Лекция 8

ПЛОТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Транспонированные операторы

Давайте зададимся следующим вопросом. Пусть у нас имеются два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$, причем $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Что можно сказать о том имеется ли вложение $\mathbb{F}^* \subset \mathbb{E}^*$ соответствующих сопряженных пространств? Действительно, наш вопрос не лишен смысла. Если имеется вложение $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$, то можно предполагать, что функционал непрерывный на $\mathbb{F}$ будет тем более непрерывным на $\mathbb{E}$ и тогда имеет место вложение $\mathbb{F}^* \subset \mathbb{E}^*$. Однако, это предположение, вообще говоря, неверно. Действительно, рассмотрим два конечномерных банаховых пространств $\mathbb{E}_n$ и $\mathbb{E}_m$ размерностей n и m соответственно, где $m > n$, причем $\mathbb{E}_n \subset \mathbb{E}_m$. Для каждого из этих пространств определены сопряженные пространства той же размерности, что и исходные пространства: $\mathbb{E}_n^*$ и $\mathbb{E}_m^*$. Но тогда о вложении $\mathbb{E}_m^* \subset \mathbb{E}_n^*$ не может быть и речи, поскольку $\dim \mathbb{E}_m^* = m > \dim \mathbb{E}_n^* = n$. Поэтому для того чтобы требуемое вложение $\mathbb{F}^* \subset \mathbb{E}^*$ имело место необходимо потребовать, чтобы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ имели одинаковую размерность. Однако, этого тоже не достаточно для бесконечномерных пространств. Для того чтобы решить этот вопрос полностью начнем несколько из далека.

Введем некоторые обозначения. Пусть заданы два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ с нормами

$$\| \quad \|_e \quad \text{и} \quad \| \quad \|_f$$

и с соответствующими сопряженными $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ относительно скобок двойственности:

$$\langle e^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad e^* \in \mathbb{E}^*$$

и

$$\langle f^*, f\rangle_f \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Введем стандартным образом скобки двойственности между парами банаховых пространств $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{E}^{**}$, а также $\mathbb{F}^*$ и $\mathbb{F}^{**}$:

$$\langle e^{**}, e^*\rangle_{e*} \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{E}^* \quad \text{и} \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$$

и
$$\langle f^{**}, f^{*}\rangle_{f*} \quad \text{для всех} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*} \quad \text{и} \quad f^{**} \in \mathbb{F}^{**}.$$

Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{L}\,(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, т. е. линейный оператор непрерывный относительно сильных сходимостей в $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$. Поскольку пространство $\mathbb{F}$ является банаховым, то как хорошо известно из курса функционального анализа пространство $\mathcal{L}\,(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ является также банаховым относительно следующей нормы:
$$\|\mathbb{T}\|_{e\to f} \equiv \sup_{\|e\|_e=1} \|\mathbb{T}e\|_f\,.$$

Заметим, что справедлива следующая лемма:
Лемма 7. *Для произвольного оператора* $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *имеет место неравенство*:
$$\|\mathbb{T}e\|_f \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}\|e\|_e \quad \textit{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Доказательство.

Если $e = \vartheta$ — нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{E}$, то требуемое неравенство очевидно. Предположим теперь, что $e \neq \vartheta$, тогда по определению нормы пространства $\mathcal{L}\,(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ имеем неравенство
$$\|\mathbb{T}e_1\|_f \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f} \quad \text{для всех} \quad e_1 \in \mathbb{E}: \ \|e_1\|_e = 1,$$
в частности, это неравенство выполнено для
$$e_1 = \frac{e}{\|e\|_e}.$$
Отсюда сразу же получаем, что
$$\|\mathbb{T}e\|_f \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}\|e\|_e.$$

Лемма доказана.

Теперь дадим следующее определение:

Определение 21. *Оператором, транспонированным к* $\mathbb{T}$, *называется оператор*
$$\mathbb{T}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*, \tag{1.1}$$
определяемый следующим образом:
$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e\right\rangle_e \equiv \langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f\,. \tag{1.2}$$

Отметим, что определение 21 имеет место, поскольку для каждого $f^* \in \mathbb{F}^*$ имеем $\mathbb{T}^t f^* \in \mathbb{E}^*$. Действительно, пусть $f^* \in \mathbb{F}^*$ — это некоторый фиксированный элемент, тогда докажем, что $\mathbb{T}^t f^*$ является линейным функционалом на $\mathbb{E}$. Это утверждение есть следствие несложной цепочки равенств. Во-первых, $\mathbb{T}^t f^*$ — это функционал на $\mathbb{E}$, поскольку
$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e\right\rangle_e \equiv \langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f \in \mathbb{R}^1.$$

