Лекция 13

ПРОСТРАНСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{P}^{'}$ И $\mathcal{E}^{'}$

§ 1. Введение

В этой лекции мы рассмотрим три класса основных или, как иначе говорят, пробных функций $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$. При этом мы будем интенсивно пользоваться языком теории локально выпуклых пространств, развитый в предыдущей лекции. Затем, мы перейдем к рассмотрению соответствующих сопряженных пространств $\mathcal{D}^{'}$, $\mathcal{P}^{'}$ и $\mathcal{E}^{'}$ — классов распределений или, иначе, обобщенных функций. Для понимания этой лекции достаточно владеть основами теории локально выпуклых пространств, развитой в предыдущей лекции.

§ 2. Пространство распределений $\mathcal{P}^{'}$

Перейдем к исследованию пространства распределений $\mathcal{P}^{'}$, которые еще называют пространством обобщенных функций умеренного роста. Дадим следующее определение.

Определение 15. *Обозначим через* $\mathcal{P}^{'}$ *или* $\mathcal{P}^{'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством* $(\mathcal{P}, \tau)$.

С одной стороны, из первого результата теоремы 3 следует, что пространство основных функций $\mathcal{P}$ является борнологическим. Заметим, что пространство вещественных чисел $\mathbb{C}^1$ является тоже борнологическим, как метрическое относительно расстояния между точками. С другой стороны, линейный функционал f^* из $\mathcal{P}^{\#}$ (пространство линейных функционалов над $\mathcal{P}$) отображает борнологическое пространство $(\mathcal{P}, \tau)$ в борнологическое пространство $\mathbb{C}^1$:

$$f^* : (\mathcal{P}, \tau) \to \mathbb{C}^1.$$

Поэтому из результата теоремы 8 четвертой лекции приходим к выводу о справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Для непрерывности линейного функционала* $f^* \in \mathcal{P}^{\#}$, *необходимо и достаточно, чтобы из условия* $\{\varphi_n\} \subset (\mathcal{P}, \tau)$ *и* $\varphi_n \to \vartheta$ *в топологии* τ *вытекало, что*

$$\langle f^*, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad n \to +\infty,$$

где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^{\#}$.

Поскольку пространство $\mathcal{P}$ является пространством Фреше, то оно является борнологическим, поэтому имеет место следующая полезная теорема.

Теорема 2. *Следующие два условия эквивалентны*:

(i) $f^* \in \mathcal{P}'$;

(ii) $f^* \in \mathcal{P}^{\#}$ *и функция* $\langle f^*, \varphi\rangle$ *ограничена на ограниченных множествах из* $\mathcal{P}$.

Доказательство

Действительно, если $f^* \in \mathcal{P}'$, то полунорма

$$p(\varphi) \equiv |\langle f^*, \varphi\rangle| \tag{2.1}$$

непрерывна. Но полунорма $p(\varphi)$ — это полунорма на борнологическом пространстве $\mathcal{P}$. Поэтому из теоремы 6 четвертой лекции вытекает, что она ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{P}$.

Пусть теперь $f^* \in \mathcal{P}^{\#}$ и функция $\langle f^*, \varphi\rangle$ ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{P}$. Но тогда опять из теоремы 6 четвертой лекции вытекает непрерывность полунормы (2.1). А значит и непрерывность линейного функционала f^*.

Теорема доказана.

Напомним, что топология τ пространства Фреше $(\mathcal{P}, \tau)$ порождена следующим счетным семейством полунорм:

$$\|f\|_n \equiv p_n(f) \equiv \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(1+|x|^2\right)^n |\partial^\alpha f(x)|\,. \tag{2.2}$$

Важным следствием теоремы 15 является следующая лемма.

Лемма 1. *Линейный функционал $f^* \in \mathcal{P}'$ тогда и только тогда, когда найдется такая полунорма $p_n(\varphi)$ вида* (2.2) *и постоянная* $\mathrm{M}_n > 0$, *что имеет место неравенство*:

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_n \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(1+|x|^2\right)^n |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{2.3}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{P}, \tau)$.

Доказательство.

Достаточность. Из (2.3) получаем, что если $\{\varphi_k(x)\} \subset (\mathcal{P}, \tau)$ и $\varphi_k \to \vartheta$, то и

$$\langle f^*, \varphi_k\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, в силу теоремы 14 приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{P}'$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{P}'$, тогда полунорма

$$p(\varphi) = |\langle f^*, \varphi\rangle|$$

непрерывна над всем $(\mathcal{P}, \tau)$. А это в свою очередь означает, что найдется полунорма $p_n(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства $(\mathcal{P}, \tau)$ и постоянная $\mathrm{M}_n > 0$ такие, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_n p_n(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P}.$$

Но полунорма $p_n(\varphi)$ имеет явный вид (2.2). Формула (2.3) доказана.

Лемма доказана.

Теперь мы перейдем к исследованию различных «естественных» способов «топологизации» пространства $\mathcal{P}'$.

Начнем с построения $*-$слабой топологии в пространстве $\mathcal{P}'$. Введем следующее семейство множеств:

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathrm{A}\}, \tag{2.4}$$

где А пробегает все *конечные* подмножества пространства $(\mathcal{P}, \tau)$. Теперь рассмотрим семейство множеств в пространстве $\mathcal{P}'$:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^\circ : \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathrm{A}^\circ \equiv \left\{f^* \in \mathcal{P}' : \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant 1\right\}. \tag{2.5}$$

Если принять семейство $\mathfrak{B}$ за базу окрестностей нуля в пространстве $\mathcal{P}'$, то мы получим $*-$слабую «топологизацию» этого пространства. Дадим следующее определение.

Определение 16. *Обозначим через* $\left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ *векторное топологическое пространство, полученное при снабжении векторного пространства* $\mathcal{P}'$ *топологии $*-$слабой сходимости.*

Поступим теперь аналогичным способом наделения пространства $\mathcal{P}'$ топологией *сильной* сходимости. Действительно, рассмотрим следующее семейство множеств

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathrm{A}\}, \tag{2.6}$$

где А пробегает все *ограниченные* подмножества пространства $(\mathcal{P}, \tau)$. Теперь рассмотрим семейство множеств в пространстве $\mathcal{P}'$:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^\circ : \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathrm{A}^\circ \equiv \left\{f^* \in \mathcal{P}' : \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant 1\right\}. \tag{2.7}$$

Если принять семейство $\mathfrak{B}$ за базу окрестностей нуля в пространстве $\mathcal{P}'$, то мы получим сильную «топологизацию» этого пространства.

Определение 17. *Обозначим через* $\left(\mathcal{P}'_s, \tau^*_s\right)$ *векторное топологическое пространство, полученное при снабжении векторного пространства* $\mathcal{P}'$ *топологии сильной сходимости.*

Естественно, что имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. *Топология* τ^*_s *сильнее топологии* $\tau^*_{w^*}$ *и имеет место топологическое вложение*:

$$\left(\mathcal{P}'_s, \tau^*_s\right) \subset \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

Доказательство.

Лемма вытекает из общего результата 5 параграфа четвертой лекции.

Лемма доказана.

В нашей работе [21] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Пространство* $\left(\mathcal{P}'_s, \tau^*_s\right)$ *полно*;

(ii) *Пространство* $\left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ *секвенциально полно.*

Следствие. *Пусть задана последовательность* $\{f_n\} \subset \mathcal{P}'$ *такая, что для каждого* $\varphi \in \mathcal{P}$ *следующая числовая последовательность сходится*

$$\langle f_n, \varphi \rangle\,,$$

тогда функционал определенный равенством

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle$$

принадлежит $\mathcal{P}'$.

