Лекция 3

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

В этой и следующей лекциях мы изложим схему А. Н. Колмогорова построения интеграла Лебега.

§ 1. Введение

Хотя существуют подходы к введению интеграла Лебега без предварительного введения меры, а путем продолжения так называемого элементарного интеграла (схема Даниэля), нам показалось более естественным изложить традиционный подход. Теперь читатель знаком с построением меры, и мы можем приступить к конструкции интеграла Лебега.

§ 2. Измеримые функции

Введем сначала общее понятие измеримости. Пусть X, Y — произвольные множества, в которых выделены системы подмножеств S_X и S_Y соответственно. Функция $f(x)$, определенная на X и принимающая значения из Y, называется (S_X, S_Y)-измеримой, если из $A \in S_Y$ вытекает, что $f^{-1}(A) \in S_X$. Иными словами, прообразом каждого выделенного подмножества Y является выделенное подмножество X. Мы не оформляем это понятие в виде отдельного определения, потому что в столь общей форме оно понадобится в нашем построении ровно один раз. Пока заметим лишь, что если речь идет о функции вещественной переменной $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а за системы множеств S_X и S_Y взяты все открытые множества, то (S_X, S_Y)-измеримость означает не что иное, как непрерывность. В самом деле, функция непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз открытого множества открыт. (Переходя к дополнениям, сразу же получаем: функция непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого множества замкнут.)

Сделаем очевидное замечание. Если X, Y, Z — произвольные множества с выделенными системами подмножеств S_X, S_Y, S_Z соответственно, функция $y = f(x)$ определена на X и (S_X, S_Y)-измерима, а функция $z = g(y)$ определена на Y и (S_Y, S_Z)-измерима, то сложная функция

$$z = \varphi(x) \equiv g(f(x))$$

(S_X, S_Y)-измерима. В самом деле, g-прообраз $g^{-1}(A)$ любого множества $A \in S_Z$ принадлежит системе S_Y в силу (S_Y, S_Z)-измеримости функции g; но тогда его f-прообраз $f^{-1}(g^{-1}(A))$, который и является прообразом множества A при действии функции $z = \varphi(x)$, принадлежит системе S_X в силу (S_X, S_Y)-измеримости функции $f(x)$.

Однако в дальнейшем, говоря просто об измеримости функции $f(x)$, мы будем подразумевать нечто более конкретное. Дадим определение.

Определение 1. Пусть X — множество, в котором задана счетно-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре S_μ. Действительная числовая функция $f(x)$ на X называется μ-измеримой (или просто измеримой), если для всякого борелевского множества $suset\mathbb{R}$

$$f^{-1}(A) \in S_\mu.$$

Иначе говоря, прообраз борелевского множества должен быть измерим по мере μ.

Легко видеть, что сложная функция $z = \varphi(x)$, представляющая собой непрерывную функцию $z = g(y)$ от измеримой функции $y = f(x)$ измерима в силу сделанного выше замечания. В самом деле, любое борелевское множество A можно представить в виде не более чем счетного объединения множеств A_n, некоторые из которых открыты, а остальные — замкнуты. g-прообраз каждого открытого множества открыт, каждого замкнутого — замкнут, а следовательно, $\varphi^{-1}(A_n) \equiv \equiv f^{-1}(g^{-1}(A_n))$ измеримы. С другой стороны, прообраз объединения равен объединению прообразов. Поэтому, с учетом того факта, что S_μ является σ-алгеброй, φ^{-1} — измеримое множество.

Отсюда следует, что квадрат измеримой функции измерим, что нам вскоре потребуется при ариффметических действиях над измеримыми функциями. Однако прежде имеет смысл ввести необходимое и достаточное условие измеримости, которое в силу его простоты по сравнению с определением 1 удобно взять за новое, эквивалентное определение измеримости.

Теорема 7. *Для того чтобы действительная функция $f(x)$ была измерима, необходимо и достаточно, чтобы при любом действительном с множество*

$$\{x \mid f(x) < c\}$$

было измеримо.

Доказательство.

Необходимость условия очевидна, потому что полупрямая $(-\infty; c)$ является борелевским множеством (более конкретно, открытым). Докажем достаточность. Борелевские множества образуют минимальную σ-алгебру множеств на прямой, содержащую все полупрямые вида $(- -\infty; c)$, т. е. они могут быть получены из указанный получпрямых операциями разности и не более чем счетных пересечения и объединения. Переходя к прообразом, в силу замкнутости σ-алгебры S_μ относительно этих операций получаем требуемое утверждение.

