Лекция 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

§ 1. Введение

Напомним определение вещественного нормированного пространства:

Определение 1. Вещественным нормированным пространством называется линейное пространство $\mathbb{B}$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}^1$ такое, что определена неотрицательная функция — норма $\| \quad \|$, удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{B}$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \vartheta \in \mathbb{B}$, где ϑ — нулевой элемент линейного пространства $\mathbb{B}$;

(ii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in \mathbb{B}$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^1$ и всех $x \in \mathbb{B}$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим множество всех непрерывных на сегменте $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ $([a, b] \neq \varnothing)$ функций $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Заметим, что для двух произвольных функций $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ и любых $\alpha_1 \alpha_2 \in \in \mathbb{R}^1$ выражение $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Стало быть, $\mathbb{C}[a, b]$ — это линейное пространство над полем вещественных чисел. Определим над этим пространством вещественную функцию

$$\|f\| \equiv \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{1.1}$$

Проверим, что эта функция — норма над линейным пространством $\mathbb{C}[a, b]$. Действительно, $\|f\| \geqslant 0$, причем $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $|f(x)| = 0$ для всех $x \in [a, b]$. А равенство $|f(x)| = 0$ эквивалентно равенству $f(x) = 0$. Стало быть, доказали (i). Теперь в силу очевидного неравенства $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ взяв supremum по $x \in [a, b]$ от обеих частей этого неравенства получим (ii). Наконец, поскольку $|\alpha f(x)| = |\alpha| |f(x)|$ приходим к (iii). Значит, функция (1.1), определенная над $\mathbb{C}[a, b]$, действительно норма. Значит, линейное пространство $\mathbb{C}[a, b]$ становится нормированным относительно нормы (1.1).

Возникает естественный вопрос: А есть ли другие нормы, относительно которых пространство $\mathbb{C}[a, b]$ становится нормированным? Ответ прост — таких норм неограничено много. Например, возьмем вместо нормы (1.1) следующую

$$\|f\|' \equiv c_1 \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad c_1 > 0. \tag{1.2}$$

или более нетривиальную:

$$\|f\|'' \equiv |f(a)| + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{1.3}$$

Давайте проверим, что функция, определенная формулой (1.3) действительно норма. Свойство (i) выполнено, поскольку с одной стороны $\|f\|'' \geqslant 0$ для всех $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, а с другой стороны имеем $\|f\|'' = 0$ тогда и только тогда, когда одновременно имеют место равенства

$$|f(a)| = 0 \quad \text{и} \quad |f(x)| = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [a,b],$$

но последние выражения эквивалентны следующему

$$|f(x)| = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [a,b],$$

а отсюда сразу же получаем, что $f(x) = 0$ для всех $x \in [a,b]$. Таким образом, (i) доказано. Для доказательства свойства (ii) заметим, что выполнено неравенство

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$$

и, в частности,

$$|f(a) + g(a)| \leqslant |f(a)| + |g(a)|.$$

Таким образом, приходим к свойству (ii). Свойство (iii) вытекает из следующих равенств

$$|\alpha f(x)| = |\alpha|\,|f(x)| \quad \text{и} \quad |\alpha f(a)| = |\alpha|\,|f(a)|\,.$$

Выбор той или иной нормы обусловлен потребностями конкретной задачи математической физики.

Напомним теперь определение вещественного пространства Банаха. С этой целью введем понятие фундаментальной последовательности или последовательности Коши.

Определение 2. *Последовательность* $\{u_n\} \in \mathbb{B}$ ($\mathbb{B}$ — *нормированное пространство*) *называется фундаментальной последовательностью или последовательностью Коши, если*

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|u_n - u_m\| = 0. \tag{1.4}$$

Очевидно, что сходящаяся по норме последовательность элементов $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$, т. е. если для некоторого $u \in \mathbb{B}$ имеем

$$\|u_n - u\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

является фундаментальной.

П Р И М Е Р 2. Давайте сначала обсудим понятие фундаментальной последовательности в случае, когда $\mathbb{B}$ — это конечномерное нормированное пространство. Например, когда $\mathbb{B} = \mathcal{P}_{n+1}[a, b]$ — пространство многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$. Как известно из курса линейной алгебры это линейное пространство размерности $n + 1$, базис которого можно определить, например, так

$$1, x, x^2, ..., x^n, \quad \text{для всех} \quad x \in [a, b].$$

Заметим, что

$$\mathcal{P}_{n+1}[a, b] \subset \mathbb{C}[a, b]. \tag{1.5}$$

Действительно, всякий многочлен степени не выше $n \in \mathbb{N}$ является непрерывной функцией на сегменте $[a, b]$. Стало быть, в силу (1.5) норму над пространством $\mathcal{P}_{n+1}[a, b]$ можно задать, например, так

$$\|u\| \equiv \sup_{x\in[a,b]} |u(x)|, \quad \text{для всех} \quad u(x) \in \mathcal{P}_{n+1}[a, b]. \tag{1.6}$$

Заметим, что можно норму над пространством $\mathcal{P}_{n+1}[a, b]$ (и, более того, над $\mathbb{C}[a, b]$) задать формулой

$$\|f\|^{(i)} \equiv \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Докажите сами, что это действительно норма над линейным пространством $\mathbb{C}[a, b]$ и, в частности, над $\mathcal{P}_{n+1}[a, b]$. Итак, пусть $\{p_m(x)\} \subset \mathcal{P}_{n+1}[a, b]$ — это фундаментальная относительно нормы (1.6) последовательность многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 1 .В этом предположении кроется существенно важный момент: в случае бесконечномерного линейного пространства $\mathbb{B}$, если у нас имеется произвол в выборе нормы, то может быть так случиться, что относительно одной нормы заданная последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ является фундаментальной, а относительно другой нормы — не является фундаментальной. Этот важный момент обсудим позже. Заметим, что поэтому для заданного линейного пространства $\mathbb{B}$ всегда нужно указывать норму, относительно которой строиться из линейного пространства $\mathbb{B}$ нормированное пространство.

