Лекция 4

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА, ПРОДОЛЖЕНИЕ

В данной лекции мы завершимим изложение схемы А. Н. Колмогорова построения интеграла Лебега. При этом нумерация пунктов, начатая в предыдущей лекции, будет продолжена.

§ 1. Дальнейшие свойства интеграла Лебега

4. **σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега.** Установим теперь некоторые свойства интеграла Лебега как функции множества.

Теорема 15. *Если $A = \bigcup_n A_n$ — конечное или счетное объединение непересекающихся измеримых множеств и функция $f(x)$ интегрируема по множеству A, то верно равенство*

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu,$$

причем из существования интеграла в левой части следует существование всех интегралов в правой части и сходимость ряда.

Доказательство. 1) Для простой функции f со значениями $y_1, y_2, \ldots, y_k \ldots$ положим

$$B_k = \{x \in A \mid f(x) = y_k\},$$
$$B_{nk} = \{x \in A_n \mid f(x) = y_k\}.$$

Тогда

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k \sum_n \mu(B_{nk}) = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu.$$

Поскольку ряд справа сходится в силу интегрируемости f, а меры неотрицательны, то сходятся все ряды в цепочке равенств (4).

2) Для произвольной функции f в силу ее интегрируемости на A следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется простая фунцкция g, интегрируемая по A, что

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Для нее по только что доказанному имеем:

$$\int\limits_A g(x)\,d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} g(x)\,d\mu, \tag{1.1}$$

причем g интегрируема по каждому из множеств A_n и ряд в правой части абсолютно сходится. Но тогда в силу свойств 3 и 4 интеграла Лебега функция f также интегрируема на A_n и верны оценки

$$\sum_n \left| \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu - \int\limits_{A_n} g(x)\,d\mu \right| \leqslant \sum_n \varepsilon\mu(A_n) = epsilon\mu(A),$$

$$\left| \int\limits_A f(x)\,d\mu - \int\limits_A g(x)\,d\mu \right| \leqslant= epsilon\mu(A),$$

откуда в силу (1.1) следует абсолютная сходимость ряда $\sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu$ и оценка

$$\left| \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu - \int\limits_A f(x)\,d\mu \right| \leqslant 2\varepsilon\mu(A).$$

В силу произвольности ε делаем вывод, что

$$\sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu = \int\limits_A f(x)\,d\mu.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если функция f интегрируема на множестве A, то она интегрируема и на любом измеримом подмножестве $A' \subset A$.

Теорема 16. *Если $A = \bigcup_n A_n$ — конечное или счетное объединение непересекающихся измеримых множеств, функция $f(x)$ интегрируема по каждому из множеств A_n и ряд*

$$\sum_n \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu \tag{1.2}$$

сходится, то f интегрируема на A и верно равенство

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu.$$

Доказательство.

С учетом предыдущей теоремы надо проверить лишь тот факт, что сходимость ряда (1.2) влечет интегрируемость f на множестве A.

1) В случае простой функции, принимающей значения $\{f_i\}$, положим

$$B_i = \{x \in A \mid f(x) = f_i\}, \quad A_{ni} = A_n \bigcap B_i.$$

Тогда имеем

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i, \quad \int\limits_{A_n} |f(x)|\, d\mu = \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}).$$

Из сходимости ряда (1.2) следует сходимость рядов

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \mu(B_i)$$

при каждом n. Но сходимость повторного ряда в левой части последнего равенства и означает, что существует интеграл

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i).$$

2) В общем случае приблизим f простой функцией $\widetilde{f}$ равномерно с точностью ε:

$$|f(x) - \widetilde{f}(x)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Тогда

$$\int\limits_{A_n} |\widetilde{f}(x)|\, d\mu \leqslant \int\limits_{A_n} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon \mu(A_n);$$

поэтому из сходимости ряда (1.2) и равенства $\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$ следует сходимость ряда

$$\sum_n \int\limits_{A_n} |\widetilde{f}(x)|\, d\mu,$$

т. е., по только что доказанному, интегрируемость простой функции $\widetilde{f}$ на A. Но тогда в силу (1.3) и свойств 3 и 4 интеграла Лебега получаем интегрируемость функции f.

Теорема доказана.

Итак, мы доказали два свойства, которые вместе можно назвать счетной аддитивностью интеграла Лебега как функции множества. Теперь перейдем к доказательству его абсолютной непрерывности. Для этого нам понадобится *неравенство Чебышева*, важное и само по себе.

Итак, пусть $\varphi(x) \geqslant 0$ — суммируемая на A функция, $c > 0$ — произвольное положительное число. Тогда

$$\mu\{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Для доказательства обозначим $A' = \{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\}$. Прежде всего следует заметить, что множество A' измеримо в силу измеримости функции f, которая, напоминаем, является необходимым условием интегрируемости. Теперь в силу только что установленных свойств аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int\limits_A \varphi(x)\,d\mu = \int\limits_{A'} \varphi(x)\,d\mu + \int\limits_{A\setminus A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_{A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant c\mu(A').$$

Осталось лишь разделить полученное неравенство на положительное число c.

