Лекция 9

ВЕКТОРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Введение

В этой лекции мы рассмотрим общее определение векторного топологического пространства, а также пространства линейных непрерывных функционалов над ним. Для понимания этой лекции достаточно владеть основами курсов «Линейная алгебра» и «Вещественный анализ», а также элементами теории топологических пространств (см., напр., книгу Колмогорова и Фомина).

§ 2. Определение ВТП

Итак, начнем со следующего определения.

Определение 1. *Векторное пространство X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, на котором задана топология τ называется векторным топологическим пространствам (X,τ), если операции сложения элементов и умножения на число являются непрерывными отображениями из (X,τ) в (X,τ).*

Давайте повнимательнее посмотрим на это определение. Требует расшифровки непрерывность отображения

$$F_1(x,y) : (X,\tau) \otimes (X,\tau) \to (X,\tau), \tag{2.1}$$

задаваемое как $F_1(x,y) = x + y$, а также непрерывность отображения

$$F_2(\lambda, x) : \mathbb{C}^1 \otimes (X,\tau) \to (X,\tau), \tag{2.2}$$

задаваемое как $F_2(\lambda,x) = \lambda \cdot x$. Итак, непрерывность $F_1(x,y)$ означает, что для всякой окрестности V_{x+y} точки $x+y$ найдутся такие окрестности U_x и U_y, что $F_1(U_x,U_y) = U_x + U_y \subset V_{x+y}$. Непрерывность отображения $F_2(\lambda,x)$ означает, что для любой окрестности точки $V_{\lambda x}$ найдутся такие окрестности $U_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}$ и U_x точек λ и x соответственно, что $F_2(U_\lambda, U_x) = \mu U_x \subset V_{\lambda\cdot x}$ при всех $\mu \in U_\lambda$.

Теперь мы дадим ряд нужных нам в дальнейшем определений.

Определение 1. *Выпуклым множеством E в векторном пространстве X называется такое множество, что для всех пар точек $x,y \in E$ и для всякого $\lambda \in [0,1]$ имеем $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$.*

Определение 2. *Множество E в векторном пространстве X называется уравновешенным, если для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \leqslant 1$ имеем $\lambda E \subset E$.*

Определение 3. *Множество E в векторном топологическом пространстве (X, τ) называется ограниченным, если для всякой окрестности нуля U_ϑ найдется такое $s > 0$, что $E \subset tU_\vartheta$ при $t > s$.*

Определение 4. *Множество E в векторном топологическом пространстве (X, τ) называется поглощающим, если для всякой точки $x \in X$ найдется такое $t = t(x) > 0$, что $x \in t \cdot E$.*

Определение 5. *Выпуклое и уравновешенное множество E векторного топологического пространства (X, τ) называется абсолютно выпуклым.*

Теперь мы введем отображения сдвига и умножения на комплексное число и докажем, что эти отображения являются гомеоморфизмами, т. е. взаимно однозначными и взаимно непрерывными отображениями. Итак, введем следующие отображения:

$$\mathrm{T}_a(x) = a + x \quad \text{для всех} \quad a, x \in X, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{M}_\lambda(x) = \lambda \cdot x \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in X. \tag{2.4}$$

Совершенно понятно, что обратными отображениями к этим двум отображениям являются соответственно следующие:

$$\mathrm{T}_{-a}(x) = -a + x \quad \text{для всех} \quad a, x \in X, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{M}_{\lambda^{-1}}(x) = \lambda^{-1} \cdot x \quad \text{для всех} \quad \lambda \neq \vartheta, \quad x \in X. \tag{2.6}$$

Причем в силу определения векторного топологического пространства все эти четыре отображения (2.3)–(2.6) являются непрерывными. Значит, отображения $\mathrm{T}_a(x)$ и $\mathrm{M}_\lambda(x)$ при $\lambda \neq \vartheta$ являются гомеоморфизмами. Докажем, что отсюда вытекает важное свойство инвариантности топологии τ векторного топологического пространства относительно сдвигов. Действительно, пусть $\mathfrak{B}_\vartheta$ — это базис окрестностей нейтрального элемента ϑ линейного пространства X. Тогда всякая окрестность U_a точки $a \in X$ может быть представлена в виде $a + U_\vartheta$, где $U_\vartheta \in \mathfrak{B}_\vartheta$. Таким образом, нам достаточно задать базис окрестностей нуля векторного топологического пространства, чтобы получить базис окрестностей в любой другой точке и тем самым согласно теореме 1 из предыдущей лекции получить топологию всего векторного топологического пространства, эквивалентную исходной. В дальнейшем мы постоянно будем пользоваться этим свойством векторных топологических пространств.