Во-вторых, имеют место равенства
$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\right\rangle_e \equiv \langle f^*, \mathbb{T}\,(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\rangle_f =$$

$$= \langle f^*, \alpha_1 \mathbb{T} e_1 \rangle_f + \langle f^*, \alpha_2 \mathbb{T} e_2 \rangle_f = \alpha_1 \langle f^*, \mathbb{T} e_1 \rangle_f + \alpha_2 \langle f^*, \mathbb{T} e_2 \rangle_f =$$
$$= \alpha_1 \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e_1 \right\rangle_e + \alpha_2 \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e_2 \right\rangle_e \quad \text{для всех} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1, \quad e_1, e_2 \in \mathbb{E}.$$

из которых следует, что $\mathbb{T}^t f^*$ есть линейный функционал. Теперь докажем, что этот функционал непрерывный. Действительно, пусть $e_n \to e$ сильно в $\mathbb{E}$, тогда в силу лемм 1 и 10 имеем

$$\left|\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e_n - e \right\rangle_e\right| = \left|\langle f^*, \mathbb{T}(e_n - e)\rangle_f\right| \leqslant \|f^*\|_{f*} \|\mathbb{T}(e_n - e)\|_f \leqslant$$
$$\leqslant \|f^*\|_{f*} \|\mathbb{T}\|_{e \to f} \|e_n - e\|_e \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где $\|f^*\|_{f*}$ — сопряженная норма в пространстве $\mathbb{F}^*$, порожденная нормой $\| \quad \|_f$:

$$\|f^*\|_{f*} = \sup_{\|f\|_f = 1} |\langle f^*, f \rangle_f| .$$

Тем самым, мы доказали, что $\mathbb{T}^t f^* \in \mathbb{E}^*$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 10. *Если* $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, *то* $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$. *Причем*

$$\|\mathbb{T}\|_{e \to f} = \|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*}.$$

Доказательство.

Прежде всего опишем как определяется норма в, очевидно, банаховом пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$. Действительно, имеем

$$\|\mathbb{A}\|_{f^* \to e^*} \equiv \sup_{\|f^*\|_{f*} = 1} \|\mathbb{A} f^*\|_{e*},$$

где нормы в сопряженных пространствах $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ определяются стандартным образом, т. е.

$$\|e^*\|_{e*} \equiv \sup_{\|e\|_e = 1} |\langle e^*, e \rangle_e| \quad \text{и} \quad \|f^*\|_{f*} \equiv \sup_{\|f\|_f = 1} |\langle f^*, f \rangle_f| .$$

Докажем сначала линейность оператора $\mathbb{T}^t$. Действительно, имеем следующую цепочку равенств

$$\left\langle \mathbb{T}^t \left(\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*\right), e \right\rangle_e \equiv \langle (\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*), \mathbb{T} e \rangle_f =$$
$$= \alpha_1 \langle f_1, \mathbb{T} e \rangle_f + \alpha_2 \langle f_2, \mathbb{T} e \rangle_f = \alpha_1 \left\langle \mathbb{T}^t f_1, e \right\rangle_e + \alpha_2 \left\langle \mathbb{T}^t f_2, e \right\rangle_e =$$
$$= \left\langle \alpha_1 \mathbb{T}^t f_1 + \alpha_2 \mathbb{T}^t f_2, e \right\rangle_e , \quad \text{для всех} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad f_1, f_2 \in \mathbb{F}.$$

Докажем теперь ограниченность оператора $\mathbb{T}^t$. Действительно, в силу лемм 1 и 10 имеем

$$\left|\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e\right| = \left|\langle f^*, \mathbb{T} e \rangle_f\right| \leqslant \|f^*\|_{f*} \|\mathbb{T} e\|_f \leqslant \|f^*\|_{f*} \|\mathbb{T}\|_{e \to f} \|e\|_e. \tag{1.3}$$

Теперь из определения нормы в банаховом пространстве следует, что

$$\|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*} \equiv \sup_{\|f^*\|_{f*} = 1} \|\mathbb{T}^t f^*\|_{e*} = \sup_{\|f^*\|_{f*} = 1} \sup_{\|e\|_e = 1} \left|\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e\right| . \tag{1.4}$$

Без ограничения общности можно считать, что в неравенстве (1.3) $f^* \neq \vartheta$ и $e \neq \vartheta$. Тогда из (1.3) получим неравенство

$$\left| \left\langle \mathbb{T}^t \frac{f^*}{\|f^*\|_{f*}}, \frac{e}{\|e\|_e} \right\rangle_e \right| \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e \to f}.$$

