогда существует другая мера ν. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$ и $\varepsilon > 0$ являются фиксированными. Тогда найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon.$$

В свою очередь это означает, что существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что

$$A \triangle B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n,$$

причем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$|\nu(A) - \nu(B)| \leqslant \nu(A \triangle B) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon,$$

поскольку на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ, μ^* и ν совпадают. Справедливы следующие неравенства:

$$|\mu^*(A) - \nu(A)| \leqslant |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\nu(A) - \nu(B)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Стало быть, меры μ^* и ν совпадают на $\sigma-$алгебре $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема доказана.

Построенная мера μ^* на $\sigma-$алгебре $\mathcal{A}_\mu$ и есть искомая мера Лебега. Теперь мы приступим к построению интеграла Лебега.

§ 4. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [4], [5], [13], [21] и [34].