Поскольку пространство $\mathcal{P}_{n+1}[a, b]$ конечномерно, то последовательность $\{p_m(x)\}$ можно представить в следующем виде

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{mk} x^k.$$

Поскольку последовательность $\{p_m(x)\}$ фундаментальна, то рассмотрим две последовательности

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{mk} x^k \quad \text{и} \quad p_l(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{lk} x^k,$$

для которых имеем

$$\|p_m(x) - p_l(x)\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} [\alpha_{mk} - \alpha_{lk}]\, x^k \right\| \tag{1.7}$$

Заметим, что имеют место неравенства

$$\sup_{x \in [a,b]} |x^k| > 0 \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1, n}.$$

Докажем, что условие фундаментальности последовательности $\{p_m(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ эквивалентно условию фундаментальности каждой последовательности чисел $\{\alpha_{mk}\}$ для всех $k = \overline{0, n}$. Очевидно, что из представления (1.7) вытекает, что если последовательности $\{\alpha_{mk}\}$ фундаментальны для всех $k = \overline{0, n}$, то последовательность $\{p_m(x)\}$ фундаментальна. Действительно, это следствие следующей цепочки неравенств

$$\|p_m(x) - p_l(x)\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} [\alpha_{mk} - \alpha_{lk}]\, x^k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha_{mk} - \alpha_{lk}| \sup_{x \in [a,b]} |x^k| \to +0 \quad \text{при} \quad m, l \to +\infty.$$

Поскольку из равномерной по $x \in [a, b]$ сходимости следует поточечная сходимость, то из условия, что

$$\|p_m(x) - p_l(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad m, l \to +\infty$$

следует, что для всех $x \in [a, b]$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n} [\alpha_{mk} - \alpha_{lk}]\, x^k \to 0 \quad \text{при} \quad m, l \to +\infty.$$

Предположим, что для некоторых $k \in [0, n]$ разность $\beta_{kml} = \alpha_{mk} - \alpha_{lk}$ не сходится к нулю:

$$\beta_{kml} \to \beta_k \neq 0,$$

тогда в пределе получим

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k = 0, \quad \text{для всех} \quad x \in [a, b],$$

но в силу линейной независимости базиса $1, x, x^2, ..., x^n$ получим, что все коэффициенты $\beta_k = 0$ при $k = \overline{0, n}$. Следовательно, из фундаментальности последовательности $\{p_m(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ следует фундаментальность последовательностей чисел $\{\alpha_{mk}\}$ для всех $k = \overline{0, n}$. Но поскольку всякая фундаментальная последовательность чисел сходится, то получаем, что всякая фундаментальная последовательность многочленов из пространства $\mathcal{P}_{n+1}[a, b]$ многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ сходится.

Можно доказать в общем виде, что этот результат справедлив для любого конечномерного пространства:

Теорема 2. *Всякая фундаментальная последовательность* (*относительно нормы* $\| \quad \|$) *конечномерного нормированного пространства* $\mathbb{B}$ *сходится в этом пространстве.*

Введем понятие полноты нормированного пространства.

Определение 3. *Нормированное пространство* $\mathbb{B}$ *называется полным, если каждая фундаментальная последовательность сходится в этом пространстве, т. е. если для любой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ *из условия, что*

$$\|u_n - u_m\| \to 0 \quad \textit{при} \quad n, m \to +\infty$$

следует существование такого $u \in \mathbb{B}$, *что*

$$\|u - u_n\| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Объединение понятие нормированного пространства и полноты приводит нас к понятию пространства Банаха:

Определение 4. *Полное нормированное пространство называется пространством Банаха.*

Замечание 2. В силу теоремы 1 приходим к выводу, что всякое конечномерное нормированное пространство является банаховым. Так что свойство полноты конечномерного нормированного пространства автоматически выполнено. Поэтому изучение полноты нормированного пространства имеет смысл только в случае, когда оно бесконечномерное линейное пространство.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$. Очевидно, что это пространство — линейное и к тому же бесконечномерное. Действительно, имеем $\mathcal{P}_{n+1}[0, 1] \subset \mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. И поскольку размерность пространства $\dim \mathcal{P}_{n+1}[0, 1] = n + 1$ приходим к выводу, что пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$ бесконечномерное. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$ функцию

$$\|u\| \equiv \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|. \tag{1.8}$$

Нетрудно убедиться, что эта функция является нормой на пространстве $\mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$. Докажем, что нормированное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$ относительно нормы (1.8) не является полным. С этой целью нам достаточно привести пример фундаментальной последовательности, которая не сходится по норме (1.8) в пространстве $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$. Действительно, рассмотрим следующую последовательность функций:

$$u_n(x) = \begin{cases} x, & \text{при} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2+n}\right], \\ 1-x, & \text{при} \quad x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2+n}, 1\right], \\ \omega_n(x), & \text{при} \quad x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2+n}\right], \end{cases} \tag{1.9}$$

где $\omega_n(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}[0,1]$, причем

$$\omega_n^{(k)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+n} \quad \text{и} \quad \omega_n^{(k)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+n},$$

для всех $k \in \mathbb{N}$,

$$\omega_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2+n}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{2+n}\right]$$

и, кроме того,

$$\omega_n\left(\frac{1}{2}\right) \to \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Эта последовательность равномерно по $x \in [0,1]$ сходится к функции

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{при} \quad \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 1-x, & \text{при} \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Эта функция, очевидно, непрерывна, но ее производная терпит разрыв первого рода в точке $x = 1/2$. Стало быть, $u(x) \notin \mathbb{C}^{(1)}[0,1]$. Значит, нормированное относительно нормы (1.8) линейное бесконечномерное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ не является полным. Заметим, что если на линейном пространстве $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ ввести норму следующим образом

$$\|u\|' \equiv \sup_{x\in[0,1]} |u(x)| + \sup_{x\in[0,1]} \left|u'(x)\right|, \tag{1.10}$$

где $u'(x)$ — это производная функции $u(x)$, то относительно этой нормы пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ будет полно.

В связи в с последним примером возникает вопрос: на одном и том же линейном пространстве, вообще говоря, можно ввести нормы самым различным образом, но как соотнести эти различные нормы? Ведь относительно одних норм линейное бесконечномерное пространство является полным, а относительно других — нет. На выручку приходит понятие эквивалентных норм.

О п р е д е л е н и е 5. *На одном и том же линейном пространстве $\mathbb{B}$ две нормы $\|\ \ \|$ и $\|\ \ \|'$ называются эквивалентными, если* *найдутся такие две постоянные* $0 < c_1 < c_2$, *что имеют место неравенства*

$$c_1\|u\|' \leqslant \|u\| \leqslant c_2\|u\|' \quad \text{\textit{для всех}} \quad u \in \mathbb{B}.$$

Замечание 3. На конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$. Мы уже ввели на этом линейном пространстве норму по формуле (1.10). Теперь введем другую норму следующим образом:

$$\|u\|'' \equiv |u(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \left|u'(x)\right|. \tag{1.11}$$

Докажем, что на линейном пространстве $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ нормы (1.10) и (1.11) эквивалентны. Из вида этих норм сразу же получаем, что

$$\|u\|'' \leqslant \|u\|' \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{C}^{(1)}[0,1].$$