§ 3. Сопряженные к ВТП

Итак, пусть у нас задано некоторое векторное топологическое пространство (X, τ). Поскольку по условию пространство X — это линейное пространство (вообще говоря, на полем $\mathbb{C}$), то над этим пространством однозначно определено пространство $X^{\#}$ линейных функционалов. Однако, это слишком широкое пространство в приложениях. Поэтому обычно из пространство $X^{\#}$ выделяют его подпространство, состоящее из непрерывных в топологии τ векторного топологического пространства (X, τ) линейных функционалов из $X^{\#}$. Напомним, что это означает. Действительно, пусть $f \in X^{\#}$, тогда его непрерывность в точке $x \in X$ определяется следующим образом: *для всякой окрестности* $U(f(x)) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - f(x)| < \varepsilon\}$ *найдется такая окрестность* $U(x)$ *точки* $x \in X$, *что имеет место вложение* $f(U(x)) \subset U(f(x))$. *При этом линейный функционал* $f(x)$ *должен быть непрерывен в каждой точке векторного топологического пространства* (X, τ). Дадим определение.

Определение 6. *Множество всех линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством* (X, τ) *называется сопряженным пространством и обозначается как* X^*.

Ясно, что сопряженное пространство X^* является линейным пространством относительно стандартных операций сложения и умножения на комплексное число. Причем согласно второму параграфу третьей лекции действие элемента $f \in X^*$ на элементе $x \in X$ мы пишем как

$$\langle f, x \rangle.$$

Топологию векторного топологического пространства (X, τ) можно задавать различными способами, но нас будет интересовать один частный, но важный случай, когда топология задается при помощи *полунорм*.

§ 4. Полунормы и локально выпуклые пространства

Прежде всего дадим определение полунормы.

Определение 7. *Вещественная функция* $p(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$, *определенная на векторном пространстве* X *называется полунормой, если выполнены следующие два свойства*:

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и всех* $x \in X$;

(ii) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* $x, y \in X$.

Из самого названия «полунорма» следует, что это «недонорма». И действительно, в отличие от нормы из условия $p(x) = 0$, вообще говоря, не вытекает, что $x = \vartheta$, хотя, конечно, в силу свойства (i), в котором надо положить $\lambda = 0$, вытекает, что $p(\vartheta) = 0$. Приведем примеры полунорм. Рассмотрим следующую вещественную функцию на линейном пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0, 1])$:

$$p(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f^{'}(x)|.$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет всем условиям полунормы. Однако, из условия, что $p(f) = 0$ вытекает всего лишь на всего, что $f(x) =$

$= constant$. Теперь рассмотрим один очень важный для нас пример полунормы — *функционал Минковского*, который определяется для каждого абсолютно выпуклого и поглощающего множества $\mathrm{A} \in X$ векторного топологического пространства (X, τ). Дадим определение.

Определение 8. *Функционалом Минковского* $p_{\mathrm{A}}(x)$ *абсолютно выпуклого и поглощающего множества* $\mathrm{A} \subset X$ *векторного топологического пространства* (X, τ) *называется следующая функция*:

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}^1_+ : x \in \lambda \cdot \mathrm{A}\right\}. \tag{4.1}$$

Итак, докажем, что функционал Минковского абсолютно выпуклого поглощающего множества является полунормой. Действительно, поскольку A — это поглощающее множество, то функционал Минковского $p_{\mathrm{A}}(x)$ конечен для любого $x \in \mathrm{X}$. Его неорицательность очевидна.

