Лекция 6

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

§ 1. Введение

В этой лекции мы рассмотрим формализм линейных функционалов и ряд существенных свойств общих топологических пространств. Для понимания этой лекции достаточно владеть основами курсов "Линейная алгебра"и "Вещественный анализ".

§ 2. Линейные функционалы

Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{L}$, возможно бесконечномерное. Рассмотрим все линейные функции $f : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$, т. е. такие функции f, что для всех $x, y \in \mathcal{L}$ и всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняется следующее равенство:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(f).$$

Обозначим множество всех таких скалярных функций символом $\mathcal{L}^*$. Докажем, что пространство $\mathcal{L}^*$ можно сделать линейным. Действительно, для произвольных функций $f, g \in \mathcal{L}^*$ и произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ определим новый элемент из $\mathcal{L}^*$ следующим образом:

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Ясно, что функция $h(x)$ является линейной функцией на $\mathcal{L}$ и поэтому принадлежит пространству $\mathcal{L}^*$. Стало быть, пространство $\mathcal{L}^*$ является тоже линейным. И это пространство называется *пространством линейных функционалов* на линейным пространством $\mathcal{L}$. В дальнейшем как в математике, так и в теоретической физике очень удобным является следующее обозначение действия линейного функционала $f \in \mathcal{L}^*$ на элементе $x \in \mathcal{L}$:

$$\langle f, x \rangle.$$

Это обозначение удобно в первую очередь, что оно подчеркивает билинейность выражения $\langle f, x \rangle$ по переменным $(f, x) \in \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L}$, т. е. что функция $\langle f, x \rangle$ является линейной как по переменной $f \in \mathcal{L}^*$, так и по переменной $x \in \mathcal{L}$:

$$\langle f, x \rangle : \mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L} \to \mathbb{C}.$$

С другой стороны, это обозначение очень удобно при определении слабого решения некоторого дифференциального оператора. Например, как мы далее покажем, слабое решение следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

можно будет записать в следующем виде

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, \varphi \right\rangle = \langle f(x,t), \varphi\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{L}. \tag{2.1}$$

Согласитесь, что писать действие функционала f на элементе φ как $f(\varphi)$ вынудило бы нас писать также следующее не вполне понятное выражение вместо (2.1), а именно следующую «билиберду»:

$$\frac{dx}{dt}(\varphi) = f(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{L}.$$

§ 3. Пространства линейных функционалов над пространствами Лебега

Теперь зададимся следующим вопросом: какой явный вид имеет скобка двойственности между сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{L}^p(\Omega,\mu)$ и $(\mathbb{L}^p(\Omega,\mu))^*$? Ответ на этот вопрос дает следующая важная теорема **Рисса**.

Теорема 1. *Сопряженным к банахову пространству $\mathbb{L}^p(\Omega,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является банахово пространство $\mathbb{L}^q(\Omega,\mu)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, причем имеет место явное представление для скобок двойственности*:

$$\langle \Phi_g, f\rangle_p \equiv \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx), \; f(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega,\mu), \; g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega,\mu). \tag{3.1}$$

Отображение $g \mapsto \Phi_g$ является изометрическим изоморфизмом.

Доказательство.

Сначала покажем, что формула (3.1) при каждом $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega,\mu)$, действительно задает некоторый линейный и непрерывный функционал на $\mathbb{L}^p(\Omega,\mu)$. И имеет место равенство норм $\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q$. Действительно, по определению (I.2.3) нормы сопряженного к банахову пространству справедлива цепочка выражений:

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \sup_{\|f\|_p=1} |\langle \Phi_g, f\rangle| = \\ = \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) \right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \leqslant \|g\|_q, \tag{3.2}$$

из которой, в частности, вытекает, что $\Phi_g \in (\mathbb{L}^p(\Omega,\mu))^*$. Докажем, что на самом деле имеет место равенство

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q.$$

Это равенство, очевидно, выполнено если $g = \vartheta$. Пусть $\|g\|_q > 0$ и рассмотрим сначала случай $p > 1$. Возьмем в формуле (3.1) функцию

$$f(x) = \frac{\operatorname{sign}(g)|g|^{q/p}}{\|g\|_q^{q/p}}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\langle \Phi_g, f\rangle = \int\limits_\Omega g(x)f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^{q/p+1}}{\|g\|_q^{p/q}}\,\mu(dx) =$$
$$= \frac{1}{\|g\|_q^{p/q}} \int\limits_\Omega |g(x)|^q\ \mu(dx) = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{p/q}} = \|g\|_q.$$

