Лекция 5

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

В данной лекции мы рассмотрим пространства Лебега.

§ 1. Пространства Лебега

Теперь наша задача рассмотреть важный класс интегрируемых по Лебегу функций. Из определения интеграла Лебега ясно, что множество интегрируемых по Лебегу функций образуют линейное пространство, которое мы будем обозначать следующим образом — $\mathcal{L}(X)$. Напомним определение так называемого *метрического пространства*.

Определение 11. *Множество Y называется метрическим пространством, если на нем задана вещественная функция $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что выполнены следующие свойства*:

(i) $d(x, y) = 0$, *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

Теперь введем на множестве $\mathcal{L}(X)$ — всех интегрируемых на множестве X функций относительно измеримого пространства с положительной мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — вещественную функцию

$$d(f, g) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\ \mu(dx). \tag{1.1}$$

Ясно, что на множестве $\mathcal{L}(X)$ эта функция удовлетворяет условиям (ii) и (iii) определения 11. Однако, не выполняется требование (i). Действительно, пусть интегрируемые по Лебегу функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются только на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, тогда, очевидно, $d(f, g) = 0$, но функции $f(x) \neq g(x)$ на X. Что с этим нам делать? Однако, если мы вместо функций $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ будем рассматривать классы функций, такие, что две функции $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(X)$ принадлежат одному классу $\{f\}$, если они отличаются друг от друга на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, то на полученном пространстве, которое мы будем обозначать через $L(X)$, для функции

$$d^\circ(\{f\}, \{g\}) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\ \mu(dx), \tag{1.2}$$

где $f(x) \in \{f\}$, $g(x) \in \{g\}$, т. е. в данной формуле мы в левой части рассматриваем метрику на классах функций, а в правой части мы берем некоторые представители из этих классов. Естественно, нам нужно доказать, что значение величины в левой части не зависит от выбора представителей в правой части. Доказывается это следующим образом. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in \{f\}$ и $g_1(x), g_2(x) \in \{g\}$. Тогда имеют место следующие неравенства, в силу того, что выполнены свойства (ii) и (iii) определения 11 для функции (1.1):

$$d(f,g) \leqslant d(f,f_1) + d(f_1,g_1) + d(g_1,g) = d(f_1,g_1), \tag{1.3}$$

$$d(f_1,g_1) \leqslant d(f_1,f) + d(f,g) + d(g,g_1) = d(f,g), \tag{1.4}$$

поскольку в силу определения (1.1) функции $d(\cdot,\cdot)$ имеют место равенства

$$d(f,f_1) = d(f_1,f) = 0, \quad d(g,g_1) = d(g_1,g) = 0.$$

Следовательно, из неравенств (1.3) и (1.4) вытекает, что

$$d(f,g) = d(f_1,g_1).$$

Стало быть, функция d°, определенная формулой (1.2), определена корректно. Но теперь у нас для этой функции $d^\circ(\cdot,\cdot)$ помимо условий (ii) и (iii) выполнено и свойство (i). Таким образом, пространство классов интегрируемых функций $L(X)$ является метрическим пространством относительно метрики (1.2). Кроме того, в силу линейности пространства $\mathcal{L}(X)$ линейным является и пространство классов функций $L(X)$. Докажите сами! Таким образом, пространство классов функций $\{f\} \in$ $\in L(X)$ является линейным метрическим пространством. Заметим, что не смотря на то, что пространство $L(X)$ является пространством классов функций, обычно вместо выражения $\{f\} \in L(X)$ пишут просто $f(x) \in L(X)$, где $f(x)$ — это какой–то представитель класса функций $\{f\}$. В большинстве дальнейших рассуждений эта упрощенная запись не приводит к двусмыслице. Напомним теперь определение линейного нормированного пространства.