Теперь заметим, что для любой функции $u(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ имеет место очевидное равенство:

$$u(x) = u(0) + \int\limits_0^x u'(s)\,ds, \quad \text{для всех} \quad x \in (0,1),$$

из которого вытекает следующая цепочка неравенств

$$|u(x)| \leqslant |u(0)| + \left|\int\limits_0^x u'(s)\,ds\right| \leqslant |u(0)| + \int\limits_0^x \left|u'(s)\right|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant |u(0)| + \int\limits_0^1 \left|u'(s)\right|\,ds \leqslant |u(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \left|u'(x)\right|.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\sup_{x\in[0,1]} |u(x)| \leqslant |u(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \left|u'(x)\right|. \tag{1.12}$$

В силу (1.12) справедливо неравенство

$$\|u\|' \leqslant |u(0)| + 2\sup_{x\in[0,1]} \left|u'(x)\right| \leqslant 2\|u\|''.$$

Значит, приходим к неравенствам

$$\|u\|'' \leqslant \|u\|' \leqslant 2\|u\|'' \quad \text{для всех} \quad u(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,1].$$

Стало быть, нормы (1.10) и (1.11) эквивалентны и поэтому, в известном смысле, порождают одно и тоже *топологическое* пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$.

§ 2. Сильная, слабая и $*-$слабая сходимости.

Как хорошо известно из курса линейной алгебры для любого конечномерного вещественного линейного пространства $\mathbb{B}$ существует, так называемое, линейно-сопряженное пространство $\mathbb{B}^{\#}$, состоящее из линейных функций — функционалов:

$$f : x \in \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

причем в силу линейности функционалов пространство $\mathbb{B}^{\#}$ тоже линейное, причем размерности пространства $\mathbb{B}$. Эта конструкция легко переноситься на случай бесконечномерного пространства.

Определение 6. *Пространство $\mathbb{B}^{\#}$ — это линейное пространство линейных функционалов над пространством $\mathbb{B}$.*

Однако, в отличие от конечномерного пространства, когда все нормы на нем эквивалентны, в случае бесконечномерного линейного пространства $\mathbb{B}$ на нем можно задать различные виды сходимостей. Начнем с того, что на пространстве Банаха уже есть сходимость, которую мы назовем *сильной*:

Определение 7. *Сильной сходимостью последовательности $\{u_n\}$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$ называется сходимость по норме следующей числовой последовательности:*

$$\|u_n - u\| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty \quad \textit{для некоторого} \quad u \in \mathbb{B}. \tag{2.1}$$

В дальнейшем сильную сходимость будем обозначать следующим образом:

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

С учетом введенного понятия сильной сходимости в линейно-сопряженном пространстве $\mathbb{B}^{\#}$ к пространству $\mathbb{B}$ можно выделить линейное подпространство линейных и *непрерывных* функционалов:

Определение 8. *Непрерывным функционалом из пространства $\mathbb{B}^{\#}$ называется элемент $f \in \mathbb{B}^{\#}$, удовлетворяющий тому условию, что числовая последовательность $\{f(u_n)\}$ сходится к числу $f(u)$ для любой сильно сходящейся последовательности $u_n \to u$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}$.*

Пространство линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством $\mathbb{B}$ обозначим через $\mathbb{B}^*$. В дальнейшем, удобно будет обозначить действие линейного функционала $f \in \mathbb{B}^*$ на элементе $u \in \mathbb{B}$ в виде скобок двойственности:

$$\langle f, u \rangle \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^* \quad \text{и} \quad u \in \mathbb{B}. \tag{2.2}$$

Это обозначение удобно, потому что выражает тот факт, что как функция двух переменных скобка двойственности является билинейным функционалом над $\mathbb{B}^* \otimes \mathbb{B}$.

Возникает вопрос: что можно сказать о линейном пространстве $\mathbb{B}^*$? Можно ли ввести на нем такую норму, относительно которой это пространство является банаховым, или нет? Для ответа на эти вопросы введем на линейном, очевидно, бесконечномерном пространстве $\mathbb{B}^*$ (в том случае, конечно, когда $\mathbb{B}$ бесконечномерно) норму следующим образом:

$$\|f\|_* \equiv \sup_{\|u\|=1} |\langle f, u\rangle| \,. \tag{2.3}$$

Докажем, что это действительно норма. Ясно, что $\|f\|_* \geqslant 0$. Пусть $\|f\|_* = 0$. Докажем, что отсюда следует, что $f = \vartheta$, где $\vartheta \in \mathbb{B}^*$ — есть нулевой функционал. Пусть противное: $f \neq \vartheta$. Пусть $v \in \mathbb{B}$ — это произвольный ненулевой фиксированный элемент, тогда найдется такое $R > 0$, что

$$\|u\| = 1 \quad \text{для} \quad u = \frac{v}{R},$$

и мы имеем

$$|\langle f, u\rangle| = 0 \Rightarrow \langle f, v\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B}.$$

Значит, f — это нулевой функционал линейного пространства $\mathbb{B}^*$, но в линейном пространстве $\mathbb{B}^* \subset \mathbb{B}^\#$ нулевой функционал единственный, т. е. $f = \vartheta$. Таким образом, свойство (i) доказано. Докажем теперь свойство (ii). Действительно,

$$\|f_1 + f_2\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_1 + f_2, u\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|u\|=1} |\langle f_1, u\rangle| + \sup_{\|u\|=1} |\langle f_2, u\rangle| = \|f_1\|_* + \|f_2\|_*,$$

поскольку в силу того, что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это билинейный функционал над $\mathbb{B}^* \otimes \mathbb{B}$, то

$$|\langle f_1 + f_2, u\rangle| = |\langle f_1, u\rangle + \langle f_2, u\rangle| \leqslant |\langle f_1, u\rangle| + |\langle f_2, u\rangle| \,.$$

Свойство (iii) имеет место в силу следующей цепочки равенств:

$$|\langle \alpha f, u\rangle| = |\alpha \langle f, u\rangle| = |\alpha|\, |\langle f, u\rangle| \,.$$

Справедлива следующая полезная лемма:

Лемма 1. *Пусть $u \in \mathbb{B}$ и $f \in \mathbb{B}^*$, тогда имеет место следующее неравенство*

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\|. \tag{2.4}$$

Доказательство.

По определению нормы (2.3) пространства $\mathbb{B}^*$ имеем неравенство

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad \|u\| = 1. \tag{2.5}$$

Пусть $v \in \mathbb{B}$, тогда если $v = \vartheta$ — нулевой функционал пространства $\mathbb{B}$, то неравенство (2.4), очевидно, выполнено. Пусть теперь $v \neq \vartheta$, тогда найдется такое $R > 0$, что $\|v\| = R$, но тогда для

$$u = \frac{v}{R} \quad \text{имеем} \quad \|u\| = 1,$$

и, значит, после подстановки в (2.5) получим в силу свойств скобок двойственности следующее неравенство

$$|\langle f, v\rangle| \leqslant \|f\|_* \|v\| \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Для произвольного нормированного пространства* $\mathbb{B}$ *сопряженное пространство* $\mathbb{B}^*$ *является банаховым относительно нормы* (2.3).