Теорема доказана.

§ 3. Арифметические действия над измеримыми функциями

Теорема 8. *Сумма, разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций измеримо при условии, что знаменатель не обращается в нуль.*

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Если f измерима, то функции $f + a$ и kf при любых постоянных a и k измеримы. Здесь требует пояснения лишь случай $k < 0$, при котором условие $kf(x) < c$ соответствует условию $f(x) > \frac{c}{k}$. Но нетрудно заметить, что множество $\{x \mid f(x) > \frac{c}{k}\}$ измеримо как дополнение множества $\{x \mid f(x) \leqslant \frac{c}{k}\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\{x \mid f(x) < \frac{c}{k} + \frac{1}{n}\}$.

Шаг 2. Если f и g — измеримые функции, то множество

$$\{x \mid f(x) > g(x)\}$$

измеримо. Действительно,

$$\{x \mid f(x) > g(x)\} = \cup_{k=1}^{+\infty} \left(\{x \mid f(x) > r_k\} \cap \{x \mid g(x) < r_k\}\right),$$

где r_k суть рациональные числа, занумерованные в произвольном порядке.

Шаг 3. Легко видеть, что в силу доказанного на первом шаге из измеримости функции $g(x)$ следует измеримость функций $-g(x)$ и $-g(x) + a$ при произвольном постоянном a. Но тогда, если $f(x)$ — измеримая функция, из доказанного на втором шаге получаем измеримость множества

$$\{x \mid f(x) < -g(x) + a\} \equiv \{x \mid f(x) + g(x) < a\}.$$

Таким образом, доказана измеримость суммы измеримых функций, а вместе с нею и разности, ибо $f - g = f + (-1)g$.

Шаг 4. Произведение измеримых функций измеримо. Для доказательства этого факта воспользуемся тождеством

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2],$$

сделанным ранее замечанием об измеримости квадрата измеримой функции и результатами, полученными на шагах 1–3.

Шаг 5. Чтобы доказать измеримость частного двух измеримых функций f и g, где знаменатель g не обращается в нуль, в силу только что доказанного на четвертом шаге достаточно обосновать измеримость функции $1/f(x)$. Заметим, что при $c > 0$

$$\{x \mid 1/f(x) < c\} = \{x \mid f(x) > 1/c\} \cup \{x \mid f(x) < 0\},$$

при $c < 0$
$$\{x \mid 1/f(x) < c\} = \{x \mid 0 > f(x) > 1/c\},$$
а при $c = 0$
$$\{x \mid 1/f(x) < c\} = \{x \mid f(x) < c\}.$$
Измеримость множеств в правых частях всех трех равенств следует из измеримости функции f.

Теорема доказана.

§ 4. Свойства измеримых функций, связанные с операцией предельного перехода

Установим теперь важные свойства измеримости относительно предельного перехода.

Теорема 9. *Предел поточечно (при всех $x \in X$) сходящейся последовательности измеримых функций измерим.*

Доказательство.

В самом деле, пусть $f_n(x) \to f(x)$. Тогда
$$\{x \mid f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \{x \mid f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}. \qquad (4.1)$$
(Это равенство читатель может проверить самостоятельно.) Далее, в силу измеримости функций, образующих последовательность, множества $\{x \mid f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$ измеримы. Остается лишь учесть, что мера определена на σ-алгебре множеств, а поэтому и левая часть равенства (1.5) представляет измеримое множество.

В дальнейшем мы будем использовать полноту меры Лебега. Это свойство заключается в том, что любое подмножество множества лебеговой меры нуль также измеримо и имеет меру нуль.

Теорема доказана.

§ 5. Эквивалентность и термин «почти всюду»

Определение 2. Будем говорить, что произвольные функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на измеримом множестве $A \subset X$, эквивалентны, если их значения различаются на множестве меры нуль.

Вообще, если некоторое утверждение, зависящее от точки $x \in X$, верно для всех $x \in X$, исключая множество меры нуль, то говорят, что оно выполняется почти всюду. Так, предыдущее определение можно переформулировать слудующим образом: две измеримые функции называются эквивалентными, если их значения совпадают почти всюду. Читателю рекомендуется доказать, что введенное отношение на множестве функций действительно является отношением эквивалентности.

Теорема 10. *Если функции f и g, заданные на измеримом множестве A, эквивалентны, то измеримость одной из них влечет измеримость другой.*

Доказательство.