Определение 12. *Линейное пространство $\mathcal{E}$ называется нормированным, если на $\mathcal{E}$ задана такая функция $\|\cdot\| : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1_+$, что выполнены свойства*

(i) $\|f\| = 0$, *тогда и только тогда, когда $f = \vartheta$ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{E}$;*

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ *для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ и всех $f \in \mathcal{E}$;*

(iii) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ *для всех $f, g \in \mathcal{E}$.*

Нетрудно проверить, что линейное нормированное пространство является метрическим относительно метрики $d(x,y) = \|x-y\|$. Заметим, что если мы определим на линейном пространстве $L(X)$ норму следующим образом

$$\|\{f\}\| = \int\limits_X |f(x)|\mu(dx), \quad f(x) \in \{f\}, \tag{1.5}$$

то мы получим линейное нормированное пространство $L(X)$. Опять, точно таким же образом, что и ранее можно доказать корректность формулы (1.5). Теперь мы рассмотрим некоторые классы функций, важных в приложениях. Дадим определение. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — это измеримое пространство с положительной мерой.

Определение 13. *Измеримые функции $f(x)$, у которых*

$$|f(x)|^p \in \mathfrak{L}(X) \quad \textit{при} \quad p \in (0, +\infty) \tag{1.6}$$

будем обозначать как $\mathfrak{L}^p(X)$.

Уже стандартным образом разбивая функции $f(x)$ из класса $\mathfrak{L}^p(X)$ на классы функций $\{f\}$, мы получим класс $L^p(X)$ при $p \in (0, +\infty)$. Заметим, что класс функций $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным нормированным пространством. Докажем это. Действительно, пусть $f(x), g(x) \in L^p(X)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тогда имеет место элементарное неравенство

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \leqslant c(p)\left(|\alpha|^p |f(x)|^p + |\beta|^p |g(x)|^p\right) \in L(X), \quad c(p) = 2^{p-1},$$

поскольку пространство $L(X)$ является линейным. Стало быть, пространство $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным. Теперь определим на линейном пространстве $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ следующую числовую функцию:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} : L^p(X) \to \mathbb{R}^1_+ \tag{1.7}$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет свойствам (i) и (ii) определения 12 нормы. Докажем, что для функции (1.7) выполнено неравенство треугольника (iii) определения 12 нормы, т. е. докажем так называемое неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{gathered}\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in [1 + \infty).\end{gathered} \tag{1.8}$$

С этой целью заметим, что при $p = 1$ это неравенство есть следствия неравенства

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{для всех} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Теперь нам нужно рассмотреть случай $p \in (1, +\infty)$. Но для этого нам предварительно нужно доказать так называемое *неравенство Гельдера*.

Теорема 10. *Пусть* $f \in L^p(X)$ *и* $g \in L^q(X)$ *при* $p, q \in (1, +\infty)$, *причем*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тогда $fg \in L^1(X)$ *и имеет место неравенство*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.9}$$

Доказательство.

Для неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}^1_+$ имеет место хорошо известное неравенство:

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.10}$$

Поскольку $f \in L^p(X)$ и $g \in L^q(X)$, то f и g $\mu-$измеримы, а значит, $\mu-$-измеримо и их произведение. Кроме того, их произведение определено почти всюду в Ω. Теперь возьмем

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

и подставим их в неравенство (1.10), откуда получим неравенство

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Интегрируя обе части по мере μ на множестве X, получим неравенство

$$\int\limits_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \mu(dx) \leqslant 1.$$

Откуда сразу же вытекает неравенство Гельдера.

Теорема доказана.

Теперь мы уже в состоянии доказать собственно неравенство Минковского.

Теорема 11. *Пусть* $f, g \in L^p(X)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *тогда имеет место неравенство*

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p}. \tag{1.11}$$

Доказательство.

Прежде всего отметим, что в силу неравенства

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^{p-1}\left[|f(x)|^p+|g(x)|^p\right]$$

сумма функций $f(x)+g(x) \in L^p(X)$.

Перейдем к доказательству неравенства. Случай $p=1$ очевиден. Рассмотрим теперь случай, когда $p \in (1,+\infty)$. Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|+|f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|.$$

Воспользуемся теперь неравенством Гельдера для обоих слагаемых в правой части этого неравенства. Действительно, имеем

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,\mu(dx)\right)^{1/q}\left(\int\limits_X |f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p}\,\mu(dx)\right)^{1/q}\left(\int\limits_X |f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}, \quad q=\frac{p}{p-1}.$$

Аналогичное неравенство получается и для второго слагаемого. Таким образом, получили

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,\mu(dx) \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left[\left(\int\limits_X |f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}+\left(\int\limits_X |g(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}\right].$$

Откуда получаем требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Следовательно, числовая функция (1.7) является нормой. Значит, линейное пространство $L^p(X)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным нормированным относительно указанной нормы. К настоящему моменту мы разобрали случай, когда $p \in [1,+\infty)$. Теперь нам нужно рассмотреть случай, когда $p=+\infty$. Сначала введем класс функций $\mathcal{L}^\infty(X)$. Дадим определение.