Следствие. Если $\int_A |f(x)|\,d\mu = 0$, то $f(x)$ эквивалентна на A функции, тождественно равной нулю (иными словами, $f(x) = 0$ почти всюду на A). В самом деле, из неравенства Чебышева, примененного к неотрицательной функции $|f(x)|$, следует, что в рассматриваемом случае

$$\mu\{x \in A \mid |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\} \leqslant n \int\limits_A |f(x)|\,d\mu = 0$$

при любом $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\mu\{x \in A \mid f(x) \neq 0\} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\{x \in A \mid |f(x)| = 0.$$

Теорема 17. *(Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.) Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве A, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $e \subset \subset A$ с $\mu(e) < \delta$ имеет место оценка*

$$\left|\int\limits_e f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Легко видеть, что для ограниченной функции утверждение теоремы тривиально: оно сразу следует из свойства 5 интеграла Лебега. В общем же случае положим

$$A_n = \{x \in A \mid n \leqslant |f(x)| < n+1\}, \quad B_N = \bigcup_{n=0}^{N}, \quad C_N = A \setminus B_N.$$

В силу теоремы 15 имеем

$$\int\limits_A |f(x)|\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu$$

и, в частности, ряд в правой части сходится. Тогда можно выбрать такое число N, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\, d\mu = \int\limits_{C_N} |f(x)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4}$$

Выберем еще

$$\delta \in \left(0; \frac{\varepsilon}{2(N+1)}\right).$$

Тогда при $\mu(e) < \delta$, $e \subset A$ имеем

$$\left|\int\limits_e f(x)\, d\mu\right| \leqslant \int\limits_e |f(x)|\, d\mu = \int\limits_{e\cap B_N} |f(x)|\, d\mu + \int\limits_{e\cap C_N} |f(x)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

где первое слагаемое мы оценили в силу $\mu(e \cap B_N) \leqslant \mu(e) < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$, $|f(x)|_{B_N} < N+1$, а второе — в силу условия (1.4).

Теорема доказана.

Замечание. Из утверждений, доказанных в этом пункте, следует: интеграл от неотрицательной функции задает некоторую новую меру ν, причем она будет абсолютно непрерывной относительно меры Лебега, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $A \subset X$, $\mu(A) < \delta$ будет выполнено неравенство $\nu(A) < \varepsilon$.

5. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. В этом пункте мы докажем три важнейших утверждения, известные под названиями теорем Лебега и Беппо Леви и леммы Фату, позволяющие при тех или иных предположениях о свойствах сходящейся функциональной послдедовательности исследовать вопрос об интегрируемости и значении интеграла предельной функции.

Теорема 18. *Пусть:*

1) последовательность измеримых функций f_n сходится всюду на множестве A к функции f;

2) для всех n всюду на множестве A имеет место неравенство $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, где

3) функция $\varphi(x)$ интегрируема по множеству A.

Тогда

1) функции f и f_n при всех n интегрируемы на A и

2) имеет место предельное равенство

$$\int\limits_A f_n(x)\, d\mu \to \int\limits_A f(x)\, d\mu. \tag{1.5}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что функции f_n интегрируемы в силу второго условия теоремы и свойства 7 интеграла Лебега. По теореме о предельном переходе в неравенствах то же верно для функции f.

Теперь приступим к доказательству предельного соотношения (1.5). Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta > 0$, что для любого множества $B \subset A$ с $\mu(B) < \delta$ выполняется $\int_B \varphi(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$. но в силу теоремы Егорова это множество B можно выбрать таким образом, чтобы на $C \equiv A \setminus B$ сходимость $f_n \to f$ была равномерной. Тогда мы можем выбрать такое $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ и при любом $x \in C$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}.$$

Но при этом сразу получаем, что при всех $n > N$

$$\left| \int\limits_A f(x)\,d\mu - \int\limits_A f_n(x)\,d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_C (f(x) - f_n(x))\,d\mu \right| + \left| \int\limits_B f(x)\,d\mu \right| + \left| \int\limits_B f_n(x)\,d\mu \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.6}$$

Теорема доказана.

Из данной теоремы при рассмотрении пространства конечной меры сразу следует, что функция, являющяяся пределом поточечно сходящейся последовательности ограниченных функций, интегрируема и верно предельное соотношение (1.5).

Замечание. Оставляем читателю показать, что в условии теоремы сходимость и оценки сверху функций f_n функцией φ можно заменить на аналогичные условия почти всюду.