Доказательство.

Действительно, пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это фундаментальная последовательность функционалов, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\|f_n - f_m\|_* \leqslant \varepsilon.$$

Но тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f_m, u\rangle| \leqslant \|f_n - f_m\|_* \|u\| \leqslant \varepsilon \|u\|$$

«по–точечено» по $u \in \mathbb{B}$. Следовательно, для каждого фиксированного $u \in \mathbb{B}$ последовательность

$$\{\langle f_n, u\rangle\} \subset \mathbb{R}^1$$

является фундаментальной и, следовательно, сходится в $\mathbb{R}^1$, т. е. найдется такой функционал $f \in \mathbb{B}^*$, что «по–точечено» имеет место следующее предельное равенство:

$$\langle f, u\rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, u\rangle \,.$$

Чтобы доказать полноту $\mathbb{B}^*$ предположим, что $\|f_n - f_m\|_* < \varepsilon$ при $n, m \geqslant n(\varepsilon)$. Тогда $\langle f, u\rangle = \lim\limits_{n \to +\infty} \langle f_n, u\rangle$ существует для каждого $u \in \mathbb{B}$ и

$$|\langle f, u\rangle - \langle f_n, u\rangle| \leqslant |\langle f, u\rangle - \langle f_m, u\rangle| + \|f_m - f_n\|_* \|u\| < \\ < |\langle f, u\rangle - \langle f_m, u\rangle| + \varepsilon \|u\|.$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от m, то, полагая $m \to +\infty$, получаем, что $|\langle f, u\rangle - \langle f_n, u\rangle| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$ равномерно по $u \in \mathbb{B}$ для которых $\|u\| \leqslant 1$. Отсюда из леммы 1 следует, что $\|f\|_* < < +\infty$ и что $\|f - f_n\|_* \to 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, пространство $\mathbb{B}^*$ является банаховым относительно нормы $\| \quad \|_*$. Совершенно понятно, что сходимость по норме $\| \quad \|_*$ — есть сильная сходимость в пространстве $\mathbb{B}^*$.

Перейдем теперь к понятию слабой сходимости последовательностей банахова пространства $\mathbb{B}$. Дадим следующее определение.

Определение 9. *Последовательность* $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ *называется слабо сходящейся к некоторому элементу* $u \in \mathbb{B}$, *если для любого элемента* $f \in \mathbb{B}^*$ *имеем*

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle.$$

Слабую сходимость последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$ будем обозначать следующим образом:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}.$$

Теперь можно ввести понятие слабой фундаментальной последовательности или слабой последовательности Коши.

Определение 10. *Последовательность* $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ *нормированного пространства* $\mathbb{B}$ *называется слабо фундаментальной или слабой последовательностью Коши, если для любого фиксированного* $f \in \mathbb{B}^*$ *имеем*

$$|\langle f, u_n \rangle - \langle f, u_m \rangle| \to 0 \quad \textit{при} \quad n, m \to +\infty. \tag{2.6}$$

Очевидно, как всегда, что слабо сходящаяся последовательность $u_n \rightharpoonup u$ в нормированном пространстве $\mathbb{B}$ является слабо фундаментальной. В определенном смысле сильная сходимость в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ является *равномерной* сходимостью, а слабая сходимость — *поточечной*.

Замечание 4. Всякая сильно сходящаяся последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ является слабо сходящейся. Действительно, в силу леммы 1 имеет место оценка:

$$|\langle f, u_n \rangle - \langle f, u \rangle| \leqslant \|u_n - u\| \|f\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Возникает естественный вопрос: всякая ли слабо фундаментальная последовательность является слабо сходящейся в пространстве $\mathbb{B}$? Во-первых, заметим, что даже в том случае, когда $\mathbb{B}$ — есть пространство Банаха, то отсюда отнюдь не следует, что всякая слабо фундаментальная последовательность слабо сходится в $\mathbb{B}$. Действительно, «банаховость» пространства $\mathbb{B}$ лишь гарантирует, что **сильно фундаментальная** последовательность или просто фундаментальная последовательность сходится в $\mathbb{B}$. Очевидно, что фундаментальная последовательность — есть слабо фундаментальная последовательность, но обратное неверно. Поэтому введем новое понятие.

Определение 11. *Банахово пространство $\mathbb{B}$ называется слабо полным, если всякая слабо фундаментальная последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u \in \mathbb{B}$:*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad \mathbb{B}.$$

Лемма 2. *Вещественное гильбертово пространство $\mathbb{H}$ со счетным базисом слабо полно.*

Доказательство.

Пусть $\mathbb{H}$ имеет счетный ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$, т. е. произвольный элемент $u \in \mathbb{H}$ можно представить в виде ряда

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}^1,$$

причем этот ряд абсолютно сходится, т.е.

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где указанная норма определяется через скалярное произведение

$$\|u\| \equiv (u, u)^{1/2}.$$

Предположим, что гильбертово пространство $\mathbb{H}$ уже отождествлено со своим сопряженным, т.е. $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$. Тогда слабая фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ эквивалентна следующему предельному равенству:

$$(u_n - u_m, v) \to 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H} \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty. \tag{2.7}$$

Итак, разложим элемент u_n последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{H}$ по базису $\{e_k\}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{nk} e_k,$$

тогда предельное равенство (2.7) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_{nk} - \alpha_{mk}) (e_k, v) \to 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H} \tag{2.8}$$

при $n, m \to +\infty$. Будем последовательно брать $v = e_j$ при $j = 1, 2, ..., n, ...$. Тогда из (2.8) получим

$$\alpha_{nk} - \alpha_{mk} \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Значит, числовая последовательность $\{\alpha_{nk}\}_{n=1}^{+\infty}$ фундаментальна для всех $k \in \mathbb{N}$. Стало быть, она имеет предел

$$\alpha_{nk} \to \alpha_k \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Но отсюда следует, что

$$(u_n, v) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{nk}(e_k, v) \to \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(e_k, v) \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для всех $v \in \mathbb{H}_l \equiv \operatorname{span}\{e_1, e_2, ..., e_l\}$ при $l \in \mathbb{N}$, где символом $\operatorname{span}\{e_1, e_2, ..., e_l\}$ обозначена линейная оболочка указанных элементов гильбертова пространства $\mathbb{H}$. В силу произвольности $l \in \mathbb{N}$ получаем, что

$$u_n \rightharpoonup u = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем ввести понятие $*-$слабой сходимости в пространстве $\mathbb{B}^*$. Дадим следующее определение:

Определение 12. *Последовательность элементов $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*-$слабо сходится к некоторому элементу $f \in \mathbb{B}^*$, если для любого $u \in \mathbb{B}$ имеет место предельное равенство*

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f, u\rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.9}$$

Обозначается $*-$слабая сходимость следующим образом:

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \tag{2.10}$$

Разумеется, что из сильной сходимости в пространстве $\mathbb{B}^*$ относительно нормы (2.3) последовательности элементов $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ следует их $*-$слабая сходимость. Действительно, в силу леммы 1 имеем неравенство

$$|\langle f_n - f, u\rangle| \leqslant \|f_n - f\|_* \|u\|.$$

Как мы уже доказали, линейное пространство $\mathbb{B}^* \subset \mathbb{B}^{\#}$ является банаховым в силу результата теоремы 2 относительно нормы (2.3). Теперь возникает вопрос: при каких условиях пространство $\mathbb{B}^*$ является $*-$ $-$слабо полно в смысле ниже следующего определения?

Определение 13. *Пространство $\mathbb{B}^*$ называется $*-$слабо полным, если всякая $*-$слабо фундаментальная последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ сходится, т.е. если при выполнения следующего условия*

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f_m, u\rangle| \to 0 \quad \textit{при} \quad n, m \to +\infty, \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{B} \tag{2.11}$$

найдется такой элемент $f \in \mathbb{B}^*$, что

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^*.$$

Частичный ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 3. *Вещественное гильбертово пространство $\mathbb{H}$ со счетным базисом $*-$слабо полно.*

Доказательство.

Мы можем считать, что гильбертово пространство $\mathbb{H}$ уже отождествленно со своим сопряженным: $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$. Поэтому $*-$слабая сходимость в гильбертовом пространстве эквивалентна просто слабой сходимости. Далее осталось применить лемму 2.

Лемма доказана.

Продолжим наше исследование дальше. Поскольку $\mathbb{B}^*$ является линейным, то для него существует пространство линейных функционалов $\mathbb{B}^{*\#}$. Если теперь рассмотреть только те из функционалов пространства $\mathbb{B}^{*\#}$, которые являются непрерывными относительно нормы (2.3), то уже стандартным образом приходим к пространству $\mathbb{B}^{**}$. Дадим следующее определение:

Определение 14. *Через $\mathbb{B}^{**}$ обозначено пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством $\mathbb{B}^*$, относительно нормы* (2.3), *т. е. множество линейных функционалов $v \in \in \mathbb{B}^{*\#}$, которые удовлетворяют условию*

$$|\langle v, f_n\rangle_* - \langle v, f\rangle_*| \to 0 \quad \textit{для всех} \quad f_n \to f \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B}^*, \tag{2.12}$$

при $n \to +\infty$ относительно нормы (2.3), *где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ обозначены скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}^{**}$ и $\mathbb{B}^*$, т. е. $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ — это билинейный функционал над $\mathbb{B}^{**} \otimes \mathbb{B}^*$.*

Понятно, что в силу теоремы 2 пространство $\mathbb{B}^{**}$ действительно является банаховым относительно нормы

$$\|v\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v, f\rangle_*| \tag{2.13}$$

и в силу леммы 1 имеет место полезное неравенство

$$|\langle v, f\rangle_*| \leqslant \|v\|_{**}\|f\|_*, \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B}^{**} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*. \tag{2.14}$$

Заметим, что линейными и непрерывными относительно нормы (2.3) функционалами над пространством $\mathbb{B}^*$ являются все элементы пространства $\mathbb{B}$. Действительно, во-первых, имеем

$$\langle\cdot, u\rangle : \mathbb{B}^* \to \mathbb{R}^1,$$

во-вторых, имеют место выражения в силу леммы 1

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f, u\rangle| \leqslant \|f_n - f\|_*\|u\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

как только $f_n \to f$ сильно в $\mathbb{B}^*$ относительно нормы (2.3). Поэтому пространство $\mathbb{B}$ можно отождествить с некоторым подпространством в $\mathbb{B}^{**}$. Теперь понятна и связь скобок двойственности:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \quad \text{и} \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_*.$$

Действительно, имеем

$$\langle u, f\rangle_* = \langle f, u\rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Поэтому в одном частном, но важном случае, когда $\mathbb{B}$ можно отождествить со всем пространством $\mathbb{B}^{**}$, получаем

$$\langle u, f\rangle_* = \langle f, u\rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} = \mathbb{B}^{**} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}^*. \tag{2.15}$$

В следующем параграфе мы будем интенсивно исследовать именно этот случай.

Возникает естественный вопрос о том, как устроено множество $\mathbb{B}^{**} \backslash \mathbb{B}$ в том случае, когда $\mathbb{B}$ является собственным подпространством пространства $\mathbb{B}^{**}$? Ответ на этот вопрос выходит за рамки нашего исследования. Давайте более внимательно рассмотрим как вкладывается банахово пространство $\mathbb{B}$ в банахово пространство $\mathbb{B}^{**}$. Мы уже выяснили, что существует оператор $\mathbb{J}$, который сопоставляет каждому элементу пространства $\mathbb{B}$ некоторый элемент пространства $\mathbb{B}^{**}$, причем, очевидно, этот оператор линейный. Докажем, что этот оператор является изометричным:

$$\mathbb{J} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**}, \quad \|\mathbb{J}u\|_{**} = \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}. \tag{2.16}$$

Действительно, пусть $u \neq \vartheta$, где ϑ — нулевой элемент пространства $\mathbb{B}$, поскольку в противном случае равенство (2.16) очевидно. С одной стороны, имеем

$$\|v\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| = \|u\|,$$

С другой стороны, имеем

$$|\langle f, u\rangle| = |\langle v, f\rangle_*| \leqslant \|v\|_{**}\|f\|_*,$$

откуда получаем

$$\|u\| \left|\left\langle f, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle\right| \leqslant \|v\|_{**}\|f\|_*,$$

$$\|u\| \sup_{\|w\|=1} |\langle f, w\rangle| \leqslant \|v\|_{**}\|f\|_*,$$

$$\|u\|\|f\|_* \leqslant \|v\|_{**}\|f\|_*,$$

Значит,

$$\|u\| = \|v\|_{**}, \quad v = \mathbb{J}u, \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}.$$

Теперь перейдем к исследованию вопросов о свойствах слабой и $*$–слабой сходимостей.