Действительно, множество $\{x \mid f(x) < a\}$ получается из $\{x \mid g(x) < < a\}$ добавлением и вычитанием некоторых подмножеств того множества, на которых значения этих функций не совпадают. Поскольку это последнее имеет меру нуль, то в силу полноты измеримы и все его подмножества. Остается лишь учесть, что сумма и разность измеримых множеств также измеримы.

Теорема доказана.

Отметим широко известный пример: функция Дирихле, упомянутая в первой лекции, эквивалентна функции, тождественно равной нулю.

Хотя выше мы уже ввели общее понятие «почти всюду», ввиду особой важности сформулируем отдельно определение сходимости почти всюду.

Определение 3. Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f почти всюду на X, если равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

выполнено почти всюду (или, что то же самое, при почти всех $x \in X$).

Теорема 11. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится к функции f почти всюду на измеримом множестве A, то функция f также измерима на A.*

Доказательство.

Пусть $A' \subset A$ — множество, на котором сходимость не имеет места. Тогда по условию A' измеримо и $\mu(A') = 0$. Но тогда и множество сходимости $A \setminus A'$ измеримо. Тогда по теореме 9 функция f измерима на A'. Далее, нетрудно заметить, что при каждом $c \in \mathbb{R}$

$$\{x \in A \mid f(x) < c\} = \{x \in A \setminus A' \mid f(x) < c\} \cup \{x \in A' \mid f(x) < c\}$$

, где первое множество в сумме в правой части равенства измеримо в силу измеримости функции f на A', а второе измеримо как подмножество множества меры 0 в силу полноты меры.

Теорема доказана.

Докажем еще одну теорему о сходящихся почти всюду последовательностях измеримых функций. Она будет использована при доказательстве свойств интеграла Лебега относительно предельного перехода. Кроме того, на наш взгляд, она интересна сама по себе как довольно неожиданный и сильный результат.

Теорема 12. *(Д. Ф. Егоров.) Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к функции f почти всюду на измеримом множестве E, то для любого наперед заданного $\delta > 0$ существует такое измеримое множество E_δ, что*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) на множестве E_δ последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно.

Доказательство.

Согласно теореме 11 функция $f(x)$ измерима. Положим

$$E_n^m = \bigcap_{i \geqslant n} \{x \mid |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}.$$

Далее, пусть

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

Из определения множества E^m ясно, что при фиксированном m имеют место включения

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots \subset E_n^m \subset \ldots$$

В силу непрерывности σ-аддитивной меры для любого m и для любого $\delta > 0$ найдется такое $n_0(m)$, что

$$\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \delta/2^m.$$

Положим

$$E_\delta = \bigcap E_{n_0(m)}^m$$

и покажем, что построенное таким образом множество E_δ обладает перечисленными в формулировке теоремы свойствами.

Установим сначала, что на E_δ последовательность $\{f_i(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Это сразу вытекает из того, что если $x \in$ $\in E_\delta$, то для любого m

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{при} \quad i > n_0(m).$$

Теперь оценим меру множества $E \setminus E_\delta$. Для этого заметим, что при всяком m $\mu(E \setminus E^m) = 0$. Действительно, если $x_0 \in E \setminus E^m$, то существуют сколь угодно большие значения i, при которых

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geqslant \frac{1}{m},$$

т. е. последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится к $f(x)$ в точке x_0. Так как по условию $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду, то

$$\mu(E \setminus E^m) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m) = \mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \delta/2^m.$$

Поэтому

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E^m_{n_0(m)})\right) \leqslant \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta \tag{5.1}$$

Теорема доказана.

§ 6. Интеграл Лебега

Основное отличие построения интеграла Лебега от интеграла Римана состоит в том, что точки x группируются не по принципу их близости в пространстве X (которое, в принципе, может и не быть метрическим), а по принципу близости значений функции. Поэтому пространство X, в принципе, может и не быть метрическим: достаточно лишь, чтобы на некоторой σ-алгебре его подмножеств была введена полная счетно-аддитивная мера μ.

По-прежнему будем считать, что выполнены указанные в предыдущем абзаце требования относительно меры μ. Кроме того, в пп. 1–5 будем считать, что само пространство имеет конечную меру и, тем самым, является единицей указанной σ-алгебры, все множества которой имеют конечную меру.