Откуда сразу же получаем, что

$$\|\Phi_g\|_* = \sup_{\|f\|=1} |\langle \Phi_g, f\rangle| \geqslant \|g\|_q.$$

Значит, отсюда и из (3.2), действительно, приходим к следующему равенству:

$$\|\Phi_g\|_* = \|g\|_q.$$

Рассмотрим теперь случай $p = 1$, тогда $q = +\infty$. Из представления (3.1) вытекает в силу неравенства Гельдера оценка

$$\|\Phi_g\| \leqslant \|g\|_\infty.$$

С другой стороны, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mu-$измеримое множество A_ε с положительной мерой $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство

$$|g(x)| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in \mathrm{A}_\varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) < +\infty$. Теперь введем функцию $f(x) \in \mathbb{L}^1(\Omega,\mu)$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)} \begin{cases} \chi_{\mathrm{A}_\varepsilon}(x), & x \in \mathrm{A}_\varepsilon; \\ 0, & x \in \Omega\backslash \mathrm{A}_\varepsilon, \end{cases}$$

где $\chi_{\mathrm{A}_\varepsilon}(x)$ — характеристическая функция множества A_ε. Но тогда имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega f(x)\operatorname{sign}(g)(x)g(x)\,\mu(dx) \geqslant \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)} \int\limits_{\mathrm{A}_\varepsilon} |g(x)|\,\mu(dx) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)}\left[\|g\|_\infty - \varepsilon\right]\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\|\Phi_g\|_* \geqslant \|g\|_\infty.$$

Тем самым на этом этапе мы доказали, что отображение $g \mapsto \Phi_g$ является изометрической инъекцией всего пространства $\mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$ в пространство $(\mathbb{L}^p(\Omega, \mu))^*$ при $p \in [1, +\infty)$. Во второй части докажем, что это отображение является сюръекцией.

Итак, пусть $\Phi \in (\mathbb{L}^p(\Omega, \mu))^*$. Пусть $\chi_A(x)$ — это характеристическая функция множества $A \in \mathcal{M}$. Введем обозначение

$$\nu(A) \equiv \langle \Phi, \chi_A \rangle\,. \tag{3.3}$$

Докажем, что $\nu(A)$ — это счетно–аддитивная и абсолютно непрерывная относительно μ мера. Рассмотрим случай конечной меры μ, поскольку из доказательства видно, что все результаты распространяются и на случай $\sigma-$конечной меры μ.

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ — это система попарно непересекающихся множеств, исчерпывающая A. Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \right\rangle.$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(x) \to \chi_A(x) \quad \text{поточечно} \quad x \in A$$

и, кроме того, имеет место оценка

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(x)\right| \leqslant 1,$$

то в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \right\rangle \to \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n} \right\rangle = \langle \Phi, \chi_A \rangle = \nu(A),$$

т. е.

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n).$$

Тем самым, доказали счетную аддитивность.

Докажем теперь абсолютную непрерывность меры ν относительно меры μ. Действительно, имеет место цепочка соотношений.

$$|\nu(A)| = |\langle \Phi, \chi_A \rangle| \leqslant \|\Phi\|_* \|\chi_A\|_p = \|\Phi\|_* \left(\int\limits_A 1\, \mu(dx) \right)^{1/p} = \|\Phi\|_* \left[\mu(A)\right]^{1/p}.$$

Теперь напомним одну важную теорему теории меры и интеграла Лебега:

Теорема Радона–Никодима. *Пусть μ и ν — конечные меры на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{M})$. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ в точности тогда, когда существует такая μ—интегрируемая функция g, что имеет место представление:*

$$\nu(A) = \int\limits_A g(x)\, \mu(dx) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{M}. \tag{3.4}$$

Тем самым для введенной меры ν выполнены все условия теоремы Радона–Никодима. Таким образом, найдется такая μ—интегрируемая функция $g(x)$, что имеет место представление (3.4). Осталось доказать, что $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$. Значит, имеет место равенство

$$\langle \Phi, \chi_A \rangle = \int\limits_\Omega g(x) \chi_A(x)\, \mu(dx). \tag{3.5}$$

Пусть $f(x)$ — это простая функция, тогда из (3.5) получим

$$\langle \Phi, f \rangle = \int\limits_\Omega g(x) f(x)\, \mu(dx). \tag{3.6}$$

В силу плотности множества простых функций во множестве измеримых и ограниченных функций $\mathbb{B}(\Omega)$ приходим к выводу, что (3.6) справедливо для $f(x) \in \mathbb{B}(\Omega)$. Теперь осталось доказать, что $g(x) \in \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$.