Напомним формулировку одного из следствий из теоремы Банаха–Штейнгауза, которую иногда и называют теоремой Банаха–Штейнгауза:

Теорема о резонансе. *Пусть $\{\mathbb{T}_n\}$ — последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих банахово пространство $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. Тогда если последовательность*

$$\{\|\mathbb{T}_n x\|\}$$

ограничена при каждом фиксированном $x \in \mathbb{X}$, *то и последовательность* $\{\|\mathbb{T}_n\|\}$ *ограничена.*

Эта теорема доказана в работе [17].

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Справедливы следующие два утверждения*:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \quad \textit{то} \quad \|u_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|;$$

(ii) *Всякая* $*-$*слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}^*$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \quad \textit{то} \quad \|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_*.$$

Доказательство.

Доказательство (i). В силу уже установленного изометрического вложения $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}$ мы можем рассмотреть слабо сходящуюся последовательность

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B},$$

как последовательность функционалов из $\mathbb{B}^{**}$:

$$\mathrm{I}_n(f) \equiv \langle u_n, f\rangle_* = \langle f, u_n\rangle \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^* \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N},$$

Поскольку последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится в $\mathbb{B}$, то для каждого фиксированного $f \in \mathbb{B}^*$ числовая последовательность $\mathrm{I}_n(f)$ ограничена, но тогда по теореме о резонансе имеем, что последовательность $\{\|u_n\|\}$ тоже ограничена. Теперь заметим, что если отождествить $\mathbb{B}$ с некоторым подпространством в $\mathbb{B}^{**}$, то можно обозначать элемент $u \in \mathbb{B}$ и соответствующий ему элемент $\mathbb{J}u \in \mathbb{B}^{**}$ одной и той же буквой u. С учетом этого замечания имеем

$$\|u_n\| = \|u_n\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_n, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_n\rangle|,$$

поэтому получаем следующее неравенство

$$\|u_n\| \geqslant |\langle f, u_n\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Перейдем к нижнему пределу при $n \to +\infty$ в последнем неравенстве и получим неравенство

$$\liminf_{n\to+\infty}\|u_n\| \geqslant |\langle f, u_\infty\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \tag{2.17}$$

поскольку

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u_\infty\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Поскольку левая часть неравенства (2.17) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, то возьмем supremum от обеих частей по $f \in \mathbb{B}^* : \|f\|_* = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \to +\infty} \|u_n\| \geqslant \|u_\infty\|,$$

поскольку

$$\|u_\infty\| = \|u_\infty\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_\infty, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_\infty\rangle| .$$

Доказательство (ii). Введем обозначение

$$\mathrm{K}_n(u) \equiv \langle f_n, u\rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку числовая последовательность $\{\mathrm{K}_n(u)\}$ сходится для каждого $u \in \mathbb{B}$, то из теоремы о резонансе вытекает ограниченность числовой последовательности $\{\|f_n\|_*\}$. По определению нормы $\| \quad \|_*$ имеем

$$\|f_n\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_n, u\rangle| \geqslant |\langle f_n, u\rangle| .$$

Теперь перейдем к нижнему пределу при $n \to +\infty$, тогда поскольку

$$\langle f_n, u\rangle \to \langle f_\infty, u\rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B},$$

то получим неравенство

$$\liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_* \geqslant |\langle f_\infty, u\rangle| . \tag{2.18}$$

Поскольку левая часть неравенства (2.18) не зависит от $u \in \mathbb{B}$, то перейдем в обеих частях к supremum по $u \in \mathbb{B} : \|u\| = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_* \geqslant \|f_\infty\|_*,$$

поскольку

$$\|f_\infty\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_\infty, u\rangle| .$$

Теорема доказана.

§ 3. Рефлексивность и сепарабельность

В предыдущем параграфе мы отметили, что важный случай банаховых пространств такой, когда банахово пространство $\mathbb{B}$ можно отождествить (очевидно, изометрически) с банаховым пространством $\mathbb{B}^{**}$. Дадим следующее определение:

Определение 15. *Банахово пространство $\mathbb{B}$, которое можно отождествить со своим дважды сопряженным пространством $\mathbb{B}^{**}$, называется рефлексивным.*

Замечание 5. Заметим, что если $\mathbb{B}$ — это рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым. Действительно, это следствие простейших рассуждений. Сопряженное пространство $\mathbb{B}^*$ к нормированному пространству $\mathbb{B}$ является банаховым пространством в силу теоремы 2. Дважды сопряженное пространство $\mathbb{B}^{**}$ является банаховым как сопряженное к нормированному пространству $\mathbb{B}^*$. Пусть теперь $\{u_n\}$ фундаментальная последовательность по норме пространства $\mathbb{B}$, но тогда имеем цепочку равенств

$$\|u_n - u_m\| = \|\mathbb{J}u_n - \mathbb{J}u_m\|_{**} \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty, \tag{3.1}$$

значит, последовательность $\{\mathbb{J}u_n\} \subset \mathbb{B}^{**}$ является фундаментальной в $\mathbb{B}^{**}$, то в силу полноты $\mathbb{B}^{**}$ она сходится к некоторому элементу $u^{**} \in \in \mathbb{B}^{**}$. Но поскольку в силу рефлексивности $\mathbb{B}$ отображение $\mathbb{J} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**}$ — есть «изометрия на», то получаем, что найдется такой элемент $u \in \in \mathbb{B}$, что

$$u^{**} = \mathbb{J}u.$$

А стало быть опять в силу изометрии $\mathbb{J}$ имеем

$$\|u_n - u\| = \|\mathbb{J}u_n - \mathbb{J}u\|_{**} = \|\mathbb{J}u_n - u^{**}\|_{**} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Приведем некоторые результаты о свойствах рефлексивных пространств и о достаточных условиях рефлексивности банаховых пространств.

Прежде всего мы можем дать ответ на вопрос из второго параграфа о достаточных условиях слабой полноты банахова пространства:

Теорема 5. *Рефлексивные банаховы пространства слабо полны.*

Доказательство.

Итак, пусть $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ — есть слабо фундаментальная последовательность рефлексивного банахова пространства $\mathbb{B}$, т. е. имеет место выражение

$$|\langle f, u_n\rangle - \langle f, u_m\rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Введем обозначение:

$$\mathrm{I}_n \equiv \langle f, u_n\rangle.$$

В силу слабой фундаментальности последовательности $\{u_n\}$ приходим к выводу, что $\{\mathrm{I}_n\}$ является фундаментальной числовой последовательностью, а, значит, она сходится к некоторому числу

$$\mathrm{I}_n \to \mathrm{I}_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Значит, для каждого $f \in \mathbb{B}^*$ последовательность $\{\mathrm{I}_n\}$ ограничена и, стало быть, по теореме о резонансе приходим к выводу, что последовательность ограничена $\{\|u_n\|\}$. Ниже мы докажем теорему 5 о том, что в этом случае из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathrm{I}_{n_k} \to \langle f, u\rangle \quad \text{при} \quad k \to +\infty \quad \text{для каждого} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Но ранее мы доказали, что исходная числовая последовательность $\{\mathrm{I}_n\}$ сходится к некоторому числу I_∞. В силу единственности предела числовых последовательностей приходим к выводу, что

$$\mathrm{I}_n = \langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для каждого} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Теорема доказана.