Определение 14. *Классом $\mathcal{L}^\infty(X)$ мы назовем класс $\mu-$ $-$измеримых функций, которые $\mu-$почти всюду являются ограниченными.*

Ясно, что в случае конечной меры, т. е. когда $\mu(X) < +\infty$, имеет место множественное вложение $\mathcal{L}^p(X) \subset \mathcal{L}(X)$ при $p \in [1, +\infty)$. Стандартным образом разбивая множество $\mathcal{L}(X)$ на классы функций $\{f\}$ приходим к пространству $L^\infty(X)$. Очевидно, что пространство $L^\infty(X)$ является линейным. Теперь введем на этом линейном пространстве норму следующим образом:

$$\|f\|_\infty \equiv \inf\{c : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c\} = 0\}. \tag{1.12}$$

Докажем, что эта функция действительно является нормой на $L^\infty(X)$. Действительно, пусть $f(x), g(x) \in L^\infty(X)$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Итак, докажем сначала, что имеет место свойство (i) определения 12 нормы. Если $f(x) = 0$ $\mu-$почти всюду, то $\|f\|_\infty = 0$. Наоборот, если $\|f\|_\infty = 0$, тогда

$$\begin{gathered}\inf\{c : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c\} = 0\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant 0\} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \mu - \text{почти всюду}.\end{gathered}$$

Теперь докажем свойство (ii). В случае, когда $|\alpha| = 0$ доказательство очевидно. Пусть $|\alpha| > 0$, тогда согласно определению (1.12) имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{gathered}\|\alpha f\|_\infty = \inf\{c : \mu\{x : \ |\alpha f(x)| \geqslant c\} = 0\} = \\ = \inf\{c : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c/|\alpha|\} = 0\} = \\ = \inf\left\{\frac{|\alpha|}{|\alpha|}c : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c/|\alpha|\right\} = 0\} = \\ = |\alpha| \inf\{c_1 : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c_1\} = 0\} = |\alpha| \|f\|_\infty, \quad c_1 = \frac{c}{|\alpha|}.\end{gathered}$$

Теперь приступим к доказательству свойства (iii). С этой целью заметим, что имеет место поточечное неравенство

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|.$$

Поэтому имеет место следующее неравенство

$$c_0 \leqslant c_1 + c_2,$$

где

$$c_0 = \inf\{c : \mu\{x : \ |f(x) + g(x)| \geqslant c\} = 0\},$$
$$c_1 = \inf\{c : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c\} = 0\},$$
$$c_2 = \inf\{c : \mu\{x : \ |g(x)| \geqslant c\} = 0\}.$$

Стало быть, свойство (iii) доказано. Таким образом, функция (1.12) является нормой на линейном пространстве $L^\infty(X)$. Необходимость введения пространства $L^\infty(X)$ вызвана, например, следующим утверждением, которое мы приведем без доказательства.

Теорема 12. *Неравенство Гельдера остается справедливым для функции $f(x) \in L^1(X)$ и функции $g(x) \in L^\infty(X)$ и имеет вид*:

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

Важным следствием неравенства Гельдера является следующее полезное утверждение.

Теорема 13. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ и $\mu(X) < +\infty$, тогда имеют место следующие утверждения*

$$\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \textit{для всех} \quad f(x) \in L^q(X),$$

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad \textit{для всех} \quad f(x) \in L^\infty(X).$$

Доказательство.