Докажем теперь свойство (i). Действительно, пусть $\alpha > 0$, тогда имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{A}}(\alpha x) &= \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A}\} = \\ &= \alpha \inf\left\{\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} = \alpha \inf\left\{\overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda}\mathrm{A}\right\} = \\ &= \alpha p_{\mathrm{A}}(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 0$. Действительно, в этом случае справедливы аналогичные соотношения в силу уравновешенности множества A

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{A}}(\alpha x) &= \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A}\} = \\ &= -\alpha \inf\left\{-\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ -x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} = \\ &= -\alpha \inf\left\{-\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} = \\ &= -\alpha \inf\left\{\overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda}\mathrm{A}\right\} = -\alpha p_{\mathrm{A}}(x). \end{aligned}$$

Случай $\alpha = 0$ очевиден.

Докажем теперь справедливость свойства (ii). Действительно, имеет место следующие рассуждения. Пусть $x, y \in \mathrm{X}$, тогда выберем числа a и b следующим образом:

$$p_{\mathrm{A}}(x) < a < p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon, \quad p_{\mathrm{A}}(y) < b < p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{4.2}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{x}{a}, \ \frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

Действительно, по определению чисел a, b имеем

$$1 > p_{\mathrm{A}}\left(\frac{x}{a}\right) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \frac{x}{a} \in \lambda \mathrm{A}\right\},$$

значит при некотором $\lambda \in (0, 1)$ имеет место вложение

$$\frac{x}{a} \in \lambda \mathrm{A} \subset \mathrm{A}$$

в силу уравновешенностью множества A. Аналогично доказывается, что
$$\frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$
Но множество A выпуклое поэтому оно вместе с точками
$$\frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y}{b}$$
содержит и отрезок их соединяющий, т.е., в частности, точку
$$\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} \in \mathrm{A}. \tag{4.3}$$
Значит, в силу определения функционала Минковского имеем
$$p_{\mathrm{A}}(x+y) = \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x+y \in \lambda \mathrm{A}\},$$
откуда и из (4.3) получаем, что $\lambda \leqslant a+b$. Стало быть, отсюда и из (4.2) имеем неравенство
$$p_{\mathrm{A}}(x+y) \leqslant a+b = p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon + p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon.$$
Стало быть, из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает свойство (ii) полунормы. Значит, мы доказали, что $p_{\mathrm{A}}(x)$ — это полунорма.

Отсюда вытекает следующая важная теорема.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$ — это полунорма на векторном топологическом пространстве (X, τ), тогда следующие множества являются абсолютно выпуклыми и поглощающими*:
$$\mathrm{A} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \ p(x) < \alpha\} \quad \text{и} \quad \mathrm{B} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \ p(x) \leqslant \alpha\}.$$
Обратно, пусть $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ — это абсолютно выпуклое и поглощающее множество, тогда **функционал Минковского** *этого множества, т. е.*
$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda \mathrm{A}\}$$
является полунормой на X. Более того, имеем
$$\{x : \ p_{\mathrm{A}}(x) < 1\} \subset \mathrm{A} \subset \{x : \ p_{\mathrm{A}}(x) \leqslant 1\}.$$

Доказательство.

Докажем первую часть теоремы. Действительно, рассмотрим, например, множество A. Проверим его выпуклость: пусть $x, y \in \mathrm{A}$, тогда в силу свойства (i) имеет место следующее неравенство:
$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$
Уравновешенность этого множества следует из свойства (ii). Действительно, имеем
$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leqslant p(x) < \alpha.$$

Таким образом, приходим к выводу, что A абсолютно выпуклое множество. Докажем теперь, что это множество является поглощающим. Действительно, пусть $y \in \mathrm{X}$. Введем обозначение

$$\lambda(y) \equiv \frac{p(y)}{\alpha},$$

тогда получим, что для всех $\lambda > \lambda(y)$ имеют место неравенства

$$p(y) < \lambda\alpha, \quad p\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \alpha,$$

значит,

$$\frac{y}{\lambda} \in \mathrm{A} \Rightarrow y \in \lambda\mathrm{A}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для множества B.

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Действительно, пусть

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\} < 1,$$

значит, $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0, 1)$, тогда из уравновешенности множества A получаем

$$x \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A}.$$

Стало быть, первое вложение доказано. Пусть теперь $x \in \mathrm{A}$. Тогда имеем $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0, 1]$. Значит,

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\} \leqslant 1.$$

Теорема доказана.

В связи с этим введем новое понятие *локально выпуклого пространства*. Дадим определение.