Доказательство.

Это утверждение вытекает из пункта (ii) теоремы 16. Действительно, поскольку числовая последовательность $\langle f_n, \varphi \rangle$ сходится, то она фундаментальна. Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной в $*-$слабой топологии пространства $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{w^*}$. Но тогда из утверждения (i) вытекает, что эта последовательность $\{f_n\}$ $*-$слабо сходится в $\mathcal{P}'$, т. е.

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P}$$

и $f \in \mathcal{P}'$.

Следствие доказано.

Над пространством основных функций $\mathcal{P}$ и пространством $\mathcal{P}'$ имеют место некоторые из тех операций, которые были введены для пространств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Действительно, можно опять рассмотреть для произвольного линейного отображения

$$\mathbb{T} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

определить линейный транспонированный оператор

$$\mathbb{T}^t : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}',$$

определенный соотношением

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, \varphi \right\rangle \equiv \langle f^*, \mathbb{T}\varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathcal{P}' \quad \text{и} \quad \varphi \in \mathcal{P}.$$

И далее ввести операции *неособеннной замены* и *дифференцирования*. Заметим, что операция *умножения* на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x) \in \mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ может вывести нас за рамки пространства $\mathcal{P}$.

Действительно, достаточно взять в качестве функции $a(x)$ следующую функцию:

$$a(x) = \exp\{|x|^2\} \in \mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Имеет место плотное вложение*:

$$\left(\mathcal{P}'_s, \tau^*_s\right) \overset{ds}{\subset} \left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right).$$

Доказательство.

Это утверждение вытекает из того факта, что

$$(\mathcal{D}, \tau) \overset{ds}{\subset} (\mathcal{P}, \tau),$$

и теоремы 12 четвертой лекции.

Лемма доказана.

Пространство основных функций $\mathcal{P}$ строилось как пополнение пространства $\mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ по счетной системе полунорм (2.2). Тем не менее, имеет место следующий результат о плотности.

Лемма 4. *Имеет место плотное вложение:*

$$\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} \left(\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right), \tau\right).$$

Доказательство.

Пусть функция $f(x) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right)$ и $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ такая, что $\varphi(x) \equiv \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1$. Рассмотрим теперь функцию

$$f_\varepsilon(x) \equiv f(x)\varphi(\varepsilon x) \in \mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Докажем, что $f_\varepsilon(x)$ сходится к функции $f(x)$ по каждой полунорме (2.2), т. е., иначе говоря, сходится в топологии пространства $\mathcal{P}$. Действительно, имеет место следующая цепочка равенств

$$\partial^\alpha\left[f(x) - f(x)\varphi(\varepsilon x)\right] = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} c_{\alpha\beta}\partial^{\alpha-\beta}f(x)\partial^\beta\left[1 - \varphi(\varepsilon x)\right] =$$
$$= c_{\alpha 0}\partial^\alpha f(x)\left[1 - \varphi(\varepsilon x)\right] + \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant|\alpha|} c_{\alpha\beta}\partial^{\alpha-\beta}f(x)\varepsilon^{|\beta|}\partial_y^\beta\varphi(y).$$

Теперь понятно, что для каждой полунормы (2.2) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$p_n\left(f(x) - f_\varepsilon(x)\right) =$$
$$= \max_{|\alpha|\leqslant n}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\left(1 + |x|^2\right)^n\partial^\alpha\left[f(x) - f(x)\varphi(\varepsilon x)\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_1(n)\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|1 - \varphi(\varepsilon x)| + c_2(n)\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 9. Утверждение леммы 6 означает, что при пополнении пространства $\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ по счетной системе полунорм (2.2) мы все равно получим тоже самое пространство $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Поэтому никакого разночтения нет, хотя используются эти два способа построения пространства $\mathcal{P}$.

Необходимость во введении пространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ вызвана в особенности применения к ним оператора *преобразования Фурье*. К исследованию данной операции мы и приступаем. Дадим следующие определения.

О п р е д е л е н и е 18. *Назовем прямым преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{P}$:

$$\widehat{\varphi}(y) \equiv \mathbb{F}\left[\varphi\right](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)}\varphi(x)\,dx, \quad (x,y) = \sum_{k=1}^N x_k y_k. \quad (2.8)$$

О п р е д е л е н и е 19. *Назовем обратным преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{P}$:

$$\widetilde{\varphi}(x) \equiv \mathbb{F}^{-1}\left[\varphi\right](x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)}\varphi(y)\,dy, \quad (x,y) = \sum_{k=1}^N x_k y_k. \quad (2.9)$$

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 4. *Операции прямого и обратного преобразования Фурье являются линейными и непрерывными*:

$$\mathbb{F} : (\mathcal{P},\tau) \to (\mathcal{P},\tau) \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^{-1} : (\mathcal{P},\tau) \to (\mathcal{P},\tau).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Докажем утверждение теоремы для прямого преобразования Фурье, поскольку доказательство для обратного преобразования Фурье аналогичное.

Прежде всего заметим, что поскольку пространство $(\mathcal{P},\tau)$ является пространством Фреше, то оно является и борнологическим. Поэтому в силу теоремы 8 четвертой лекции нам достаточно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset (\mathcal{P},\tau)$ такой, что

$$\varphi_m \to \vartheta \quad \text{в} \quad (\mathcal{P},\tau) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

вытекает, что

$$\mathbb{F}\left[\varphi_m\right] \to \vartheta \quad \text{в} \quad (\mathcal{P},\tau) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$\partial_y^\alpha \mathbb{F}\left[\varphi\right](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha e^{-i(x,y)}\varphi(x)\,dx, \quad (2.10)$$

$$\left(1+|y|^2\right)^n \mathbb{F}[\varphi](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,(1-\triangle_x)^n\, e^{-i(x,y)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)}\,[1-\triangle_x]^n\,\varphi(x)\,dx, \quad (2.11)$$

здесь мы воспользовались интегрированием по частям, чтобы «перекинуть» оператор $[1-\triangle_x]^n$ $n \in \mathbb{N}$, где

$$\triangle_x \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

Таким образом, с учетом (2.10) и (2.11) получим следующую цепочку неравенств:

$$\left|\left(1+|y|^2\right)^n \partial_y^\alpha \mathbb{F}[\varphi](y)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|[1-\triangle_x]^n\,(-ix)^\alpha \varphi(x)\right|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left[\left|1+|x|^2|^s\right|\,[1-\triangle_x]^n\,x^\alpha \varphi(x)\right] \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{[1+|x|^2]^s}\,dx, \quad s > \frac{N}{2}.$$

Отсюда сразу же получаем оценку

$$p_n\left(\mathbb{F}[\varphi]\right) \leqslant c(n,s) p_{2n+s}(\varphi), \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad s > \frac{N}{2}.$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ мы получаем, что если $\varphi_m \to \vartheta$, то и

$$\mathbb{F}[\varphi_m] \to \vartheta \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь докажем, что прямое преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье действительно являются взаимно обратными операциями.

Теорема 5. *Операторы Фурье $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^{-1}$ являются взаимно обратными операторами на $\mathcal{P}$.*

Доказательство.