С этой целью введем специально выбранную функцию из $\mathbb{B}(\Omega)$. Именно, пусть

$$f_n(x) = |g(x)|^{q/p} \chi_{A_n}(x) \operatorname{sign}(g), \quad A_n = \{x : |g(x)| \leqslant n\}.$$

Понятно, что множество A_n является μ—измеримым. Тогда

$$\langle \Phi, f_n \rangle = \int\limits_{A_n} |g|^{q/p} |g|\, \mu(dx) = \int\limits_{A_n} |g(x)|^q\, \mu(dx),$$

поскольку

$$1 + \frac{q}{p} = q.$$

С другой стороны,

$$|\langle \Phi, f_n \rangle| \leqslant \|\Phi\|_* \|f_n\|_p.$$

Так что имеет место неравенство

$$\int\limits_{A_n} |g(x)|^q \, \mu(dx) \leqslant \|\Phi\|_* \left(\int\limits_{A_n} |g(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{1/p}.$$

Значит,

$$\left(\int\limits_{\Omega} |g(x)|^q \chi_{A_n}(x) \, \mu(dx) \right)^{1/q} \leqslant \|\Phi\|_*.$$

В силу уже озвученной здесь теоремы Фату приходим к выводу, что

$$g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu).$$

Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Докажем, что функция $g(x) \in \in \mathbb{L}^\infty(\Omega, \mu)$. С этой целью рассмотрим множество

$$\mathrm{A} \equiv \{x : \ |g(x)| > \|\Phi\|_*\}.$$

Докажем, что эти множества имеют нулевую $\mu-$меру Лебега. Действительно, предположим, что $\mu(\mathrm{A}) > 0$. Тогда

$$\left\langle \Phi, \frac{\chi_{\mathrm{A}} \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle = \frac{1}{\mu(\mathrm{A})} \int\limits_{\Omega} |g(x)| \chi_{\mathrm{A}}(x) \, \mu(dx) > \frac{1}{\mu(\mathrm{A})} \mu(\mathrm{A}) \|\Phi\|_* = \|\Phi\|_*.$$

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|\Phi\|_* = \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} |\langle \Phi, f \rangle| \geqslant \left\langle \Phi, \frac{\chi_{\mathrm{A}} \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle > \|\Phi\|_*.$$

Значит,

$$\|\Phi\|_* > \|\Phi\|_*.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\mu(\mathrm{A}) = 0$. И значит, почти всюду $|g(x)| \leqslant \|\Phi\|_*$. Тем самым доказано, что $g(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega, \mu)$.

Стало быть, мы получили следующий результат. Для произвольного линейного, непрерывного функционала $\Phi \in (\mathbb{L}^p(\Omega, \mu))^*$ при $p \in [1, +\infty)$ найдется такая функция $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$ с $q = p/(p-1)$, что имеет место равенство

$$\langle \Phi, f \rangle = \int\limits_{\Omega} g(x) f(x) \, \mu(dx),$$

справедливое для всех простых функций $f(x)$, но, как известно, множество простых функций в случае конечной меры μ плотно в $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ при $p \in [1, +\infty)$. Стало быть, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1. Случай, который не отражен в теореме Рисса — это случай, когда $p = +\infty$, т. е. вопрос о том, как выглядит сопряженное к $\mathbb{L}^\infty(\Omega, \mu)$ остался открытым.

§ 4. Сильная, слабая и $*$—слабая сходимости

Перейдем теперь к изучению различных типов сходимостей в пространствах $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$. Одним типом сходимости мы уже неоднократно пользовались — это сходимость по норме. Дадим определение.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* $\{f_n\} \subset \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty]$ *сходится сильно к некоторому элементу* $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$, *если имеет место предельное равенство*

$$\|f - f_n\|_p \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{4.1}$$

Относительно сильной сходимости мы из результата теоремы 18 знаем, что пространства $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ при $p \in [1, +\infty]$ полны.

Дадим определение слабой сходимости в пространствах $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ при $p \in [1, +\infty)$. В силу теоремы 27 (Рисса) оправдано следующее определение.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность* $\{f_n\} \subset \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *сходится слабо к некоторому элементу* $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$, *если для любой функции* $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$ *при* $q = p/(p-1)$ *выполнено предельное равенство*

$$\int\limits_{\Omega} [f_n(x) - f(x)] g(x) \, \mu(dx) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{4.2}$$

§ 5. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [2], [5], [16], [18] и [21].