Итак, пусть $\mu(X) < +\infty$. Тогда в силу неравенства Гельдера имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_X |f(x)|^p \, \mu(dx) = \int\limits_X |f(x)|^p \, 1 \, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} \left(\int\limits_X 1 \, \mu(dx) \right)^{1-p/q} =$$

$$= \left(\int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} [\mu(X)]^{1-\frac{p}{q}},$$

откуда сразу же получаем первое утверждение теоремы. Теперь, если мы в первом неравенстве утверждения теоремы положим $q = +\infty$, то получим следующее неравенство

$$\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{1/p} \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^\infty(X),$$

откуда вытекает предельное неравенство

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty .$$

Теперь докажем, что

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty ,$$

откуда и будет следовать второе утверждение теоремы. Действительно, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое μ—измеримое подмножество $\mathrm{A}_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) > 0$ и имеет место неравенство

$$|f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in \mathrm{A}_\varepsilon .$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int\limits_{\mathrm{A}_\varepsilon} |f(x)|^p \, \mu(dx)\right)^{1/p} \geqslant [\|f\|_\infty - \varepsilon] \, [\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)]^{1/p},$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает искомое утверждение.

Теорема доказана.

Теперь докажем одну важную интерполяционную лемму.

Пусть $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant +\infty$ и

$$\frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{s} + \frac{1-\vartheta}{t}, \ \vartheta \in [0, 1].$$

Лемма 2. *Имеет место вложение*

$$L^r(X) \subset L^s(X) \cap L^t(X)$$

и справедлива оценка

$$\| f \|_r \leqslant \| f \|_s^{\vartheta} \| f \|_t^{1-\vartheta} .$$

Доказательство.

Действительно, находим

$$\int\limits_X |f|^r \, \mu(dx) = \int\limits_X |f|^{\vartheta r} |f|^{(1-\vartheta)r} \, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^{\vartheta r \frac{s}{\vartheta r}} \, \mu(dx)\right)^{\vartheta r/s} \left(\int\limits_X |f|^{(1-\vartheta)r \frac{t}{(1-\vartheta)r}} \, \mu(dx)\right)^{\frac{(1-\vartheta)r}{t}}.$$

Мы использовали неравенство Гельдера, которое можно применить, так как

$$\frac{\vartheta r}{s} + \frac{(1-\vartheta)r}{t} = 1.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Заметим, что утверждение этой леммы тривиально в случае $\mu-$ограниченных множеств $X : \mu(X) < +\infty$. Действительно, из теоремы 6 вытекает цепочка вложений

$$L^t(X) \subset L^r(X) \subset L^s(X).$$

Однако, в случае не конечной меры утверждение леммы нетривиально.

Заметим теперь, что очень полезным в приложениях является обобщенное неравенство Гельдера.

Теорема 14. *Пусть* $f_k \in L^{p_k}(X)$, *причем* $p_k \in (1, +\infty)$ *при* $k = \overline{1, n}$ *и*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}, \quad r \in [1, +\infty).$$

Тогда имеет место общее неравенство Гельдера:

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}. \tag{1.13}$$

Доказательство.

Доказательство проведем по индукции. Пусть общее неравенство Гельдера доказано для $n = N - 1$ докажем его для $n = N$. Действительно, пусть

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_{N-1}.$$

Тогда из неравенства Гельдера получим цепочку неравенств

$$\|f \cdot f_N\|_r = \left(\int\limits_X |f|^r |f_N|^r \, \mu(dx) \right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_X |f|^{rp} \, \mu(dx) \right)^{1/p} \left(\int\limits_X |f_N|^{rq} \, \mu(dx) \right)^{1/q} \right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^{rp} \, \mu(dx) \right)^{1/(rp)} \left(\int\limits_X |f_N|^{rq} \, \mu(dx) \right)^{1/(rq)} =$$

$$= \|f\|_{p^*} \|f_N\|_{p_N},$$

где

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{N-1}}.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем нам нужно будет рассматривать различные последовательности из линейных нормированных пространств $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty]$, причем для доказательства сходимости рассматриваемых функциональных последовательностей нужно иметь некоторые точные критерии. В связи с этим нам нужно ввести понятие *полноты метрических пространств*. Напомним определение фундаментальной последовательности $\{f_n\}$ метрического пространства (Y, d).

Определение 15. *Последовательность $\{f_n\}$ метрического пространства (Y, d) называется фундаментальной или последовательностью Коши, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеет место неравенство*

$$d(f_n, f_m) \leqslant \varepsilon.$$

Напомним, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Но ясно, что, вообще говоря, не всякая фундаментальная последовательность является сходящейся, хотя бы потому, что не надо было ученым мужам вводить эквивалентное сходимости понятие. Поэтому особо выделяются такие метрические пространства, у которых всякая фундаментальная последовательность является сходящейся. Дадим определение.