Для доказательства утверждения теоремы сначала докажем следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y) f(x+y)\,dy. \quad (2.12)$$

Действительно, имеет место цепочка равенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy g(y) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(z-x,y)} f(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz f(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy g(y) e^{-i(z-x,y)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz f(z) \widehat{g}(z-x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy f(x+y) \widehat{g}(y).$$

Возьмем теперь в качестве функции $g(y)$ функцию $g(\varepsilon y)$. Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y,z)} g(\varepsilon z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y/\varepsilon,z)} g(z) = \frac{1}{\varepsilon^N} \widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right). \quad (2.13)$$

С учетом равенств (2.12) и (2.13) приходим к следующему равенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(\varepsilon y) \widehat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N} \widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x+y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y) f(x+\varepsilon y)\, dy. \quad (2.14)$$

Теперь возьмем в равенстве (2.14) в качестве функции $g(x)$:

$$g(x) = e^{-|x|^2/2}.$$

Тогда переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (2.14), получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y)\, dy. \quad (2.15)$$

Справедливы следующие свойства введенной функции $g(x)$:

$$\widehat{g}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-i(z,y)}\, dy = e^{-|z|^2/2}, \quad \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2/2}\, dz = 1.$$

С учетом этого из равенства (2.15) приходим к следующему равенству:

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = f(x).$$

Которое иначе можно переписать как

$$\mathbb{F}^{-1}\left[\mathbb{F}[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\mathbb{F}\left[\mathbb{F}^{-1}[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь преобразование Фурье свертки двух функций из $\mathcal{P}$. Действительно, сначала докажем, что операция свертки (которая, очевидно, является нелинейной операцией) не выводит нас за рамки пространства $\mathcal{P}$. Итак, пусть $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{P}$, тогда воспользуемся следующим легко проверяемым неравенством:

$$\left[1+|x|^2\right] \leqslant 2\left[1+|x-y|^2\right]\left[1+|y|^2\right],$$

поскольку

$$|x| \leqslant |x-y|+|y|.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left[1+|x|^2\right]^n \partial^\alpha(\varphi * \psi)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[1+|x|^2\right]^n \partial_x^\alpha \varphi(x-y) \psi(y)\, dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N} dy \frac{\left[1+|x|^2\right]^n}{\left[1+|x-y|^2\right]^n\left[1+|y|^2\right]^n} \times$$

$$\times\left[1+|x-y|^2\right]^n \partial_{x-y}^\alpha \varphi(x-y)\left[1+|y|^2\right]^n \psi(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \sup_{z \in \mathbb{R}^N}\left[1+|z|^2\right]^n\left|\partial_z^\alpha \varphi(z)\right| \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\left[1+|y|^2\right]^n \psi(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \sup_{z \in \mathbb{R}^N}\left[1+|z|^2\right]^n\left|\partial_z^\alpha \varphi(z)\right| \sup_{y \in \mathbb{R}^N}\left[1+|y|^2\right]^{n+m}|\psi(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^N} dw \frac{1}{\left[1+|w|^2\right]^m}$$

при $m \in \mathbb{N}$ и $m>N/2$. Тогда из этой цепочки приходим к следующему неравенству:

$$\max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N}\left[1+|x|^2\right]^n|(\varphi * \psi)(x)| \leqslant$$

$$\leqslant c \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{z \in \mathbb{R}^N}\left[1+|z|^2\right]^n\left|\partial_z^\alpha \varphi(z)\right| \sup_{y \in \mathbb{R}^N}\left[1+|y|^2\right]^{n+m}|\psi(y)| \leqslant$$

$$\leqslant c p_n(\varphi) p_{n+m}(\psi),$$

и получаем в результате неравенство:

$$p_n(\varphi * \psi) \leqslant c(m, n) p_n(\varphi) p_{n+m}(\psi) \quad \text{при} \quad m \in \mathbb{N},\ m>\frac{N}{2}.$$

Стало быть, $\varphi * \psi \in \mathcal{P}$ для всех $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{P}$. Теперь применим оператор преобразования Фурье к свертке двух функций:

$$\mathbb{F}[\varphi * \psi](y)=\frac{1}{(2 \pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, e^{-i(x, y)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz \varphi(x-z) \psi(z)=$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz \psi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \varphi(x-z) e^{-i(y,x-z)} e^{-i(y,z)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y,z)} \psi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \varphi(x-z) e^{-i(y,x-z)} =$$

$$= (2\pi)^{N/2} \widehat{\psi}(y) \widehat{\varphi}(y).$$

Докажем теперь равенство

$$\mathbb{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \widehat{f} * \widehat{g}. \tag{2.16}$$

Ранее мы доказали следующее равенство

$$\mathbb{F}[f * g] = (2\pi)^{N/2} \widehat{f}\widehat{g}. \tag{2.17}$$

Возьмем в этой формуле в качестве функция f и g, $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$, соответственно. Тогда из формулы (2.17) получим следующее равенство:

$$\mathbb{F}\left[\widetilde{f} * \widetilde{g}\right] = (2\pi)^{N/2} \widehat{\widetilde{f}} \cdot \widehat{\widetilde{g}} = (2\pi)^{N/2} f g.$$

Но

$$\mathbb{F}\left[\widetilde{f} * \widetilde{g}\right] = \mathbb{F}^{-1}\left[\widehat{f} * \widehat{g}\right].$$

И в результате приходим к равенству (2.16).

Теперь мы приступим к изучению транспонированного $\mathbb{F}^t$ к оператору Фурье $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}^t : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}',$$

$$\left\langle \mathbb{F}^t\left[f^*\right], \varphi \right\rangle \equiv \langle f^*, \mathbb{F}[\varphi] \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P},\ f^* \in \mathcal{P}'. \tag{2.18}$$

Рассмотрим для начала случай регулярной обобщенной функции из $\mathcal{P}'$, т. е. такой, что найдется такая локально интегрируемая функция $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, что для скобок двойственности имеет явное представление:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx f(x) \varphi(x).$$

Тогда правая часть равенства (2.18) примет следующий вид:

$$\langle f^*, \mathbb{F}[\varphi] \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy e^{-i(x,y)} \varphi(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \varphi(y) \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx e^{-i(x,y)} f(x) = \langle \mathbb{F}\left[f^*\right], \varphi \rangle. \tag{2.19}$$

Так что для случая регулярных обобщенных функций из $\mathcal{P}'$ мы пришли к выводу, что оператор $\mathbb{F}^t \equiv \mathbb{F}$. Тем самым и для всех элементов из $\mathcal{P}'$ за определение транспонированного оператора $\mathbb{F}^t$ нужно взять равенство (2.18), в котором следует положить $\mathbb{F}^t \equiv \mathbb{F}$. Дадим определение.

Определение 20. *Преобразованием Фурье обобщенных функций $f^* \in \mathcal{P}'$ называется линейный оператор*

$$\mathbb{F} : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}',$$

определенный следующей формулой:

$$\langle \mathbb{F}[f^*], \varphi \rangle \equiv \langle f^*, \mathbb{F}[\varphi] \rangle \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P}, \; f^* \in \mathcal{P}'. \tag{2.20}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Оператор преобразования Фурье обобщенных функций* (2.20) *является линейным и секвенциально непрерывным в $*-$слабой топологии*:

$$\mathbb{F} : \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right) \to \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right). \tag{2.21}$$

Доказательство.