Как будет ясно из дальнейшего, вопрос об интегрируемости по Лебегу имеет смысл лишь для измеримых функций. Подобно тому, как измеримые функции образуют подмножества множества всех числовых функций на пространстве X, интегрируемые функции образуют подмножество измеримых.

1. Простые функции.

Определение 3. Функция $f(x)$, определенная на измеримом подмножестве A пространства X с мерой, называется простой, если она принимает не более чем счетное число значений.

Теорема 13. *Простая функция $f(x)$, принимающая значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ (где $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$), измерима тогда и только тогда, когда все множества*

$$A_n = \{x \mid f(x) = y_n\}$$

измеримы.

Замечание. Условие $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$ существенно, ибо можно взять функцию, равную константе, и разбить ее область определения на два неизмеримых подмножества.

Доказательство. Необходимость очевидна: A_n есть прообраз одноточечного множества, а оно является борелевским. (Как следует из замечания, важно, что A_n — не подмножество этого прообраз, а прообраз целиком.)

Для доказательства достаточности нужно заметить, что, каково бы ни было борелевское множество B, его прообраз есть объединение не более чем счетного количества измеримых множеств:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y_n \in B} A_n.$$

Теорема доказана.

Отметим важную для дальнейшего связь между измеримыми функциями и простыми функциями.

Теорема 14. *Для измеримости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде равномерного предела простых измеримых функций.*

Доказательство. Достаточность условия ясна из теоремы 14, в силу которой предел последовательности простых измеримых функций является измеримой функции, даже если имеет место только поточечная (возможно, лишь почти всюду), а не равномерная сходимость. Однако нам понадобится тот факт, что любую измеримую функцию можно представить в виде равномерного предела простых измеримых функций. Для доказательства этого утверждения рассмотрим произвольную измеримую функцию $f(x)$ и положим в каждой точке x

$$f_n(x) = \frac{m}{n}, \quad \text{если} \quad \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n},$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку множество рациональных чисел счетно, $f_n(x)$ суть действительно простые функции. Очевидно, что $f_n(x) \to$ $\to f(x)$ равномерно. Измеримость каждой из функций $f_n(x)$ можно установить, например, с помощью предыдущей теоремы, поскольку в силу измеримости функции $f(x)$ множества

$$f_n^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) = \left\{x \in A, \frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}\right\}$$

измеримы при всех n, m.

Теорема доказана.

2. Интеграл Лебега для простых функций. Пусть $f(x)$ — простая измеримая функция, определенная на измеримом множестве $A \subset$ $\subset X$ и принимающая значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, где $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Пусть

$$A_n = \{x \mid f(x) = y_n\}.$$

Определение 4. Если ряд в правой части формулы

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n)$$

абсолютно сходится, то будем говорить, что простая измеримая функция $f(x)$ суммируема (или, что то же самое, интегрируема по Лебегу) на множестве A. При этом его сумму назовем интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству A.

Замечание. Требование абсолютной сходимости ряда $\sum_n y_n\mu(A_n)$ возникает на этом этапе уже из тех соображений, что у нас нет никакого естественного способа упорядочить значения y_n. Тот факт, что числа y_n, а вместе с ними и множества A_n, пронумерованы, означает лишь, что они образуют счетное множество. Способ же их нумерации может быть совершенно произвольный. Даже, например, попытка пронумеровать y_n в порядке возрастания (или убывания) или A_n в порядке возрастания (или убывания) их мер заранее обращена на провал. Чтобы понять почему, пусть читатель рассмотрит множество значений последовательности $\frac{(-1)^n}{n}$. Как мы увидим в дальнейшем, условие абсолютной сходимости ряда будет существенно использоваться и в дальнейшем.

Докажем теперь, что условие $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$ может быть исключено из только что данного определения. Оно нам понадобилось для того, чтобы не столкнуться сразу с неизмеримыми подмножествами множеств A_n и с неоднозначностью в выборе ряда.

Лемма 2. *Пусть* $A = \bigcup_k B_k$, *где все* B_k *измеримы,* $B_i \cap B_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *и пусть* $f|_{B_k} = c_k = \mathrm{const}$. (*Таким образом,* $f(x)$ *— простая измеримая функция.*) *Тогда*

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_k c_k\mu(B_k),$$

причем $f(x)$ *интегрируема по Лебегу на множестве* A *тогда и только тогда, когда ряд в правой части сходится.*

Доказательство. Очевидно,

$$A_n \equiv \{x \in A \mid f(x) = y_n\} = \bigcup_{c_k = y_n} B_k.$$

Поэтому

$$\sum_n y_n\mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k\mu(B_k).$$

В силу неотрицательности меры имеем

$$\sum_n |y_n|\mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k|\mu(B_k),$$

т. е. ряды $\sum_n y_n\mu(A_n)$ и $\sum_k c_k\mu(B_k)$ абсолютно сходятся одновременно.