Для дальнейшего нам понадобится новое понятие — сепарабельность, которое мы неявно уже использовали при доказательстве леммы 2. В этой теореме мы рассматривали гильбертово пространство со *счетным базисом*. Действительно, если рассмотреть все возможные линейные комбинации этого счетного базиса с рациональными коэффициентами, то для произвольного элемента $u \in \mathbb{H}$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент u_ε из построенного множества, что будет иметь место неравенство

$$\|u - u_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon.$$

Дадим следующее определение:

Определение 16. *Банахово пространство $\mathbb{B}$ называется сепарабельным если в этом пространстве существует счетное всюду в $\mathbb{B}$ плотное множество $\mathbb{M}$, т. е. если любой элемент $u \in \mathbb{B}$ можно приблизить с любой наперед заданной точностью элементом из множества $\mathbb{M} \subset \mathbb{B}$.*

Приведем без доказательства следующую полезную лемму.

Лемма 4. *Если сепарабельно банахово пространство $\mathbb{B}^*$, то сепарабельно и нормированное пространство $\mathbb{B}$.*

Доказательство этой леммы приведено в [17].

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 6. *Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства $\mathbb{B}$. Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $\mathbb{B}$ подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:*

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Для простоты докажем эту теорему для случая *сепарабельного* банахова пространства $\mathbb{B}$.

Поскольку пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, значит мы можем отождествить пространство $\mathbb{B}$ с дважды сопряженным $\mathbb{B}^{**}$. Стало быть, имеем $\mathbb{B}^{**} = \mathbb{B}$, а так как $\mathbb{B}$ сепарабельно, то сепарабельно и пространство $\mathbb{B}^{**}$, но это пространство является сопряженным к банахову пространству $\mathbb{B}^*$. Значит, в силу леммы 4 пространство $\mathbb{B}^*$ является сепарабельным. Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$

множество. Поскольку последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ ограничена по норме, то числовая последовательность

$$\langle f_1, u_n \rangle$$

ограниченная, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_1, u_{n_1} \rangle .$$

Числовая последовательность

$$\langle f_2, u_{n_1} \rangle$$

тоже ограниченная, а значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_2, u_{n_2} \rangle .$$

Продолжая таким образом этот процесс мы получим подпоследовательность $\{u_{n_{k+1}}\}$, которая слабо сходится на элементах f_j при $j = 1, ..., k + 1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$ исходной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится на счетном всюду плотном в $\mathbb{B}^*$ множестве $\{f_n\}$.

Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u_\infty \in \mathbb{B}$. Пусть $f \in \mathbb{B}^*$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
|\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f, u_{m_m} \rangle| &\leqslant |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{n_n} \rangle| + \\
&+ |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + |\langle f, u_{m_m} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| \leqslant \\
&\leqslant \|f - f_k\|_* \|u_{n_n}\| + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_m}\|.
\end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{f_k\}$ в пространстве $\mathbb{B}^*$ относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\} \subset \mathbb{B}$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \to +\infty$. Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f, u_{n_n} \rangle\}$$

является фундаментальной при любом $f \in \mathbb{B}^*$. Значит, сходится. Стало быть, найдется некоторый элемент $u \in \mathbb{B}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем получить аналогичный результат в случае пространства $\mathbb{B}^*$.

Теорема 7. *Пусть $\mathbb{B}$ — есть сепарабельное банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов* *банахова пространства* $\mathbb{B}^*$. *Тогда из* $\{f_n\}$ *можно выделить* $*-$*слабо сходящуюся в* $\mathbb{B}^*$ *подпоследовательность* $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Действительно, пусть $\{u_k\} \subset \mathbb{B}$ — счетное всюду в $\mathbb{B}$ плотное. Поскольку последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ ограниченная, то числовая последовательность

$$\{\langle f_n, u_1\rangle\}$$

ограниченная и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_{n_1}, u_1\rangle .$$

Теперь числовая последовательность

$$\{\langle f_{n_1}, u_2\rangle\}$$

тоже ограниченная и поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_{n_2}, u_1\rangle .$$

Продолжая таким образом этот процесс мы получим подпоследовательность $\{f_{n_{k+1}}\} \subset \{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*-$слабо сходящуюся на элементах u_j, где $j = 1, 2, ..., k$. Извлекая диагональную подпоследовательность, получим итоговую подпоследовательность $\{f_{n_n}\} \subset \mathbb{B}^*$, которая $*-$слабо сходится на счетном всюду в $\mathbb{B}$ плотном множестве $\{u_k\} \subset \mathbb{B}$.

Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{f_{n_n}\} \subset \subset \mathbb{B}^*$ $*-$слабо сходится к некоторому элементу $f_\infty \in \mathbb{B}^*$. Пусть $u \in \mathbb{B}$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}|\langle f_{n_n}, u\rangle - \langle f_{m_m}, u\rangle| \leqslant |\langle f_{n_n}, u\rangle - \langle f_{n_n}, u_k\rangle| + \\ + |\langle f_{n_n}, u_k\rangle - \langle f_{m_m}, u_k\rangle| + |\langle f_{m_m}, u\rangle - \langle f_{m_m}, u_k\rangle| \leqslant \\ \leqslant \|u - u_k\| \|f_{n_n}\|_* + |\langle f_{n_n}, u_k\rangle - \langle f_{m_m}, u_k\rangle| + \|u - u_k\| \|f_{m_m}\|_*.\end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{u_k\}$ в пространстве $\mathbb{B}$ относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{f_{n_n}\} \subset \{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \to +\infty$. Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f_{n_n}, u\rangle\}$$

является фундаментальной при любом $u \in \mathbb{B}$. Значит, сходится. Стало быть, найдется некоторый элемент $f \in \mathbb{B}^*$, что

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Заметим, что данное утверждение можно доказать без требования сепарабельности банахова пространства $\mathbb{B}^*$ (см., например, [11]).

Теперь мы можем предъявить достаточные условия $*$—слабой полноты пространства $\mathbb{B}^*$. Именно, справедлива следующая лемма.