Прежде всего отметим то, что мы понимаем под *секвенциальной* непрерывностью в $*-$слабой топологии. Но для начала напомним, что такое непрерывность оператора $\mathbb{T}$ в $*-$слабой топологии:

$$\mathbb{T} : \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right) \to \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

Действительно, это означает, что для всякой окрестности нуля U в топологии $\tau^*_{w^*}$ пространства $\left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ найдется такая окрестность нуля V из той же топологии, что имеет место вложение

$$\mathbb{T}(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}.$$

Тогда под секвенциальной непрерывностью того же оператора понимается следующее свойство: из $*-$слабой сходимости произвольной последовательности $\{f^*_n\} \subset \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ к нулю

$$f^*_n \overset{*}{\rightharpoonup} \vartheta \quad *-\text{слабо в} \quad \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$$

вытекает, что

$$\mathbb{T}f^*_n \overset{*}{\rightharpoonup} \vartheta \quad *-\text{слабо в} \quad \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

Пусть $\{f^*_m\} \subset \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ и

$$f^*_m \to \vartheta \quad *-\text{слабо в} \quad \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

Тогда имеем

$$\langle \mathbb{F}[f^*_m], \varphi \rangle = \langle f^*_m, \mathbb{F}[\varphi] \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$, поскольку $\mathbb{F}[\varphi] \in \mathcal{P}$.

Теорема доказана.

Большое количество примеров применения преобразования Фурье к обобщенным функциям из $\mathcal{P}'$ приведено в работе [6]. На этом мы закончим рассмотрение пространства $\mathcal{P}'$.

§ 3. Пространство распределений $\mathcal{E}'$

Дадим следующее определение.

Определение 21. *Символом $\mathcal{E}'$ или $\mathcal{E}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ мы обозначим векторное пространство линейных и непрерывных функционалов над $(\mathcal{E}, \tau)$.*

С одной стороны, из первого результата теоремы 6 следует, что пространство основных функций $\mathcal{E}$ является борнологическим. Заметим, что пространство вещественных чисел $\mathbb{C}^1$ является тоже борнологическим как метрическое относительно расстояния между точками. С другой стороны, линейный функционал f^* из $\mathcal{E}^{\#}$ (пространство линейных функционалов над $\mathcal{E}$) отображает борнологическое пространство $(\mathcal{E}, \tau)$ в борнологическое пространство $\mathbb{C}^1$:

$$f^* : (\mathcal{E}, \tau) \to \mathbb{C}^1.$$

Поэтому из результата теоремы 8 четвертой лекции приходим к выводу о справедливости следующей теоремы.

Теорема 7. *Для непрерывности линейного функционала $f^* \in \mathcal{E}^{\#}$, необходимо и достаточно, чтобы из условия $\{\varphi_n\} \subset (\mathcal{E}, \tau)$ и $\varphi_n \to \vartheta$ в топологии τ вытекало, что*

$$\langle f^*, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{\#}$.

Поскольку пространство $\mathcal{E}$ является пространством Фреше, то оно является борнологическим, поэтому имеет место следующая полезная теорема.

Теорема 8. *Следующие два условия эквивалентны*:

(i) $f^* \in \mathcal{E}'$;

(ii) *$f^* \in \mathcal{E}^{\#}$ и функция $\langle f^*, \varphi \rangle$ ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{E}$.*

Доказательство.

Действительно, если $f^* \in \mathcal{E}'$, то полунорма

$$p(\varphi) \equiv |\langle f^*, \varphi \rangle| \tag{3.1}$$

непрерывна. Но полунорма $p(\varphi)$ — это полунорма на борнологическом пространстве $\mathcal{E}$. Поэтому из теоремы 6 четвертой лекции вытекает, что она ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{E}$.

Пусть теперь $f^* \in \mathcal{E}^{\#}$ и функция $\langle f^*, \varphi \rangle$ ограничена на ограниченных множествах из $\mathcal{E}$. Но тогда опять из теоремы 6 четвертой лекции вытекает непрерывность полунормы (3.1). А значит и непрерывность линейного функционала f^*.

Теорема доказана.

Напомним, что топология τ пространства Фреше $(\mathcal{E}, \tau)$ порождена следующим счетным семейством полунорм:

$$p_n(f) \equiv \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha f(x)|, \tag{3.2}$$

где $\{\mathrm{K}_n\}$ — последовательность компактов, исчерпывающих все $\mathbb{R}^N$.

Важным следствием теоремы 21 является следующая лемма.

Лемма 5. *Линейный функционал $f^* \in \mathcal{E}'$ тогда и только тогда, когда найдется такая полунорма $p_n(\varphi)$ вида* (3.2) *и постоянная* $\mathrm{M}_n > 0$, *что имеет место неравенство*:

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_n \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{3.3}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{E}, \tau)$.

Доказательство.

Достаточность. Из (3.3) получаем, что если $\{\varphi_k(x)\} \subset (\mathcal{E}, \tau)$ и $\varphi_k \to \vartheta$, то и

$$\langle f^*, \varphi_k\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, в силу теоремы 20 приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{E}'$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{E}'$, тогда полунорма

$$p(\varphi) = |\langle f^*, \varphi\rangle|$$

непрерывна над всем $(\mathcal{E}, \tau)$. А это в свою очередь означает, что найдется полунорма $p_n(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства $(\mathcal{E}, \tau)$ и постоянная $\mathrm{M}_n > 0$ такие, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_n p_n(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{E}.$$

Но полунорма $p_n(\varphi)$ имеет явный вид (3.2). Формула (3.3) доказана.

Лемма доказана.

Теперь мы перейдем к исследованию различных «естественных» способах «топологизации» пространства $\mathcal{E}'$.

Начнем с построения $*-$слабой топологии в пространстве $\mathcal{E}'$. Введем следующее семейство множеств:

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathrm{A}\}, \tag{3.4}$$

где A пробегает все *конечные* подмножества пространства $(\mathcal{E}, \tau)$. Теперь рассмотрим семейство множеств в пространстве $\mathcal{E}'$:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^\circ : \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathrm{A}^\circ \equiv \left\{f^* \in \mathcal{E}' : \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant 1\right\}. \tag{3.5}$$

Если принять семейство $\mathfrak{B}$ за базу окрестностей нуля в пространстве $\mathcal{E}'$, то мы получим $*-$слабую «топологизацию» этого пространства. Дадим следующее определение.

Определение 22. *Обозначим через* $\left(\mathcal{E}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ *векторное топологическое пространство, полученное при снабжении векторного пространства* $\mathcal{E}'$ *топологии* $*-$*слабой сходимости.*

Поступим теперь аналогичным способом наделения пространства $\mathcal{E}'$ топологией *сильной* сходимости. Действительно, рассмотрим следующее семейство множнеств

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathrm{A}\}, \tag{3.6}$$

где A пробегает все *ограниченные* подмножества пространства $(\mathcal{E}, \tau)$. Теперь рассмотрим семейство множеств в пространстве $\mathcal{E}'$:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^\circ :\ \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathrm{A}^\circ \equiv \left\{f^* \in \mathcal{E}' :\ \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant 1\right\}. \tag{3.7}$$

Если принять семейство $\mathfrak{B}$ за базу окрестностей нуля в пространстве $\mathcal{E}'$, то мы получим сильную «топологизацию» этого пространства.