Определение 9. *Векторное топологическое пространство (X, τ) называется локально выпуклым, если его базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ может быть выбран, состоящим из выпуклых множеств.*

Важным свойством локально выпуклого векторного топологического пространства есть то, что базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ может быть выбран, состоящим из абсолютно выпуклых и поглощающих множеств!!!

Теперь мы рассмотрим способ построения топологии локально выпуклого пространства при помощи семейства полунорм. Действительно, пусть X — это векторное пространство над полем комплексных чисел. Пусть нам задана система полунорм P, заданных на этом линейном пространстве. Зададим базис окрестностей нуля искомой локально выпуклой топологии τ следующим образом. Действительно, пусть теперь у нас имеется произвольное векторное пространство X над полем $\mathbb{C}$, на котором задана система полунорм $p \in \mathrm{P}(X)$. Тогда мы можем задать топологию окрестностей нуля $\vartheta \in \mathrm{X}$ следующим явным образом:

$$V(p,n) = \left\{x : \; p(x) < \frac{1}{n}\right\} \quad \text{при} \quad p \in \mathrm{P}(X) \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Действительно, $\vartheta \in V(p,n)$, поскольку $p(\vartheta) = 0$. Базис топологии окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ определим как всевозможные **конечные** пересечения

$$\bigcap_{p\in\{p_1,p_2,\ldots,p_m\},\; n\in\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}} V(p,n)$$

Заметим, что построенные окрестности нуля $V(p,n)$ являются *выпуклыми множествами*, т. е.

$$tV(p,n) + (1-t)V(p,n) \subset V(p,n) \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

Действительно, в силу свойств (i)–(ii) полунормы имеет место неравенство

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < \frac{t}{n} + \frac{1-t}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall\, x, y \in V(p,n).$$

Кроме того, окрестности $V(p,n)$ являются *уравновешенными множествами*, т. е. $\alpha V(p,n) \subset V(p,n)$ при $|\alpha| \leqslant 1$. Это также следствие свойства (ii) полунормы. Действительно, имеем при $0 < |\alpha| \leqslant 1$

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < \frac{|\alpha|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для всех} \quad x \in V(p,n).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве X, непрерывна в топологии τ тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле. Функционал Минковского $p_U(x)$ абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in X$ является непрерывным в топологии τ тогда и только тогда, когда U — окрестность нуля.*

Доказательство.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле векторного топологического пространства (X, τ), тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $U_\varepsilon \in \tau$, что $\vartheta \in U_\varepsilon$ и имеет место неравенство

$$p(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon \backslash \{\vartheta\}.$$

В силу неравенства треугольника (ii) в определении полунормы для произвольного $a \in \mathrm{X}$ имеем неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x-a).$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ взяв указанное U_ε, получим неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x-a) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in a + U_\varepsilon \backslash \{\vartheta\},$$

т. е. $p(x)$ непрерывна в произвольной точке $a \in X$.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть $U \in X$ — абсолютно выпуклая, поглощающая окрестность нуля. Рассмотрим соответствующий функционал Минковского

$$p_U(x) \equiv \inf\{\lambda: \ \lambda > 0, \ x \in \lambda U\}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ при $x \in \varepsilon U \equiv U_\varepsilon$ имеем $\lambda \leqslant \varepsilon$ и, значит,

$$p_U(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon \backslash \{\vartheta\},$$

т. е. функционал Минковского $p_U(x)$ непрерывен в нуле и из предыдущего утверждения — на всем X.

Докажем обратное утверждение. Действительно, пусть функционал Минковского абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in \mathrm{X}$ непрерывен в нуле, тогда множество

$$V \equiv \{x: \ p_U(x) < 1\}$$

открыто (т. е. принадлежит τ) как прообраз открытого множества $(0,1)$ и содержит $\vartheta \in \mathrm{X}$, и содержится во множестве U. Значит, U — окрестность нуля.

Теорема доказана.

Имеет место следующее важное утверждение, вытекающее из этой теоремы и которое мы приведем без доказательств.