Лемма доказана.

Итак, на данный момент мы ввели понятие интегрируемости по Лебегу и интеграла Лебега применительно к простым измеримым функциям. На этом этапе полезно сформулировать и доказать некоторые свойства этого интеграла. (При их формулировке будем считать, что вводимые в рассмотрение функции являются простыми и измеримыми на множестве A.)

А.
$$\int_A (f(x)+g(x))\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu,$$
причем из существования интегралов в правой части формулы следует существование интеграла в левой части.

Для доказательства обозначим: f_i, $F_i \subset A$ — соответственно значения функции $f(x)$ и их прообразы; аналогичный смысл имеют f_j, $F_j \subset A$ для функции $g(x)$. Тогда
$$J_1 \equiv \int_A f(x)\,d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \tag{6.1}$$
$$J_2 \equiv \int_A g(x)\,d\mu = \sum_j g_i \mu(G_j). \tag{6.2}$$
С другой стороны, в силу только что доказанной леммы
$$J \equiv \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu = \sum_i \sum_j (f_i+g_j)\mu(F_i \cap G_j); \tag{6.3}$$
но $\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j)$, $\mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j)$, поэтому из абсолютной сходимости рядов (6.1) и (6.2) следует абсолютная сходимость ряда (6.3) и равенство $J = J_1 + J_2$.

Б. Для любой константы k
$$\int_A kf(x)\,d\mu = k\int_A f(x)\,d\mu,$$
причем из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой. Это свойство, как и следующее, проверяется непосредственно.

В. Ограниченная на множестве A функция f интегрируема на A, причем из оценки $|f(x)| \geqslant M$ на A следует оценка интеграла
$$\left|\int_a f(x)\,d\mu\right| \leqslant \mu(A).$$
(Еще раз обратим внимание читателя, что мы до п. 5 включительно рассматриваем пространства конечной меры.)

3. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры. Определение 4. Назовем функцию f интегрируемой на множестве $A \subset X$, если существует последовательность $\{f_n\}$ простых интегрируемых на A функций, равномерно сходящаяся к f на A. В этом случае будем называть интегралом Лебега от функции f по множеству A предел

$$I = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_A f_n(x)\,d\mu, \tag{6.4}$$

который мы будем обозначать $\int_A f(x)\,d\mu$.

Замечание. Из этого определения и теоремы 14 сразу следует, что интегрируемыми могут быть лишь измеримые функции.

Необходимо установить корректность определения, т. е. доказать следующие факты:

1) предел (6.4) существует для любой равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций;

2) предел (6.4) не зависит от выбора конкретной последовательности простых измеримых функций, сходящейся к данной измеримой функции;

3) в том случае, когда функция $f(x)$ является простой и интегрируемой по определению 3, то она интегрируема и по общему определению 4, причем значения интегралов по обоим определениям совпадают.

Для доказательства 1) заметим, что в силу свойств А, Б, В интеграла Лебега от простых функций имеет место оценка

$$\left|\int\limits_A f_n(x)\,d\mu - \int\limits_A f_m(x)\,d\mu\right| = \left|\int\limits_A (f_n(x) - f_m(x))\,d\mu\right| \leqslant \mu(A) \sup_{x\ inA} |f_n(x) - f_m(x)|.$$

Поэтому из равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ следует, что числовая последовательность

$$\left\{\int\limits_A f_n(x)\,d\mu\right\}$$

фундаментальна, а следовательно, и сходится.

Свойство 2) легко доказать от противного: в случае, если для двух разных последовательностей $\{f_n(x)\}$ и $\{\widetilde{f}_n(x)\}$, равномерно сходящихся к измеримой функции $f(x)$, имело бы место неравенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_A f_n(x)\,d\mu \neq \lim_{n\to+\infty} \int\limits_A \widetilde{f}_n(x)\,d\mu,$$

то последовательность

$$f_1, \widetilde{f}_1, f_2, \widetilde{f}_2, \ldots,$$

очевидно, также равномерно сходящаяся к f, не имела бы предела, что противоречит свойству 1).

Наконец, для доказательства 3) достаточно взять стационарную последовательность $f_n = f$.