Определение 23. *Обозначим через* $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*_s\right)$ *векторное топологическое пространство, полученное при снабжении векторного пространства* $\mathcal{E}'$ *топологией сильной сходимости.*

Естественно, что имеет место следующее утверждение:

Лемма 6. *Топология* τ^*_s *сильнее топологии* $\tau^*_{w^*}$ *и имеет место топологическое вложение*:

$$\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*_s\right) \subset \left(\mathcal{E}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

В силу того, что пространство $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*_s\right)$ является пространством Фреше справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Пространство* $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*\right)$ *является полным борнологическим.*

В нашей работе [21] доказано следующее утверждение.

Теорема 10. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Пространство* $\left(\mathcal{E}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ *секвенциально полно*;

(ii) *Пространство* $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*\right)$ *является полным борнологическим*;

(iii) *Всякий линейный ограниченный оператор, действующий из* $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*\right)$ *в* $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*\right)$, *непрерывен*;

(iv) *Для непрерывности оператора* $\mathbb{T}$, *действующего из* $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*\right)$ *на все* $\left(\mathcal{E}'_s, \tau^*\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой* *последовательности* $\{f_n^*\} \subset \left(\mathcal{E}_s^{'}, \tau^*\right)$ *и* $f_n^* \to \vartheta$ *вытекало* $\mathbb{T} f_n^* \to \to \vartheta$ *в* $\left(\mathcal{E}_s^{'}, \tau^*\right)$.

Следствие. *Пусть задана последовательность* $\{f_n\} \subset \mathcal{E}^{'}$ *такая, что для каждого* $\varphi \in \mathcal{E}$ *следующая числовая последовательность сходится*

$$\langle f_n, \varphi \rangle ,$$

тогда функционал определенный равенством

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle$$

принадлежит $\mathcal{E}^{'}$.

Доказательство.

Это утверждение вытекает из пункта (i) теоремы 23. Действительно, поскольку числовая последовательность $\langle f_n, \varphi \rangle$ сходится, то она фундаментальна. Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной в $*-$слабой топологии пространства $\mathcal{E}^{'} = \mathcal{E}_{w^*}^{'}$. Но тогда из утверждения (i) вытекает, что эта последовательность $\{f_n\}$ $*-$слабо сходится в $\mathcal{E}^{'}$, т. е.

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{E}$$

и $f \in \mathcal{E}^{'}$.

Следствие доказано.

Напомним, определение транспонированного оператора. Пусть $\mathbb{T}$ — это линейный оператор, действующий из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$:

$$\mathbb{T} : (\mathcal{E}, \tau) \to (\mathcal{E}, \tau) ,$$

тогда транспонированным к нему оператором является следующий оператор

$$\mathbb{T}^t : \left(\mathcal{E}_s^{'}, \tau_s^*\right) \to \left(\mathcal{E}_s^{'}, \tau_s^*\right) ,$$

удовлетворяющий следующему равенству

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, \varphi \right\rangle \equiv \langle f^*, \mathbb{T}\varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad f^* \in \left(\mathcal{E}_s^{'}, \tau_s^*\right), \ \varphi \in (\mathcal{E}, \tau) .$$

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 11. *Пусть* $\mathbb{T}$ *— это линейный ограниченный оператор, действующий из* $(\mathcal{E}, \tau)$ *в* $(\mathcal{E}, \tau)$. *Тогда транспонированный оператор*

$$\mathbb{T}^t : \left(\mathcal{E}_s^{'}, \tau_s^*\right) \to \left(\mathcal{E}_s^{'}, \tau_s^*\right)$$

является линейным непрерывным оператором.

Доказательство.

Доказательство в точности повторяет доказательство теоремы 10.

Теорема доказана.

Наконец, справедлив следующий результат.

Т е о р е м а 12. *Имеют место вложения*:

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}' \subset \mathcal{D}'.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Это утверждение вытекает из того факта, что

$$(\mathcal{D}, \tau) \overset{ds}{\subset} (\mathcal{P}, \tau) \overset{ds}{\subset} (\mathcal{E}, \tau)$$

и теоремы 37 третьей главы.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Здесь мы закончим обсуждение пространств распределений и перейдем к рассмотрению общих свойств банаховых пространств с приложением к специальным подпространствам распределений — соболевских пространств.

§ 4. Литературные указания.

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [3], [6], [11], [12], [17], [18], [26], [28], [29], [30] и [32].

Лекция 14

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА

§ 1. Введение

Пространства С. Л. Соболева занимают, пожалуй, главное место в теории пространств распределений, поскольку именно они возникают зачастую при исследовании краевых задач для нелинейных уравнений, понимаемых в слабом смысле. В этой лекции мы рассмотрим как гильбертовы соболевские пространства, так и банаховы пространства, но только целого порядка производной. Случай соболевских пространств нецелого порядка, на наш взгляд, естественно рассмотреть в теории интерполяции гильбертовых и банаховых пространств. Для понимания этой лекции достаточно знать язык локально выпуклых пространств.

Отметим, что лекция о пространствах С. Л. Соболева появилась в этом курсе лекций совершенно неслучайно, поскольку по построению теории обобщенных функций или распределений у нас имеются пары пространств, например, такая пара

$$\left(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}^{'}(\Omega)\right),$$

т. е. пространство функций $\mathcal{D}(\Omega)$ с определенной топологией и пространство $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ — пространство линейных и непрерывных функционалов над $\mathcal{D}(\Omega)$. Но в теории пространств С. Л. Соболева тоже возникает аналогичная пара, например, следующая пара

$$\left(\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega), \mathbb{W}^{-k,p^{'}}(\Omega)\right),$$

причем пространство С. Л. Соболева отрицательного порядка $\mathbb{W}^{-k,p^{'}}(\Omega)$ и есть пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством функций $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$. Заметим также, что в теории нелинейных краевых, как мы покажем в следующей лекции, пространства отрицательного порядка играют очень важную роль.

§ 2. Слабая и сильная производные

С одной стороны, мы уже встречались с понятием производной от обобщенной функции, при котором все обобщенные функции у нас оказались бесконечное число раз дифференцируемыми. Но это слишком общее определение производной, которое нам надо немного усилить. Ведь изучать дифференцируемость бесконечно дифференцируемых функций — занятие бестолковое. С другой стороны, многие уравнения математической физики могут быть записаны как в локальной (поточечной) форме, так и в интегральной форме. Так могут быть записаны классические уравнения электромагнитного поля Максвелла. Поэтому введем понятие *слабой* производной.

Сначала введем используемые в дальнейшем обозначения. Символом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)\,, \alpha_k \in \mathbb{Z}_+$ при $k = \overline{1, N}$ — обозначим мультииндекс. Символом $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ — обозначим длину этого мультииндекса α. Символом Ω обозначим область в $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ обозначим класс непрерывно бесконечное число раз дифференцируемых функций $\partial^\alpha \varphi(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ при любом $|\alpha| \in \mathbb{N}$ и имеющих компактный носитель в $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Пусть $u(x), v(x) \in L^p(\Omega)$ при $p \geqslant 1$. Дадим определение.