Определение 16. *Полным метрическим пространством называется такое метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.*

Вот один из самых тонких критериев сходимости последовательности — доказали ее фундаментальность и далее в силу полноты — доказали ее сходимость.

Ясно, что поскольку нормированное пространство является метрическим относительно метрики $d(x, y) = \|x - y\|$, то полнота нормированного пространства определяется однозначно как полнота относительно указанной метрики соответствующего метрического пространства. Теперь мы можем ввести определение банахова пространства.

Определение 17. *Полное нормированное пространство называется банаховым.*

Теперь мы обсудим пространства Лебега $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty]$ на предмет полноты. Для этого сначала введем понятие *сильной сходимости* последовательности $\{f_n(x)\} \subset L^p(X)$. Дадим определение.

Определение 18. *Последовательность $\{f_n(x)\} \subset L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty]$ называется сильно сходящейся к некоторой функции $f(x) \in L^p(X)$, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Предположим, что мера μ является $\sigma-$конечной, т. е. такой, что множество X представимо в виде

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_i, \quad X_i \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_i) < +\infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. *Пространства Лебега $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty]$ являются банаховыми относительно введенных норм.*

Доказательство.

Проведем доказательство для случая конечной меры $\mu(X) < +\infty$. Совершенно понятно, что полученные результаты легко переносятся на случай $\sigma-$конечной меры μ.

Рассмотрим сначала случай пространства $L^\infty(X)$. Пусть $\{f_n\} \subset \subset L^\infty(X)$ — есть фундаментальная последовательность. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon. \tag{1.14}$$

Теперь для всех $n, m \in \mathbb{N}$ введем обозначения

$$\varepsilon_{nm} \equiv \|f_n - f_m\|_\infty, \quad \Omega_{n_0} \equiv \bigcap_{n,m \geqslant n_0} \{x : \, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon_{nm}\}.$$

Теперь докажем, что $\mu\,(X \backslash \Omega_{n_0}) = 0$. Действительно, по определению нормы $\| \quad \|_\infty$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty = \varepsilon_{nm} \quad \text{для почти всех} \quad x \in X.$$

Теперь по построению измеримого множества Ω_{n_0} приходим к выводу, что

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{равномерно по} \quad x \in \Omega_{n_0},$$

для всех $n, m \geqslant n_0$, а значит, последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно фундаментальная на Ω_{n_0}, и, стало быть, сходится к некоторой ограниченной на Ω_{n_0} функции $f(x)$. Далее поскольку $\mu\,(X \backslash \Omega_{n_0}) = 0$ приходим к выводу, что $f(x) \in L^\infty(X)$.

Теперь перейдем к доказательству полноты пространства $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$. Для этого нам потребуется теорема Фату для сходимости по мере, которую мы приведем без доказательства.

Теорема Фату. *Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность неотрицательных μ–измеримых и μ–интегрируемых функций, которая сходится к функции f по мере Лебега μ, причем*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx) \leqslant K < +\infty.$$

Тогда функция f является μ–интегрируемой и

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) \leqslant K.$$

Более того,

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx).$$

Итак, пусть $\{f_n\}$ последовательность фундаментальная в пространстве $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$. Тогда в силу неравенства Чебышева (см., например, [13]) имеет место следующее неравенство:

$$\mu\,\{x : \, |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c^p}\,\|f_n - f_m\|_p^p$$

эта последовательность фундаментальна по мере μ, а, значит, сходится по мере к некоторой функции $f(x)$. С другой стороны, имеет место неравенство треугольника

$$\int\limits_X |f_n(x)|^p \, \mu(dx) \leqslant \left(\left(\int\limits_X |f_n(x) - f_{m_0}(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_X |f_{m_0}(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p} \right)^p,$$

из которого в силу фундаментальности $\{f_n\}$ вытекает равномерная по n ограниченность:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_X |f_n(x)|^p \, \mu(dx) \leqslant K < +\infty.$$