Лемма 1. *Пусть $p(x)$ — это полунорма, определенная на векторном топологическом пространстве (X, τ), тогда если множество $\mathrm{A}_p \equiv \{x: \ p(x) < 1\}$ содержит открытое множество $\Theta \in \tau$ либо множество $\mathrm{B}_p \equiv \{x: \ p(x) \leqslant 1\}$ содержит открытое множество $\Theta \in \tau$, то $p(x)$ непрерывна в топологии τ.*

Теперь докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве (X, τ), непрерывна в топологии τ, порожденной счетным семейством полунорм P, тогда и только тогда, когда найдется конечное семейство полунорм $p_i(x)$ из P при $i = \overline{1, n}$ и постоянная $\beta > 0$, что имеет место следующее неравенство*:

$$p(x) \leqslant \beta \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x). \tag{4.5}$$

Доказательство.

Докажем сначала достаточность условия (4.5). Пусть для полунормы $p(x)$ выполнено неравенство (4.5) при некотором конечном семействе полунорм $\{p_i(x)\} \subset \mathrm{P}$. Поскольку топология τ порождена счетным семейством полунорм P, то множества

$$\{x: \ p_i(x) < 1\} \in \tau \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n},$$

т. е. открыты, значит, в силу леммы 1 полунормы $p_i(x)$ непрерывны в топологии τ. Из неравенства (4.5) вытекает непрерывность полунормы $p(x)$ в нуле и, следовательно, — на всем пространстве X.

Докажем теперь необходимость условия (4.5). Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле пространства X. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$ и конечный набор полунорм $\{p_i(x)\} \subset \mathrm{P}$, что для всех x из X, удовлетворяющих условию

$$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) \leqslant \delta$$

выполняется неравенство

$$p(x) \leqslant \varepsilon.$$

Выберем теперь число $\lambda > 0$ таким образом, чтобы

$$\lambda \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) \leqslant \delta,$$

тогда

$$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(\lambda x) \leqslant \delta.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$p(\lambda x) \leqslant \varepsilon. \tag{4.6}$$

Выберем теперь постоянную λ как

$$\lambda = \frac{\delta}{\max\limits_{i=\overline{1,n}} p_i(x)}.$$

Тогда из неравенства (4.6) вытекает неравенство

$$p(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x).$$

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ на векторном пространстве X порождает локально выпуклое векторное топологическое пространство (X, τ).*

Доказательство.

Действительно, топология τ порождается единственным образом как все возможные сдвиги базы окрестностей нуля:

$$\Big\{ x + V \Big| \, V \in \mathfrak{B}_\vartheta \Big\}.$$

Именно, будем считать, что $U \in \tau$, если U можно представить в виде объединения сдвигов некоторых множеств из $\mathfrak{B}_\vartheta$. Очевидно, что так определенная топология τ инвариантна относительно сдвигов.

Можно доказать непрерывность сложения векторов и непрерывность умножения числа на вектор относительно введенной топологии.

Построенная топология является локально выпуклой в силу утверждения теоремы 1.

Теорема доказана.

Таким образом, мы нашли рецепт построения из линейного пространства X локально выпуклого векторного топологического пространства, который мы и будем использовать при построении пространств *основных функций*. Заметим, что векторное топологическое пространство при нашем его определении не является автоматически хаусдорфовым. Поэтому в дальнейшем мы будем строить только хаусдорфовы топологии. Заметим теперь, что, как мы уже говорили, из условия $p(x) = 0$ вовсе не вытекает, что $x = \vartheta$, однако есть одно свойство системы полунорм P, которое роднит семейство полунорм с нормой. Именно, относительно системы полунорм P мы будем требовать, чтобы она была *разделяющей*, т. е. для всякой точки $x \in X$ существует такая полунорма $p \in \mathrm{P}$, что $p(x) \neq 0$.

Предположим теперь, что наше семейство полунорм $\mathrm{P}(X)$ счетно и разделяющее. Тогда на построенном топологическом пространстве (X, τ) можно ввести метрику

$$d(x, y) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}. \tag{4.7}$$

Проверим, что это метрика на (X, τ). Действительно, в силу того, что семейство полунорм является разделяющим, то $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, поскольку, если $d(x, y) = 0$, но $x - y \neq \vartheta$, то найдется такой номер $k = n_0$, что $d_{n_0}(x-y) > 0$, а значит, $d(x, y) > 0$. Противоречие.