Определение 1. *Функция $v(x)$ называется слабой частной производной функции $u(x)$ и пишем*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Попробуем дать обоснование введенного понятия. Если в формуле (2.1) функция $u(x)$ принадлежит к классу $\mathbb{C}^k(\Omega)$, т. е. к классу функций непрерывно дифференцируемых $\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ при $|\alpha| \leqslant k$, то при $|\alpha| \leqslant k$ мы можем интегрированием по частям (поскольку функция $\varphi(x)$ вместе со всеми своими производными обращается в нуль на границе области Ω) прийти к следующему равенству:

$$\int\limits_\Omega \partial^\alpha u(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx$$

Отсюда получаем следующее выражение:

$$\int\limits_\Omega \left[v(x) - \partial^\alpha u(x)\right] \varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)\,.$$

Воспользовавшись основной леммой вариационного исчисления, доказанной во второй лекции, получим, что

$$v(x) = \partial^\alpha u(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega,$$

т. е. функция $v(x)$ является *классической* частной производной функции $u(x)$. В общем же случае такого вывода мы сделать не сможем, поскольку в определении слабой производной функция $u(x)$ всего лишь из пространства $L^p(\Omega)$.

Естественно, возникает вопрос о единственности слабой производной. По этому поводу справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Слабая частная производная порядка α функции u, если существует, определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.*

Доказательство.

Пусть $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$ такие, что

$$\int\limits_\Omega u\partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega v_1\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega v_2\varphi\, dx$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (v_1 - v_2)\,\varphi(x)\, dx = 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, откуда $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (0, 2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Покажем, что $u^{'} = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольно $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Надо показать, что

$$\int\limits_0^2 u\varphi^{'}\, dx = -\int\limits_0^2 v\varphi\, dx.$$

Легко вычислить, что

$$\int\limits_0^2 u\varphi^{'}\, dx = \int\limits_0^1 x\varphi^{'}\, dx + \int\limits_1^2 \varphi^{'}\, dx = -\int\limits_0^1 \varphi\, dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int\limits_0^2 v\varphi\, dx.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = (0, 2)$.

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Мы покажем, что производная u' не существует в слабом смысле. Для этого надо показать, что не существует функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ такой, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx \tag{2.2}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Предположим противное. Пусть (2.2) выполняется для некоторой функции v и всех функций φ. Тогда

$$-\int_0^2 v\varphi\,dx = \int_0^2 u\varphi'\,dx = \int_0^1 x\varphi'\,dx + 2\int_1^2 \varphi'\,dx = -\int_0^1 \varphi\,dx - \varphi(1). \tag{2.3}$$

Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ гладких функций таких, что

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив φ на φ_m в (2.3) и полагая $m \to +\infty$, получаем предельное равенство

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to+\infty}\left[\int_0^2 v\varphi_m\,dx - \int_0^1 \varphi_m\,dx\right] = 0,$$

которое противоречиво.

Помимо определения 1 существует такое же употребительное обобщение понятия классической производной, которое мы будем называть *сильной* производной. Дадим следующее определение.

Определение 2. *Функция $v(x) \in L^p(\Omega)$ при $p \geqslant 1$ называется сильной производной α–го порядка от функции $u(x) \in L^p(\Omega)$, если найдется такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, что*

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad \partial^\alpha u_n \to v \quad \textit{сильно в} \quad L^p(\Omega). \tag{2.4}$$

Справедлива следующая теорема, устанавливающая связь между понятиями слабой и сильной производных.

Теорема 1. *Пусть граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ достаточно гладкая. Тогда понятия слабой и сильной производной равносильны.*

Доказательство.

Пусть $v(x)$ — это сильная производная функции $u(x)$. Значит, существует такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad \partial^\alpha u_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Заметим, что для каждой функции $u_n(x) \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$ справедливо равенство:

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_n(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \partial^\alpha u_n(x)\varphi(x)\,dx \tag{2.5}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Поскольку из сильной сходимости в $L^p(\Omega)$ вытекает слабая сходимость в этом же пространстве, то переходя к пределу в равенстве (2.5) при $n \to \infty$ мы получим следующее равенство:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x)\partial^\alpha \varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega),$$

т. е. пришли к определению слабой производной функции $u(x) \in L^p(\Omega)$.

Теперь докажем, что из определения слабой производной вытекает определение сильной производной. Пусть $v(x) \in L^p(\Omega)$ — это слабая производная функции $u(x) \in L^p(\Omega)$:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x)\partial^\alpha \varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2.6}$$

Рассмотрим срезку функции $u(x)$ с параметром срезки $\varepsilon = 1/n$. По поводу определения срезки и ее свойств смотри первую лекцию. Итак,

$$u_n(x) = n^N \int\limits_\Omega \omega(n|x-y|)u(y)\,dy \in \mathbb{C}^\infty(\Omega).$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\partial^\alpha u_n(x) = n^N \int\limits_\Omega \partial_x^\alpha \omega(n|x-y|)u(y)\,dy =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} n^N \int\limits_\Omega \partial_y^\alpha \omega(n|x-y|)u(y)\,dy =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} n^N (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \omega(n|x-y|)v(y)\,dy \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}.$$

Важный момент!!! При переходе к последнему равенству мы воспользовались формулой (2.6), поскольку функция $\omega(n|z|) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$. Теперь осталось воспользоваться теоремой 10 первой лекции и получить, что

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad \partial^\alpha u_n(x) \to v(x) \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega),$$

т. е. мы пришли к определению сильной производной.

Теорема доказана.

Замечание 1. Эквивалентность определений 1 и 2 при достаточной гладкости области Ω открывают широкие возможности. Поскольку удобнее определять обобщенную производную определением 1, а доказывать существование слабой производной исходя из определения 2 — сильной производной.

З а м е ч а н и е 2. В дальнейшем для удобства слабую производную ∂^α функции $u(x) \in L^p(\Omega)$ будем обозначать также, как и классическую производную, т. е. символом $\partial^\alpha u(x)$.

Рассмотрим свойства слабой производной. Прежде всего докажем формулу дифференцирования произведения двух функций. Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2. *Пусть функции $u(x), v(x) \in L^p(\Omega)$ имеют слабые производные $\partial u(x), \partial v(x) \in L^p(\Omega)$ и граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая, тогда справедлива следующая формула*

$$\partial(uv) = u\partial v + v\partial u, \tag{2.7}$$

понимаемая в слабом смысле, т. е. для любой функции $\varphi(x) \in \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega \partial(u(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_\Omega v(x)\partial u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть сначала $v(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$, а функция $u(x) \in L^p(\Omega)$ имеет слабую производную $\partial u(x) \in L^p(\Omega)$. Тогда из теоремы 1 и определения 2 мы получим, что существует такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap \cap L^p(\Omega)$, причем имеет место следующие свойства:

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{и} \quad \partial u_n \to \partial u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда справедлива классическая формула дифференцирования произведения двух функций. Действительно,

$$\partial(u_n v) = u_n\partial v + v\partial u_n.$$

У множим это равенство на произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int\limits_\Omega \partial(u_n(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u_n(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_\Omega v(x)\partial u_n(x)\varphi(x)\,dx. \tag{2.8}$$

Рассмотрим отдельно два слагаемых в правой части равенства (2.8). Действительно,

$$\int\limits_\Omega u_n(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega [u_n(x) - u(x)]\,\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega u(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Рассмотрим интеграл I_1. Справедлива следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_1| \leqslant \int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|\, |\partial v(x)\varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} |\partial v(x)\varphi(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant [\mathrm{meas}(\Omega)]^{1/p'} \sup_{x\in \mathrm{K}} |\partial v(x)\varphi(x)| \left(\int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