Отсюда и из (1.4) вытекает неравенство

$$\|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*} \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e \to f}. \tag{1.5}$$

Отсюда вытекает ограниченность оператора $\mathbb{T}^t$. Стало быть, $\mathbb{T}^t \in \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$. Докажем теперь, что имеет место неравенство

$$\|\mathbb{T}\|_{e \to f} \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*}. \tag{1.6}$$

Действительно, поскольку $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$, то в силу лемм 1 и 10 имеет место цепочка выражений

$$\left| \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \right| = \left| \langle \mathbb{T}^t f^*, e \rangle_e \right| \leqslant \|\mathbb{T}^t f^*\|_{e*} \|e\|_e \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*} \|f^*\|_{f*} \|e\|_e. \tag{1.7}$$

Теперь по определению нормы в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ и с учетом того факта, что

$$\forall f \in \mathbb{F} \quad \|f\|_f = \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} |\langle f^*, f \rangle|$$

(он следует из теоремы Хана — Банаха), имеем цепочку равенств

$$\|\mathbb{T}\|_{e \to f} \equiv \sup_{\|e\|_e=1} \|\mathbb{T}e\|_f = \sup_{\|e\|_e=1} \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \left| \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \right|. \tag{1.8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $e \neq \vartheta$ и $f^* \neq \vartheta$. Тогда из (1.7) получим неравенство

$$\left| \left\langle \frac{f^*}{\|f^*\|_{f*}}, \mathbb{T} \frac{e}{\|e\|_e} \right\rangle_f \right| \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*}.$$

Отсюда и из равенства (1.8) получим неравенство (1.6), из которого и из (1.5) получаем второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии одно важное свойство оператора $\mathbb{T}^t$, которое следует из условия инъективности оператора $\mathbb{T}$. Для начала рассмотрим, что будет с оператором $\mathbb{T}^t$ в том случае, когда оператор $\mathbb{T}$ не является инъективным. Действительно, по определению инъективности линейный оператор $\mathbb{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ является инъективным, если из условия $\mathbb{T}e = 0$ вытекает, что $e = \vartheta$. Так что оператор $\mathbb{T}$ является не инъективным в том случае, если существует такой элемент $\overline{e} \neq \vartheta$, что $\mathbb{T}\overline{e} = \vartheta$. По определению оператора $\mathbb{T}^t$ имеет место равенство

$$\langle \mathbb{T}^t f^*, \overline{e} \rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}\overline{e} \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{1.9}$$

Но это означает, что образ $\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*$ в $\mathbb{E}^*$ ортогонален элементу $\overline{e} \in \mathbb{E}$ в смысле следующего определения:

Определение 22. *Множество* $\mathrm{A}^* \subset \mathbb{E}^*$ *называется ортогональным ко множеству* $\mathrm{A} \subset \mathbb{E}$ *относительно скобок двойственности между этими банаховыми пространствами, если*

$$\langle a^*, a\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathrm{A} \quad \textit{и} \quad a^* \in \mathrm{A}^*.$$

Теперь напомним определение плотности одного множества банахова пространства в другом множестве того же пространства.

Определение 23. *Подмножество* $\mathrm{A} \subset \mathbb{B}$ *банахова пространства* $\mathbb{B}$ *называется плотным во множестве* $\mathrm{B} \subset \mathbb{B}$, *если замыкание* $\overline{\mathrm{A}}$ *совпадает с* B.

Пусть теперь последовательность $\{f_n^*\} \subset \mathbb{F}^*$ такова, что $\{T^t f_n^*\} \subset \subset \mathbb{E}^*$ — это сильно сходящаяся к некоторому элементу $e^* \in \mathbb{E}^*$ последовательность, т.е.

$$\|T^t f_n^* - e^*\|_{e*} = \sup_{\|e\|_e=1} \left|\langle T^t f_n^* - e^*, e\rangle_e\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда из равенства (1.9) получим, что

$$0 = \langle f_n^*, \mathbb{T}\overline{e}\rangle_f = \left\langle \mathbb{T}^t f_n^*, \overline{e}\right\rangle_e \to \langle e^*, \overline{e}\rangle_e = 0.$$

Тем самым мы получаем, что замыкание множества $\{\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*\}$ ортогонально ненулевому элементу $\overline{e}$ пространства $\mathbb{E}$ и поэтому не совпадает с $\mathbb{E}^*$, т. е. множество $\{\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*\}$ не плотно в $\mathbb{E}^*$. Заметим, что имеет место противоположное утверждение: если множество $\{\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*\}$ плотно в $\mathbb{E}^*$, то оператор $\mathbb{T}$ инъективен. Действительно, пусть

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e\right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*,$$

следовательно, в силу плотности множества $\{\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*\}$ в $\mathbb{E}^*$ получаем, что $e = \vartheta$. С другой стороны, имеем

$$\langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Стало быть, $\mathbb{T}e = \vartheta$. Значит, приходим к выводу, что из условия $\mathbb{T}e = \vartheta$ вытекает $e = \vartheta$.