Можно проверить, что выполнены и остальные свойства метрики.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $\mathrm{P}(X)$ — есть счетное и разделяющее семейство полунорм, тогда построенное по этой системе полунорм локально выпуклое векторное топологическое пространство является метризуемым пространством.*

Замечание 1. Отметим, что в силу того, что метрическое пространство является всегда хаусдорфовым, то построенное в теореме 4 метрическое пространство автоматически является хаусдорфовым.

Наконец, дадим следующее определение.

Определение 10. *Полное, метризуемое и локально выпуклое пространство называется пространством Фреше.*

Замечание 2. Как видно из теоремы 5 — она не гарантирует того, что построенное по данной системе полунорм метрическое пространство является автоматически полным, т. е. пространством Фреше. Действительно, это не так и полноту построенного пространства надо проверять «вручную».

Теперь мы приступим к рассмотрению различных топологий на сопряженном векторном пространстве X^* — линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X, τ).

§ 5. Сильная, слабая и $*-$слабая топологии

Итак, пусть $f \in X^{\#}$, а $x \in X$, причем X — это векторное пространство. Теперь рассмотрим следующую функцию на $x \in X$:

$$p(x) = |\langle f, x\rangle| \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{при} \quad f \in X^{\#}. \tag{5.1}$$

Докажем, что функция $p(x)$ — это полунорма. Действительно, имеют место следующие очевидные неравенства:

$$p(x_1 + x_2) = |\langle f, x_1 + x_2\rangle| = |\langle f, x_1\rangle + \langle f, x_2\rangle| \leqslant \\ \leqslant |\langle f, x_1\rangle| + |\langle f, x_2\rangle| = p(x_1) + p(x_2), \tag{5.2}$$

$$p(\lambda x) = |\langle f, \lambda x\rangle| = |\lambda\langle f, x\rangle| \leqslant |\lambda|\,|\langle f, x\rangle| = |\lambda| p(x). \tag{5.3}$$

Таким образом, в силу (5.2) и (5.3) функция (5.1) является полунормой. Пока у нас нет топологии в векторном пространстве $X^{\#}$, поэтому мы не можем сказать, что такое ограниченное множество в $X^{\#}$. Мы можем говорить только о конечных множествах из $X^{\#}$, т. е. о множествах, состоящих из конечного числа элементов из $X^{\#}$. Таким образом, будем рассматривать произвольные конечные множества $A_n = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset X^{\#}$. Тогда семейство

$$\mathrm{P} \equiv \left\{p(x; A_n); A_n \subset X^{\#}\right\}, \tag{5.4}$$

где

$$p(x; A_n) = \sup_{f \in A_n} |\langle f, x\rangle|.$$

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию τ_w на векторном пространстве X, которая называется *слабой топологией*. Заметим теперь, что выражение, которое стоит в левой части равенства (5.1) можно рассматривать как функцию от аргумента $f \in X^{\#}$ при фиксированном $x \in X$. Но тогда, эта функция тоже полунорма, но уже на линейном пространстве $X^{\#}$. Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#} \equiv \{p(f; B_n); B_n \subset X\}, \tag{5.5}$$

где

$$p(f; B_n) = \sup_{x \in B_n} |\langle f, x\rangle|, \quad B_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X.$$

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию $\tau^*_{w^*}$, но уже на сопряженном векторном пространстве $X^{\#}$. Эта топология носит название $*-$*слабой топологии*. Возникает вопрос: почему мы в данном случае говорим не о слабой топологии, а о $*-$слабой топологии? А вот почему — потому что на векторном пространстве $X^{\#}$ может быть еще задана и слабая топология следующим образом. Поскольку множество $X^{\#}$ является векторным пространством, то на нем в свою очередь однозначно определено векторное пространство $X^{\#\#}$ линейных функционалов, но уже над $X^{\#}$. Определим соответствующие скобки двойственности между $X^{\#}$ и $X^{\#\#}$ следующим образом:

$$\left\langle x^{\#}, f\right\rangle_{\#} : X^{\#\#} \otimes X^{\#} \to \mathbb{C}. \tag{5.6}$$

Но тогда рассмотрим топологию на $X^{\#}$ при помощи следующего семейства полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#\#} \equiv \left\{p^{\#}(f; A_n^{\#}); A_n^{\#} \subset X^{\#\#}\right\}, \tag{5.7}$$

где

$$p^{\#}(f; A_n^{\#}) = \sup_{x^{\#} \in A_n^{\#}} \left|\langle x^{\#}, f\rangle_{\#}\right|,$$

где $A_n^{\#}$ — это произвольное конечное подмножество из $X^{\#\#}$. Порожденная согласно теореме 3 топология τ_w^* является по своему смыслу слабой топологией на $X^{\#}$ и эти две топологии τ_w^* и $\tau_{w^*}^*$ вообще говоря не совпадают.