Итак, мы сформулировали общее определение интеграла Лебега для функций, заданных на пространстве конечной меры. Докажем его свойства.

1. $\int_A 1\,d\mu = \mu(A)$, что очевидно в силу совпадения общего определения с определением 3 в случае, когда подынтегральная функция является простой.

2. Для любой константы k верно

$$\int\limits_A kf(x)\,d\mu = k\int\limits_A f(x)\,d\mu,$$

причем из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой части. Это свойство получается предельным переходом из свойства Б интеграла Лебега от простых функций.

3. Аддитивность относительно функций:

$$\int\limits_A (f(x)+g(x))\,d\mu = \int\limits_A f(x)\,d\mu + \int\limits_A g(x)\,d\mu,$$

причем из существования интергалов в правой части следует существование интеграла в левой части. Получается предельным переходом из свойства А интеграла Лебега от простых функций.

4. Ограниченная на A функция интегрируема на A. (Отметим особо, что речь идет о довольно сильном утверждении: всякая измеримая ограниченная функция — а их класс достаточно широк — интегрируема по множеству конечной меры.) Для простых функций это утверждение уже фигурировало как свойство В. В общем же случае легко видеть, что последовательность простых функций f_n, равномерно сходящаяся к функции f, будет равномерно ограниченной. А отсюда в силу оценки из свойства В следует, что последовательность интегралов $I_n = \int_A f_n(x)\,d\mu$ будет ограниченной числовой последовательностью. Нет необходимости доказывать, что $\{I_n\}$ сходится. Достаточно заметить, что она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{I_{n_k}\}$ и мы можем в качестве последовательности, фигурирующей в определении 4, взять последовательность $\{f_{n_k}\}$.

5. Монотонность. Если $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu \geqslant 0,$$

если этот интеграл существует. Для доказательства этого факта достаточно в теореме 14 заменить приближения снизу приближениями сверху и таким образом выбрать равномерно сходящуюся к $f(x)$ последовательность неотрицательных простых функций.

Отсюда сразу следует, что при $f(x) \geqslant g(x)$ интегралы связаны неравенством $\int_A f(x)\,d\mu \geqslant \int_A g(x)\,d\mu$, а поэтому, если почти всюду на

A выполнены неравенства

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

то для интеграла верна оценка

$$m\mu(A) \leqslant \int_A f(x)\,d\mu \leqslant M\mu(A).$$

6. Непосредственно из определений 3 и 4 следует, что если $\mu(A)=0$, то любая функция $f(x)$ интегрируема по множеству A и $\int_A f(x)\,d\mu = 0$. (Отметим, что в этом случае в силу полноты меры μ любая функция измерима на A, рассматриваемом в данном случае как пространство с индуцированной мерой.)

Заметим здесь же, что интегралы от эквивалентных функций имеют одно и то же значение.

7. Если функция $\varphi(x)$ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, то и $f(x)$ интегрируема на A, причем имеет место неравенство

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

В самом деле, если функции φ и f — простые, то, удалив из множества A множество меры 0, получим множество A', на котором неравенство $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ выполнено всюду. Представим A' в виде объединения конечного или счетного числа множеств A'_n, на которых $f(x)$ и $\varphi(x)$ постоянны: $f_{A'_n} = a_n$, $\varphi_{A'_n} = b_n$, причем $|a_n| \leqslant b_n$. Из интегрирумости φ по множеству A' следует, что

$$\sum_n |a_n|\mu(A'_n) \leqslant \sum_n b_n\mu(A'_n) = \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu = \int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

Поэтому f интегрируема по A и верна оценка

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x)\,d\mu\right| = \left|\sum_n a_n\mu(A'_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n |a_n|\mu(A'_n) = \int_{A'} |f(x)|\,d\mu = \int_A |f(x)|\,d\mu \leqslant \int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

В общем случае необходимо совершить предельный переход с использованием теоремы 14.

8. Интегралы

$$I_1 = \int_A f(x)\,d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|\,d\mu$$

существуют или не существуют одновременно. Существование интеграла I_1, а также оценка $|I_1| \leqslant I_2$ следуют из существования интеграла I_2 в силу только что доказанного свойства 7. Для простых функций существование интегралов равносильно в силу определения интегрируемости простой функции по Лебегу. В общем же случае снова требуется совершить предельный переход с использованием теоремы 14 и неравенства $|a| - |b| \leqslant |a - b|$.

§ 7. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [4], [5], [13], [21] и [34].