Отметим здесь следующий тонкий момент. Функция $\partial v(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ и, естественно, функции из этого класса могут быть неограниченными в окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω, но функция $\varphi(x)$ имеет компактный носитель $\mathrm{K} \Subset \Omega$, и поэтому $\partial v(x) \in \mathbb{C}_b(\mathrm{K})$. Теперь осталось заметить, что из сильной сходимости $u_n \to u$ в $L^p(\Omega)$ интеграл в конце цепочки неравенств для $|\mathrm{I}_1|$ стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)\partial v(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} u(x)\partial v(x)\varphi(x)\, dx.$$

Аналогичным образом, доказывается, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} v(x)\partial u_n(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} v(x)\partial u(x)\varphi(x)\, dx.$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \partial(u_n(x)v(x))\varphi(x)\, dx = -\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)v(x)\partial\varphi(x)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\partial\varphi(x)\, dx.$$

Таким образом, из (2.8) предельным переходом при $n \to +\infty$ мы получим равенство:

$$-\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\partial\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} [u(x)\partial v(x) + v(x)\partial u(x)]\, \varphi(x)\, dx,$$

т.е. имеет место равенство в слабом смысле

$$\partial(u(x)v(x)) = u(x)\partial v(x) + v(x)\partial u(x) \tag{2.9}$$

для функции $u(x) \in L^p(\Omega)$, $\partial u(x) \in L^p(\Omega)$ и $v(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$. Для того чтобы распространить формулу (2.9) на случай $v(x) \in L^p(\Omega)$, $\partial v(x) \in$

$\in L^p(\Omega)$ надо снова взять существующую в силу теоремы 1 последовательность $\{v_n(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ такую, что

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{и} \quad \partial v_n \to \partial v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

И далее воспользоваться той же схемой, что и ранее в доказательстве этой леммы.

Лемма доказана.

Теперь мы докажем важную формулу о слабой производной сложной функции. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть функция $f(t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ и $f'(t) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ и функция $u(x) \in L^p(\Omega)$ и имеет слабую производную $\partial u(x) \in L^p(\Omega)$. Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции*:

$$\partial f(u)(x) = f'(u)\partial u(x). \tag{2.10}$$

Доказательство.

Пусть $\{u_m(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ и

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega), \qquad \partial u_m \to \partial u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда для каждой функции $u_m(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ справедлива формула производной (классической) сложной функции

$$\partial f(u_m)(x) = f'(u_m)\partial u_m(x).$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int\limits_\Omega \partial f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega f'(u_m)\partial u_m(x)\varphi(x)\,dx.$$

Рассмотрим отдельно эти два интеграла. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_\Omega \partial f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_\Omega f(u_m)(x)\partial\varphi(x)\,dx =$$
$$= -\int\limits_\Omega \left[f(u_m)(x) - f(u)(x)\right]\partial\varphi(x)\,dx - \int\limits_\Omega f(u)(x)\partial\varphi(x)\,dx. \tag{2.11}$$

Заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$\left|f(u_m)(x) - f(u)(x)\right| \leqslant c\left|u_m(x) - u(x)\right|,$$

поскольку $f'(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$. Поэтому имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_\Omega \left[f(u_m)(x) - f(u)(x)\right]\partial\varphi(x)\,dx\right| \leqslant c\int\limits_\Omega \left|u_m(x) - u(x)\right|\partial\varphi(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\mathrm{K}^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |u_m(x) - u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \to 0, \quad \operatorname{supp}\{\varphi\} \subset \mathrm{K}$$

при $m \to +\infty$ по построению последовательности $\{u_m\}$. Поэтому из (2.11) вытекает, что

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \partial f(u_m)(x)\varphi(x)\, dx = -\int\limits_{\Omega} f(u)(x)\partial\varphi(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f^{'}(u_m)\partial u_m(x)\varphi(x)\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \left[f^{'}(u_m)\partial u_m(x) - f^{'}(u)\partial u(x)\right] \varphi(x)\, dx + \int\limits_{\Omega} f^{'}(u)\partial u(x)\varphi(x)\, dx. \tag{2.13}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left[f^{'}(u_m)\partial u_m(x) - f^{'}(u)\partial u(x)\right] \varphi(x)\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \int\limits_{\mathrm{K}} \left|f^{'}(u_m) - f^{'}(u)\right| |\partial u_m(x)| \, dx +$$
$$+ c_1 \int\limits_{\mathrm{K}} |\partial u_m(x) - \partial u(x)| \left|f^{'}(u)(x)\right| \, dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2, \quad c_1 = \sup_{x\in\mathrm{K}} |\varphi(x)|. \tag{2.14}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств для I_2 :

$$\mathrm{I}_2 \leqslant c_1 \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |\partial u_m(x) - \partial u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} \left|f^{'}(u)\right|^{p^{'}}\right)^{1/p^{'}} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 c_2 \mathrm{K}^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |\partial u_m(x) - \partial u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Теперь заметим, что последовательность $\{u_m\} \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ и, поэтому для любого компакта $\mathrm{K} \Subset \Omega$ имеем $\{u_m\} \in \mathbb{C}^1(\mathrm{K})$ и, в частности, $\partial u_m \in \in L^\infty(\mathrm{K})$. В следующих оценках мы будем использовать этот факт. Рассмотрим теперь I_1 из (2.14)

$$\mathrm{I}_1 = c_1 \int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u_m) - f^{'}(u) \right| |\partial u_m(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 c_3 \mathrm{K}^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u_m) - f^{'}(u) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

Поскольку последовательность u_m сильно сходится к u в $L^p(\Omega)$ с $p \in \in [1, +\infty]$, то в силу результата второй лекции вытекает, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{m_n}\} \subset \{u_m(x)\}$, что $u_{m_n}(x)$ сходится почти всюду к $u(x)$ на Ω. Поскольку $f^{'}(t) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^1\right)$, то приходим к выводу, что

$$f^{'}\left(u_{m_n}\right)(x) \to f^{'}(u)(x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, по теореме Лебега приходим к выводу, что

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_1(u_{m_n}) = 0.$$

Таким образом, из (2.13) вытекает, что

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{\Omega} f^{'}(u_{m_n}) \partial u_{m_n}(x) \varphi(x) \, dx = \int\limits_{\Omega} f^{'}(u) \partial u(x) \varphi(x) \, dx.$$

Значит, пришли к следующему равенству

$$-\int\limits_{\Omega} f(u)(x) \partial \varphi(x) \, dx = \int\limits_{\Omega} f^{'}(u) \partial u(x) \varphi(x) \, dx.$$

А отсюда и вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

§ 3. Пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathbb{W}^{-k,p'}(\mathbb{R}^N)$

Начнем изучение пространств С. Л. Соболева с пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Наши результаты из первого параграфа остаются, конечно, в силе. Достаточно положить везде $\Omega = \mathbb{R}^N$. Дадим определение.

Определение 3. *Посредством* $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ *мы обозначим векторное подпространство в* $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u(x) \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N) : \ \partial^\alpha u(x) \in L^p(\mathbb{R}^N), \ |\alpha| \leqslant k \right\} \tag{3.1}$$

при $p \in [1, +\infty]$. В нашем определении пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ оно является векторным подпространством, кстати говоря, пока тоже лишь векторного пространства $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$. Возникает вопрос: как можно «топологизировать» пространство $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ и как эта топология связана с сильной топологией пространства $\left(\mathcal{D}^{'}_s, \tau^*_s\right)$?