Теперь рассмотрим частный случай операторов из банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, а именно линейный, непрерывный и инъективный оператор *топологического вложения* $\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. Во-первых, этот оператор линейный, т. е.

$$\mathbb{J}_{ef}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 \mathbb{J}_{ef} e_1 + \alpha_2 \mathbb{J}_{ef} e_2 \;\forall\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ и } e_1, e_2 \in \mathbb{E}.$$

Во-вторых, этот оператор непрерывный, т. е. в силу линейности — ограниченный

$$\|\mathbb{J}_{ef} e\|_f \leqslant c_1 \|e\|_e.$$

Довольно часто, когда это не вызывает недоразумений, мы не пишем оператор $\mathbb{J}_{ef}$, а используем знак «$\subset$»: $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Этот знак означает, что мы отождествили пространство $\mathbb{E}$ со множеством $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$, для которого этот знак имеет естественный смысл: $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Иногда, когда мы имеем дело с теоретико–множественным вложением, т.е. когда $\mathbb{J}_{ef}e = e$ этот знак однозначно отражает ситуацию. В том случае если банахово пространство $\mathbb{E}$ вложено в банахово пространство $\mathbb{F}$ не просто непрерывно и инъективно, но и плотно, тогда эту ситуацию будем обозначать символом

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Теперь сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема 11. *Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{T}^t$ — *является инъективным;*

(ii) $\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow \mathbb{T}$ — *является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что $\mathbb{E}$ рефлексивно.*

Доказательство.

(i). Итак, пусть $\mathbb{T}^t f^* = 0$, тогда для всех $e \in \mathbb{E}$ имеем равенства

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f ,$$

но тогда в силу плотности $\mathbb{TE}$ в $\mathbb{F}$ получаем, что единственным продолжением функционала f^* ортогонального $\mathbb{TE}$ является функционал ортогональный всему пространству $\mathbb{F}$, стало быть, $f^* = \vartheta$. Докажем теперь утверждение в другую сторону. Пусть $\mathbb{T}^t$ инъективен. Докажем, что если $f^* \in \mathbb{F}^*$ есть нуль на $\mathbb{TE}$, то f^* есть нуль на $\mathbb{F}$ откуда и следует в силу теоремы Хана–Банаха плотность множества $\mathbb{TE}$ в $\mathbb{F}$. Действительно, равенство

$$\langle f^*, f \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{TE}$$

эквивалентно равенству

$$\langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Но последнее равенство равно в силу определения $\mathbb{T}^t$ равно

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Отсюда сразу же получаем, что $\mathbb{T}^t f^* = \vartheta$. Откуда в силу инъективности $\mathbb{T}^t$ приходим к выводу, что $f^* = \vartheta$. Значит,

$$\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

(ii). Итак, пусть

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*$$

и $\mathbb{T}e = 0$. Тогда из равенства

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*$$

получаем, что $e \in \mathbb{E}$ ортогонально всему пространству $\mathbb{E}^*$, а значит, $e = \vartheta$.

Пусть теперь $\mathbb{T}$ является инъективным. Попробуем доказать требуемое утверждение как и на шаге (i). Итак, надо доказать, что функционал $e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$ равный нулю на $\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*$ равен нулю и на всем $\mathbb{E}^*$, откуда в силу теоремы Хана–Банаха получим требуемый результат. Пусть имеет место равенство

$$\langle e^{**}, e^* \rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{T}^t\mathbb{F}^*,$$

которое эквивалентно

$$\left\langle e^{**}, \mathbb{T}^t f^* \right\rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Но последнее выражение равно

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^* \right\rangle_{f*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*,$$

где $\mathbb{T}^{tt}$ — есть транспонированный к $\mathbb{T}^t$. Из последнего равенства сразу же получаем, что

$$\mathbb{T}^{tt} e^{**} = \vartheta.$$

И тут мы сталкиваемся с трудностью: **из инъективности оператора $\mathbb{T}$, вообще говоря, не следует инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$.** Поэтому нужно изучить явное представление оператора $\mathbb{T}^{tt}$ через оператор $\mathbb{T}$.