Теорема 19. *(Беппо Леви.) Пусть всюду на A выполнены неравенства*

$$f_1(x) \leqslant f_2(2) \leqslant \ldots \leqslant,$$

причем функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, интегрируемы на A и

$$\int\limits_a f_n(x)\,d\mu \leqslant K.$$

Тогда

1) почти всюду на A существует конечный предел

$$f(x) \equiv \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

(в точках, где этот предел бесконечен, можно доопределить функцию $f(x)$ нулем),

2) функция f интегрируема на A и

$$\int\limits_A f_n(x)\,d\mu \to \int\limits_A f(x)\,d\mu.$$

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $f_1(x) \geqslant 0$, потому что общий случай можно свести к нему введением функций $\widetilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим множество $\Omega = \{x \in A \mid f_n \to +\infty\}$. Заметим, что

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}, \quad \text{где} \quad \Omega_n^{(r)} = \{x \in A \mid f_n(x) > r\}.$$

Из неравенства Чебышева следует, что при всех n, r

$$\mu(\Omega_n^r) \leqslant \frac{K}{r},$$

откуда с учетом $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots$ имеем

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}.$$

Но при любом r верно включение $\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, поэтому $\mu(\Omega) \leqslant \frac{K}{r}$, откуда следует, что $\mu(\Omega) = 0$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства предельного соотношения введем прежде всего обозначение

$$A_m \equiv \{x \in A \mid m-1 \leqslant f(x) < m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и положим $\varphi(x) = m$ на A_m. Докажем, что $\varphi(x)$ интегрируема на A. После этого останется лишь воспользоваться предыдущей теоремой.

Положим $B_l = \sum_{m=1}^{l} A_m$. Поскольку на множествах B_l функции f_n и f ограничены и $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$, то в силу предыдущей теоремы

$$\int\limits_{B_l} \varphi(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_{B_l} \varphi(x)\,d\mu + \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{B_l} f_n(x)\,d\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

Но при всех l верно

$$\int\limits_{B_l} \varphi(x)\,d\mu = \sum_{m=1}^{s} m\mu(A_m).$$

Равномерная ограниченность этих сумм означает (абсолютную) сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{s} m\mu(A_m) = \int\limits_A \varphi(x)\,d\mu,$$

т. е. интегрируемость простой функции $\varphi(x)$.

Теорема доказана.

Следствие. Если $\psi_n(x) \geqslant 0$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu < +\infty$, то почти всюду на A ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x)$ сходится и

$$\int\limits_A \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_A \psi_n(x)\, d\mu.$$

Следующее утверждение, которое мы для единообразия включаем в число теорем, известно под названием леммы Фату.

Теорема 20. *Если последовательность интегрируемых на множестве A неотрицательных функций f_n сходится почти всюду на A к функции f и при любом $n \in \mathbb{N}$*

$$\int\limits_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K,$$

то f интегрируема на A и

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Доказательство. Положим $\varphi_n = \inf_{k \geqslant n} f_k(x)$. Полученные функции измеримы, т. к.

$$\{x \in A \mid \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x \in A \mid f_k(x) < c\}.$$

Далее, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, поэтому φ_n интегрируемы и

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int\limits_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K. \tag{1.7}$$

С другой стороны,

$$\varphi_n(x) \to f(x)$$

почти всюду (а именно, в тех же точках, где $f_n(x) \to f(x)$). Поскольку, к тому же, при всех $x \in A$

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots,$$

то по теореме Б. Леви, примененной к последовательности $\{\varphi_n\}$, имеем интегрируемость функции f и предельное соотношение

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu \to \int\limits_A f(x)\, d\mu. \tag{1.8}$$

Наконец, из (1.7) и (1.8) получаем неравенство, которое утверждается в условии теоремы.

Теорема доказана.

6. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Мы ограничимся случаем так называемой σ-конечной меры. Именно, будем говорить, что на пространстве X введена σ-конечная мера, если существует такая последовательность $X_n \subset X$, что $\mu(X_n) < +\infty$, $X_n \subset \subset X_{n+1}$ и $X = \bigcup_n X_n$. Любая такая последовательность называется исчерпывающей. (Приведем простой пример меры, не являющейся σ-конечной: возьмем меру на прямой и положим меру каждой точки равной единице.)

Теперь мы готовы дать определение интегрируемости функции по Лебегу на пространстве σ-конечной меры.

Определение 1. Измеримая функция f, определенная на множестве X σ-конечной меры, называется суммируемой на X, если она суммируема на каждом его измеримом подмножестве конечной меры и если для любой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu$$

существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f по множеству X и по-прежнему обозначается символом $\int_A f(x)\,d\mu$.

Для интегралов по множествам бесконечной меры сохраняют справедливость все предыдущие результаты, кроме утверждения об интегрируемости ограниченной измеримой функции.

§ 2. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [4], [5], [13], [21] и [34].