Рассмотрим вопрос о том, когда эти две топологии являются эквивалентными. Заметим, что имеет множественное вложение $X \subset X^{\#\#}$. Действительно, это следствие того, что каждый элемент $x \in X$ порождает линейный функционал на $X^{\#}$ по формуле

$$\langle f, x\rangle.$$

Поэтому и имеет место указанное вложение, но обратное вложение — $X^{\#\#} \subset X$ имеет место не всегда. Однако, тот случай когда все таки такое вложение имеет место, а значит $X = X^{\#\#}$, очень важен. В этом случае линейное пространство X называется *рефлексивным*. И в этом случае имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle f, x\rangle = \langle x^{\#}, f\rangle_{\#},$$

причем каждому элементу $x \in X$ взаимно однозначно соответствует элемент $x^{\#} \in X^{\#\#}$. Поэтому из сравнения формул (5.8) и (5.10) мы приходим к выводу о том, что топологии τ_w и τ_w^* совпадают на $X^{\#}$ и значит понятия слабой топологии и $*-$слабой топологии — это одно и тоже. В общем случае, как нетрудно убедиться, топология τ_w^* состоит из большего числа множеств, чем топология $\tau_{w^*}^*$ и, значит, топология τ_w^* *сильнее* топологии $\tau_{w^*}^*$ на $X^{\#}$.

Теперь мы займемся введением *сильной топологии* на пространстве X^* — линейном пространстве линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X, τ). Заметим, что для введения сильной топологии на X^* нам нужно понятие ограниченного множества в X и поэтому, естественно, нужна какая-то топология на векторном пространстве X.

Итак, введем *сильную топологию* на векторном пространстве X^* — пространстве линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X, τ). Пусть $B \subset X$ — это произвольное ограниченное множество (см. определение 3) в векторном топологическом пространстве (X, τ). Поскольку всякое конечное множество, в частности, точка поглощается всякой окрестностью нуля, то конечное множество — это пример ограниченного множества, однако, естественно, существуют ограниченные множества, не сводящиеся к конечным. Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}_s^{\#} \equiv \{p(f; B); B \subset X\}, \tag{5.8}$$

где

$$p(f; B) = \sup_{x \in B} |\langle f, x\rangle|, \quad B \subset X,$$

где B — это произвольное ограниченное множество в (X, τ). Тогда топология порожденная этой системой множеств согласно теореме 4 называется *сильной топологией* пространства X^* и обозначается как τ_s^*. Ясно, что поскольку всякое конечное множество — это ограниченное множество, то слабая топология τ_w^* и уж тем более $*$—слабая топология пространства X^* *слабее* топологии τ_s^*. Таким образом, сильная топология τ_s является *сильнейшей* топологией на сопряженном пространстве X^* среди указанных «топологизаций». Полученное локально выпуклое векторное топологическое пространство обозначается как (X_s^*, τ_s^*). Локально выпуклое векторное топологическое пространство, порожденное $*$—слабой топологией обозначается как $(X_{w^*}^*, \tau_{w^*}^*)$.

Теперь в качестве примера рассмотрим сильную топологию сопряженного $\mathbb{B}^*$ к банахову пространству $\mathbb{B}$ с нормой $\|\cdot\|$. Но сначала приведем очень красивый результат о необходимом и достаточном условии *нормируемости* локально выпуклого векторного топологического пространства, где нормируемость понимается в следующем смысле.

Определение 11. *Векторное топологическое пространство (X, τ) называется нормируемым, если на нем можно ввести такую норму, что топология нормы и исходная топология τ являются эквивалентными.*

Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема о нормируемости. *Локально выпуклое пространство, содержащее ограниченную и компактную окрестность нуля является банаховым относительно функционала Минковского этой окрестности с топологией, эквивалентной исходной.*

Доказательство.