Применяя теперь теорему Фату, получаем, что $f(x) \in L^p(X)$. Теперь заметим, что имеет место неравенство

$$||f_n - f_m| - |f - f_m|| \leqslant |f_n - f|,$$

из которого получаем, что из сходимости по мере $f_n \to f$ вытекает сходимость по мере $|f_n - f_m|$ к $|f - f_m|$, но тогда в из последнего утверждения теоремы Фату получаем неравенство

$$\int\limits_X |f(x) - f_m(x)|^p \, \mu(dx) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int\limits_X |f_n(x) - f_m(x)|^p \, \mu(dx) \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым, приходим к выводу, что

$$f_n \to f \quad \text{сильно в} \quad L^p(X) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы рассмотрели очень важные в приложениях пространства Лебега $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty]$.

§ 2. Срезка

Теперь мы приступим к рассмотрению некоторых важных результатов о *плотности и срезки*. С этой целью нам придется ввести некоторые понятия из теории метрических пространств, которые обычно излагаются в курсе "Функции многих переменных". Напомним определение предельной точки, изолированной точки и внутренней точки множества A некоторого метрического пространства (Y, d). Итак, дадим следующие определения.

Определение 19. *Предельной точкой x_0 множества A называется точка, в любой окрестности которой содержатся точки множества A отличные от x_0.*

Определение 20. *Изолированной точкой x_0 множества A называется точка, для которой существует окрестность, не содержащая других точек этого множества.*

Определение 21. *Внутренней точкой x_0 множества A называется точка, принадлежащей множеству A вместе с некоторой окрестностью этой точки.*

Напомним определение замыкания множества из метрического пространства.

Определение 22. *Замыканием множества A метрического пространства (Y, d) называется множество $\overline{A}$, полученное из A добавлением к нему всех его предельных точек.*

Теперь мы можем дать определение множества A всюду плотного в B. Пусть множества A и B принадлежат метрическому пространству (Y, d).

Определение 23. *Множество A называется всюду плотным во множестве B если замыкание $\overline{A}$ множества A содержит множество B.*

Наконец, дадим определение компактного множества в метрическом пространстве.

Определение 24. *Множество K метрического пространства (Y, d) называется компактным, если из любого покрытия этого множества открытыми шарами из (Y, d) можно выделить конечное подпокрытие.*

Обсудим это достаточно новое для вас понятие. Если метрическое пространство (Y, d) является, кроме того, конечномерным векторным пространством, то компактное множество — есть в точности замкнутое и ограниченное множество. Известным вам примером конечномерного линейного метрического пространства является эвклидово пространство $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, в функциональном анализе доказывается следующий важный результат *компакт в линейном нормированном пространстве является замкнутым, ограниченным множеством, тогда и только тогда, когда это пространство является конечномерным*. Однако, это утверждение вовсе не означает, что компакт является замкнутым ограниченным множеством только в конечномерном пространстве. Есть бесконечномерные пространства с так называемым свойством Хайне–Бореля, т.е. с тем свойством, что компакт является замкнутым ограниченным множеством, но, естественно, эти пространства не являются нормированными.

Приведем без доказательства один важный результат о плотности. Символом $\mathbb{C}_0(X)$ мы обозначаем множество непрерывных на X функций таких, что для каждой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0(X)$ найдется такое *компактное множество* $K \subset X$, что $\varphi(x) = 0$ при $x \in X \setminus K$. Кроме того, мы в дальнейшем будем рассматривать также следующий класс функций — $\mathbb{C}_0^\infty(X)$, т.е. такие бесконечно дифференцируемые на X функции $f(x)$, что опять найдется такой компакт $K \subset X$, что $\varphi^{(k)}(x) = 0$ при $x \in X \setminus K$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 16. *Множество $\mathbb{C}_0(X)$ плотно в пространстве $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$.*

Что означает этот результат. Он означает, что для любой функции $f(x) \in L(X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция $\varphi_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}_0(X)$, что имеет место неравенство

$$\|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Этот результат о плотности будет нами использоваться в дальнейшем.

Теперь мы переходим к важному методу исследования функций из Лебеговых пространств $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ — методу срезок.