Л е м м а 5. *Банахово пространство* $\mathbb{B}^*$ $*$*—слабо полно при условии, что банахово пространство* $\mathbb{B}$ *сепарабельно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — $*$—слабо фундаментальная последовательность, т. е. выполнено предельное равенство

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f_m, u\rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \quad \text{для каждого} \quad u \in \mathbb{B}.$$

Введем обозначение:

$$\mathrm{K}_n \equiv \langle f_n, u\rangle.$$

Тогда мы приходим к выводу, что в силу теоремы о резонансе последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ сильно в $\mathbb{B}^*$ ограничена, т. е.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_* < +\infty.$$

Но тогда в силу теоремы 6 из последовательности $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ можно извлечь $*$—слабо сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Значит, числовая последовательность K_{n_n} сходится:

$$\mathrm{K}_{n_n} \to \langle f, u\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для каждого} \quad u \in \mathbb{B}.$$

Но числовая последовательность $\{\mathrm{K}_n\}$ по исходному предположению фундаментальная, поэтому в силу единственности предела числовых последовательностей имеем

$$\mathrm{K}_n \equiv \langle f_n, u\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для каждого} \quad u \in \mathbb{B}.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Свойство банахова пространства $\mathbb{B}$ быть рефлексивным, конечно, зависит от нормы, относительно которой определено пространство $\mathbb{B}$, а именно свойств *выпуклости* нормы. Введем новые понятия, относящиеся к свойствам выпуклости нормы.

О п р е д е л е н и е 17. *Пусть* $\mathbb{B}$ *— это банахово пространство.*

(i) *Пространство* $\mathbb{B}$ *называется строго выпуклым если*

$$\|u + v\| \neq \|u\| + \|v\| \tag{3.2}$$

для всех линейно независимых элементов $u, v \in \mathbb{B}$;

(ii) *Пространство* $\mathbb{B}$ *называется равномерно выпуклым если для любых двух последовательностей* $\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathbb{B}$ *таких, что* $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$ *и*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n + v_n\| = 2,$$

имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\|u_n - v_n\| = 0. \tag{3.3}$$

Можно дать эквивалентные определения строгой и равномерной выпуклости в терминах «$\varepsilon - \delta$»:

Определение 18. *Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство.*

(i) *Пространство $\mathbb{B}$ называется строго выпуклым, если из неравенств $\|u\| \leqslant 1$ и $\|v\| \leqslant 1$ и $u \neq v$ следует, что*

$$\|u + v\| < 2. \tag{3.4}$$

(ii) *Пространство $\mathbb{B}$ называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ и $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ следует*

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{3.5}$$

Замечание 6. Легко проверить, что необходимое и достаточное условие банахова пространства $\mathbb{B}$ быть строго выпуклым следующее: Для любых $u \neq v$, из условия $\|u\| = \|v\| = 1$ вытекает, что $\|\lambda u + (1-\lambda)v\| < 1$ для всех $\lambda \in (0,1)$. Таким образом, строго выпуклое банахово пространство $\mathbb{B}$ таково, что отрезок соединяющий различные точки $u, v \in \mathbb{B}$ единичной сферы пространства $\mathbb{B}$ лежит целиком (за исключением u и v) внутри сферы.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Равномерно выпуклое банахово пространство является строго выпуклым.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbb{B}$ — это равномерно выпуклое банахово пространство и предположим, что

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|, \quad \text{где} \quad u \neq 0 \quad \text{и} \quad v \neq 0.$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\|u\| \leqslant \|v\|$. Тогда справедлива следующая цепочка соотношений:

$$2 \geqslant \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|\|v\|} \,\|\|v\|(u+v) - (\|v\| - \|u\|)\, v\| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\|u\|\|v\|} \left[\|v\| \left(\|u\| + \|v\|\right) - \left(\|v\| - \|u\|\right) \|v\|\right] = 2,$$

где мы воспользовались неравенством

$$|\|u_1\| - \|u_2\|| \leqslant \|u_1 - u_2\|,$$

которое является следствием неравенства треугольника. Таким образом, получили, что

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| = 2,$$

откуда в силу равномерной выпуклости $\mathbb{B}$ вытекает, что

$$\left\|\frac{u}{\|u\|}-\frac{v}{\|v\|}\right\|=0.$$

Следовательно,

$$\|v\|u=\|u\|v.$$

Значит, элементы u и v линейно зависимы.

Лемма доказана.

Приведем без доказательства следующий важный результат В. Д. Мильмана.

Теорема 8. *Всякое равномерно выпуклое банахово пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно.*

Теперь мы готовы к формулировки и доказательству важного критерия сильной сходимости в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ при условии слабой сходимости. Этот критерий довольно часто используется в приложениях при исследовании слабых решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

Теорема 9. *Если $\mathbb{B}$ — это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n\to+\infty,$$

и

$$\|u_n\|\to\|u\|$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\|=1$ и $\|u_n\|\neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\|=1$ и $v_n\rightharpoonup u$ при $n\to+\infty$. Теперь возьмем $\varepsilon_n=\|v_n-u\|$, тогда по определению 18 найдется такая неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$ и $\delta(0)=0$, что

$$\|v_n+u\|\leqslant 2\left(1-\delta\left(\|v_n-u\|\right)\right). \tag{3.6}$$

Поскольку в силу теоремы Мильмана банахово пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, поэтому имеем

$$\|v_n+u\|=\|v_n+u\|_{**}=\sup_{\|f\|_*=1}|\langle v_n+u,f\rangle_*|= \\ =\sup_{\|f\|_*=1}|\langle f,v_n+u\rangle|\geqslant|\langle f,v_n+u\rangle| \tag{3.7}$$

Переходя к нижнему пределу в неравенстве (3.6) с учетом неравенства (3.7), получим следующее неравенство:

$$2\liminf_{n\to+\infty}(1-\delta(\|v_n-u\|)) \geqslant \liminf_{n\to+\infty}|\langle f, v_n+u\rangle| = 2\,|\langle f, u\rangle|\,, \tag{3.8}$$

поскольку $v_n \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{B}$. Левая часть неравенства (3.8) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, поэтому можно перейти к supremum по всем $f \in \mathbb{B}^* : \|f\|_* = 1$ и получить неравенство

$$2\liminf_{n\to+\infty}(1-\delta(\|v_n-u\|)) \geqslant 2\|u\|_{**} = 2\|u\| = 2.$$

Которое возможно только в том случае, когда

$$\lim_{n\to+\infty}\|v_n-u\| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\|v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n\to+\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \to \|u\| = 1$.

Теорема доказана.

§ 4. Литературные указания

Материал, используемый в этой главе, взят из работ [3], [7], [17], [18], [25], [**?**], [35].