Напомним доказательство только первой части этого утверждения.

Пусть V — есть выпуклая ограниченная окрестность нуля в локально выпуклом векторном топологическом пространстве (X, τ). Тогда как известно найдется открытая в топологии τ абсолютно выпуклая, окрестность нуля $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, которая, естественно, тоже ограничена. Тогда это пространство можно представить в виде

$$X = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha \mathrm{U}.$$

Рассмотрим функционал Минковского множества U :

$$p_{\mathrm{U}} \equiv \inf\{\lambda :\ \lambda > 0,\ x \in \lambda \mathrm{U}\}.$$

Поскольку U — есть выпуклое, поглощающее и уравновешенное множество (как окрестность нуля), то по теореме 1 функционал Минковского этого множества является полунормой на этом пространстве. Пусть $x \neq \vartheta$ и $x \notin \lambda_0 \mathrm{U}$ при $\lambda_0 > 0$ то для всех $\lambda \leqslant \lambda_0$ в силу ограниченности U имеем $x \notin \lambda \mathrm{U} \subset \lambda_0 \mathrm{U}$. Тогда по определению функционала Минковского имеем

$$p_{\mathrm{U}}(x) \geqslant \lambda_0 > 0.$$

Таким образом, $p_{\mathrm{U}}(x)$ — есть норма на (X, τ). Осталось доказать, что $p_{\mathrm{U}}(x)$ порождает туже топологию на X, что и исходная топология τ. Это есть следствие ранее установленного нами равенства множеств

$$\alpha \mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} :\ p_{\mathrm{U}}(x) < \alpha\}.$$

Доказательство второй части теоремы есть в работе [28].

Теорема доказана.

Теперь мы вернемся к рассмотрению различных топологий на нормируемых пространствах. Итак, прежде всего отметим, что каждое ограниченное множество в нормируемом пространстве принадлежит шару $\{x \in \mathbb{B} : \|x\| \leqslant c\}$ при некотором $c > 0$ и, в частности, сам этот шар является ограниченным множеством, поскольку, очевидно, поглощается всякой окрестностью нуля, а окрестность нуля имеет вид общий вид $\{x \in \mathbb{B} : \|x\| < c\}$ для всех $c > 0$. Поэтому естественно в качестве множества B в системе полунорм (5.8) взять замкнутый шар с центром в нулевом элементе:

$$\mathrm{P}_s^{\#} \equiv \{p(f; B)\}, \tag{5.9}$$

где

$$p(f; B) = \sup_{\|x\| \leqslant c} |\langle f, x\rangle|,$$

для всех $c > 0$. Заметим, что в смысле теоремы 4 система полунорм (5.9) эквивалентна одной полунорме, а именно следующей

$$p_1(f) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle f, x\rangle|. \tag{5.10}$$

Действительно, рассмотрим произвольную полунорму из системы (5.9), которая имеет следующий общий вид:

$$p_c(f) = \sup_{\|x\| \leqslant c} |\langle f, x\rangle| \quad \text{при} \quad c > 0. \tag{5.11}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$p_c(f) = c p_1(f).$$

Действительно, имеет место следующая цепочка равенств

$$p_c(f) = \sup_{\|x\|\leqslant c} |\langle f, x\rangle| = \sup_{\|x/c\|\leqslant 1} |\langle f, x\rangle| =$$
$$= c \sup_{\|x/c\|\leqslant c} |\langle f, x/c\rangle| = c \sup_{\|x_1\|\leqslant 1} |\langle f, x_1\rangle| = cp_1(f).$$

Поэтому полунорма (5.10) порождает согласно теореме 4 туже топологию на векторном пространстве $\mathbb{B}^*$, что и система (5.9). Заметим, что на самом деле полунорма (5.10) является нормой, причем согласно общим результатам функционального анализа векторное нормированное пространство $\mathbb{B}^*$ является банаховым относительно этой нормы! Таким образом, мы пришли к классическому результату теории банаховых пространств.

§ 6. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [3], [11], [12], [17], [26], [28], [29], [31] и [32].