Рассмотрим транспонированный оператор $\mathbb{T}^{tt}$ к оператору $\mathbb{T}^t$. Действительно, по определению имеем

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^* \right\rangle_{f*} = \left\langle e^{**}, \mathbb{T}^t f^* \right\rangle_{e*} \quad \forall \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{1.10}$$

С учетом того, что имеет изометрически изоморфные вложения

$$\mathbb{J}_e : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad \mathbb{J}_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^{**}$$

мы можем переписать (1.10) в следующем виде

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} \mathbb{J}_e e, f^* \right\rangle_{f*} = \left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^t f^* \right\rangle_{e*}. \tag{1.11}$$

С другой стороны, имеем равенства

$$\left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^t f^* \right\rangle_{e*} = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T} e \rangle_f = \langle \mathbb{J}_f \mathbb{T} e, f^* \rangle_{f*}$$

Отсюда и из (1.11) получим равенство

$$\mathbb{T}^{tt} \mathbb{J}_e = \mathbb{J}_f \mathbb{T}.$$

В силу рефлексивности пространства $\mathbb{E}$ существует обратный оператор $\mathbb{J}_e^{-1}$ и поэтому получаем равнство

$$\mathbb{T}^{tt} = \mathbb{J}_f \mathbb{T} \mathbb{J}_e^{-1}.$$

Отсюда из инъективности $\mathbb{T}$ вытекает инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$, а стало быть, получаем, что

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$

Теорема доказана.

§ 2. Плотные вложения банаховых пространств

Теперь достаточно применить общий результат теоремы 15 к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

и транспонированного оператора

$$\mathbb{J}_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*.$$

И, тем самым, получить следующий весьма полезный результат в приложениях к изучению слабых решений краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных.

Теорема 12. *Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{J}_{ef}^t$ — *является инъективным;*

(ii) $\mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow \mathbb{J}_{ef}$ — *является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что $\mathbb{E}$ рефлексивно.*

Следствие 1. *В случае рефлексивного банахова пространства $\mathbb{E}$ условие $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$ эквивалентно условию $\mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*$.*

В заключение отметим, что можно привести контрпример, когда $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ и $\mathbb{E}$ нерефлексивно и нет плотного вложения $\mathbb{F}^*$ в $\mathbb{E}^*$ (см. [3]).

Теперь давайте рассмотрим ситуацию довольно часто возникающую в приложениях. Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ два банаховых пространства и $\mathbb{E}$ рефлексивно, причем $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$, т. е. существует такой линейный, инъективный и непрерывный оператор вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F},$$

причем $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$ плотно в $\mathbb{F}$. Таким образом, каждому элементу $u \in \mathbb{E}$ сопоставляется некоторый элемент $v = \mathbb{J}_{ef}u$. С другой стороны, для оператора $\mathbb{J}_{ef}$ определен транспонированный оператор

$$\mathbb{J}_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*,$$

причем в силу теоремы 16 оператор $\mathbb{J}_{ef}^t$ является линейным, непрерывным, инъективным, причем $\mathbb{J}_{ef}^t\mathbb{F}^*$ плотно в $\mathbb{E}^*$. Таким образом, каждому элементу $f \in \mathbb{F}^*$ соответствует некоторый элемент $\mathbb{J}_{ef}^t f \in \mathbb{E}^*$. По определению транспонированного оператора выполнено равенство:

$$\left\langle \mathbb{J}_{ef}^t f, u \right\rangle_e = \langle f, \mathbb{J}_{ef}u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{2.1}$$

Однако, если мы отождествим $\mathbb{E}$ с его образом в $\mathbb{F}$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$, а $\mathbb{F}^*$ отождествим с его образом в $\mathbb{E}^*$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}^t\mathbb{F}^*$, тогда (2.1) можно переписать в более простом виде, как это всегда и делается:

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*, \tag{2.2}$$

причем в силу условий и теоремы 16 имеют место плотные вложения

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*. \tag{2.3}$$

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема 13. *Пусть банахово пространство $\mathbb{E}$ непрерывно и плотно вложено в банахово пространство $\mathbb{F}$, тогда имеет место равенство*

$$\langle f, u\rangle_e = \langle f, u\rangle_f \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \textit{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{2.4}$$

Замечание 11. В частном случае, когда $\mathbb{E}$ рефлексивно и $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ — некоторое вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и мы согласно теореме Рисса отождествили $\mathbb{H}$ с его сопряженным $\mathbb{H}^*$, то из (2.2) и (2.3) мы получим следующие соотношения

$$\langle f, u\rangle_e = (f, u) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{H},$$

причем

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{H} \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$

§ 3. Литературные указания

Материал, используемый в этой главе, взят из работ [3], [7], [17], [18], [25], [**?**], [35].