Введем функцию «шапочку»:

$$\omega(t) = c \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{|t|^2-1}\right\}, & |t| \leqslant 1; \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Заметим, что шапочка удовлетворяет следующим свойствам:

$$\omega\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \mathrm{supp}(\omega) \equiv \{x: \ |x| \leqslant \varepsilon\},$$

причем постоянная $c > 0$ выбирается из условия нормировки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(|x|)\, dx = 1.$$

Рассмотрим следующую свертку с функцией $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, + +\infty)$:

$$f_\varepsilon(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N}\omega\left(\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|\right) f(y)\, dy. \tag{2.2}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 17. *Пусть* $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, +\infty)$ *тогда для срезки* $f_\varepsilon(x)$, *определенной формулой* (2.2), *справедливы следующие свойства*:

$$f_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right), \tag{2.3}$$

$$\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad \|f_\varepsilon - f\|_p \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.4}$$

Доказательство.

Докажем эту теорему при условии, что $\mathrm{supp}(f) \subset G$, $\mathrm{meas}(G) < + +\infty$. Для удобства рассмотрения введем обозначение:

$$\mathrm{J}_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon^N}\omega\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right).$$

Тогда можно обозначить свертку (2.2) следующим образом:

$$\mathrm{J}_\varepsilon * f(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy.$$

Утверждение (2.3) выполнено поскольку $\mathrm{J}_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Докажем второе утверждение. Действительно, имеет место следующая цепочка соотношений:

$$|\mathrm{J}_\varepsilon * f(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\mathrm{J}_\varepsilon(x-y)|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} |f(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^{1/q} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\, dy \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(z)\, dz \right)^{1/q} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\, dy \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\, dy \right)^{1/p},$$

где мы воспользовались неравенством Гельдера, условием нормировки $\mathrm{J}_\varepsilon(x)$ и тем, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Из полученного неравенства вытекает следующее выражение:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\mathrm{J}_\varepsilon * f(x)|^p\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p\, dy \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p\, dy,$$

где мы снова воспользовались условием нормировки $\mathrm{J}_\varepsilon(x)$. Тем самым, мы доказали второе утверждение теоремы.

Докажем третье утверждение. Действительно, для любого $\delta > 0$ и для любого $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ найдется в силу предыдущей теоремы о плотности такая функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset G$, $\operatorname{meas}(G) < +$ $+\infty$, что

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_p \leqslant \frac{\delta}{3}. \tag{2.5}$$

С другой стороны, в силу доказанного уже второго утверждения теоремы и вложения

$$\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$$

справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|\mathrm{J}_\varepsilon * f(x) - \mathrm{J}_\varepsilon * \varphi(x)\|_p \leqslant \|f(x) - \varphi(x)\|_p \leqslant \frac{\delta}{3}. \tag{2.6}$$

Наконец, справедливы следующие неравенства

$$|\mathrm{J}_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathrm{J}_\varepsilon(x-y)\,|\varphi(y)-\varphi(x)|\,dy \leqslant \leqslant \sup_{y\colon |x-y|\leqslant\varepsilon} |\varphi(y)-\varphi(x)|\,. \quad (2.7)$$

Понятно, что функция $\varphi(x)$ равномерно непрерывна, поэтому правая часть последнего неравенства равномерно по $x \in G$ стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны, заметим, что функция $\mathrm{J}_\varepsilon * \varphi(x)$ имеет компактный носитель, поскольку функция $\varphi(x)$ имеет компактный носитель и $\mathrm{J}_\varepsilon(x)$ имеет компактный носитель. Стало быть, левая и правая части неравенства (2.7) интегрируемы в $L^p(\mathbb{R}^N)$, и в силу теоремы Лебега при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\|\mathrm{J}_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x)\|_p \leqslant \frac{\delta}{3}. \quad (2.8)$$

Таким образом, из неравенств (2.5), (2.6) и (2.8) приходим к выводу, что

$$\|\mathrm{J}_\varepsilon * f(x) - f(x)\|_p \leqslant \|\mathrm{J}_\varepsilon * f(x) - \mathrm{J}_\varepsilon * \varphi(x)\|_p + + \|\varphi(x) - \mathrm{J}_\varepsilon * \varphi(x)\|_p + \|f(x) - \varphi(x)\|_p \leqslant \delta$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [4], [5], [13], [21] и [34].