Напомним, что согласно определению 1 слабой производной у нас имеются следующие равенства:

$$(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_\alpha(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant k. \tag{3.2}$$

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между локально выпуклыми пространствами $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Тогда равенство (3.2) можно переписать в следующем виде:

$$\langle v_\alpha^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_\alpha(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \tag{3.3}$$

где $v_\alpha(x) = \partial^\alpha u(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ — слабая частная производная в смысле определения 1, а распределения $v_\alpha^* \in \mathcal{D}'$ является регулярным, причем его локально интегрируемым представителем является функция $v_\alpha(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ поскольку имеет место очевидное вложение $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ при $p \geqslant 1$. Действительно, равенство (3.2) можно продолжить на функции из $\mathcal{D}$, поскольку векторное пространство $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ плотно в локально выпуклом пространстве $(\mathcal{D},\tau)$, где τ — есть топология строгого индуктивного предела (см. лекцию 5).

Теперь заметим, что имеет место плотное вложение

$$\left(\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right),\tau\right) \overset{ds}{\subset} L^{p'}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{при} \quad p \in (1,+\infty), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{3.4}$$

Из четвертой лекции нам известно, что сильная топология в векторном пространстве $\mathcal{D}'$ задается, несчетным числом полунорм вида

$$p(f^*) = \sup_{\varphi\in \mathrm{B}} |\langle f^*, \varphi\rangle|, \tag{3.5}$$

где B — это произвольное ограниченное множество в $\mathcal{D}$. Докажем, что всякое множество $\mathbb{B}$ ограниченное в $\mathcal{D}$ является тем более ограниченным в $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ в сильной топологии этого пространства (т. е. по норме). Действительно, это следствие простейших рассуждений. Пусть B — это ограниченное множество в $\mathcal{D}$, следовательно, из теоремы 2 (III) четвертой лекции найдется такой компакт $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$ и такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что множество B принадлежит $\mathcal{D}(K)$ и является ограниченным в пространстве $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$, т. е. имеет место неравенство

$$p_n(\varphi) = \max_{|\alpha|\leqslant n}\sup_{x\in \mathrm{K}} |\partial^\alpha\varphi(x)| \leqslant \mathrm{M}_n < +\infty \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathrm{B},$$

где $\mathrm{M_n}$ не зависит от B. Но тогда для всех $\varphi \in \mathrm{B}$ имеет место цепочка следующих выражений:

$$\|\varphi\|_{p'} \equiv \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} = \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |\varphi(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{K}^{1/p'} \sup_{x\in \mathrm{K}} |\varphi(x)| \leqslant p_n(\varphi) \leqslant \mathrm{M}_n \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathrm{B}.$$

Таким образом, каждое множество B, ограниченное в $\mathcal{D}$, является ограниченным в $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. С другой стороны, из плотного вложения (3.4) из теоремы 12 четвертой лекции вытекает вложение

$$L^p(\mathbb{R}^N) \overset{ds}{\subset} \left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right). \tag{3.6}$$

Поэтому, если $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$, то формула (3.5) определяет полунорму на банаховом пространстве $L^p(\mathbb{R}^N)$ (в сильной топологии этого пространства).

Рассмотрим построенные функционалы из формулы (3.3). Поскольку $v^*_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^N)$, то следующее выражение представляет по доказанному полунорму в сильной топологии на банаховом пространстве $L^p(\mathbb{R}^N)$:

$$p(v^*_\alpha) = \sup_{\varphi\in \mathrm{B}} |\langle v^*_\alpha, \varphi\rangle| = \sup_{\varphi\in \mathrm{B}} \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_\alpha(x)\varphi(x)\, dx\right|. \tag{3.7}$$

Теперь заметим, что по доказанному множество B является ограниченным в сильной топологии банахова пространства $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, но всякое ограниченное множество в $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ принадлежит следующему множеству:

$$\mathrm{B} \equiv \left\{ \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^N) \left| \ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} \leqslant \mathrm{M} \right.\right\}.$$

Поэтому без ограничения общности можно считать, что для ограниченного множества B имеет место вложение:

$$\mathrm{B} \subset \left\{ \varphi \in \mathcal{D} \left| \ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} \leqslant 1 \right.\right\}.$$

Следовательно, отсюда и из (3.4) заключаем, что для полунормы (3.7) имеет место неравенство

$$p(v_\alpha^*) = \sup_{\varphi \in \mathrm{B}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_\alpha(x)\varphi(x)\,dx \right| \leqslant \sup_{\|\varphi\|_{p'} \leqslant 1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_\alpha(x)\varphi(x)\,dx \right|. \tag{3.8}$$

Но правая часть последнего выражения по теореме 27 второй лекции является нормой на пространстве $L^p(\mathbb{R}^N)$. Тем самым мы пришли к выводу, что

$$p(v_\alpha^*) \leqslant \|v_\alpha\|_p. \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь полунорму на пространстве $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ в относительной сильной топологии τ_s^* пространства $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$. Действительно, например, такая

$$p(\partial^\alpha u) = \sup_{\varphi \in \mathrm{B}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha u(x)\varphi(x)\,dx \right| \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant k \tag{3.10}$$

для всех $u(x) \in \mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, причем из формулы (3.9) вытекает неравенство

$$p(\partial^\alpha u) \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|v_\alpha\|_p. \tag{3.11}$$

Теперь если топологию на пространстве $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ задать нормой

$$\|u\|_{k,p} \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|v_\alpha\|_p, \tag{3.12}$$

то из неравенства (3.11) вытекает неравенство

$$p(\partial^\alpha u) \leqslant \|u\|_{k,p} \quad \text{для всех} \quad u(x) \in \mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N), \quad |\alpha| \leqslant k,$$

из которого в силу произвольности полунормы $p(f^*)$, определенной формулой (3.5), в частности, вытекает, что оператор дифференцирования ∂^α является непрерывным отображением из $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (в относительной топологии пространства $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$) в пространство $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что на пространстве $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ может быть задана другая норма, эквивалентная норме (3.12):

$$\|u\|_{k,p} \equiv \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|v_\alpha\|_p^p \right)^{1/p}. \tag{3.13}$$

Докажем теперь полноту пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ относительно введенной нормы (3.12). Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пространство $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ является банаховым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Прежде всего отметим, что поскольку пространство $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ является метризуемым, поэтому нам можно рассматривать не произвольные направленности Коши, а произвольные последовательности Коши.

Итак, пусть $\{u_n\} \subset \mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ фундаментальная последовательность относительно нормы (3.12). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех натуральных $n, m \geqslant n_0$ имеет место неравенство:

$$\|u_n - u_m\|_{k,p} \leqslant \varepsilon. \tag{3.14}$$

Но тогда из явного вида нормы (3.12) вытекают неравенства

$$\|\partial^\alpha u_n(x) - \partial^\alpha u_m(x)\|_p \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad |\alpha| \leqslant k.$$

Следовательно, последовательности $\{\partial^\alpha u_n(x)\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ являются фундаментальными, тогда из полноты $L^p(\mathbb{R}^N)$ вытекает, что для каждого α при $|\alpha| \leqslant k$ найдется такой элемент $v_\alpha(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, что

$$\partial^\alpha u_n \to v_\alpha \quad \text{сильно в} \quad L^p(\mathbb{R}^N). \tag{3.15}$$

Положим теперь $v_{\{0,\ldots,0\}}(x) \equiv u(x)$. Тогда из (3.15) вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\mathbb{R}^N). \tag{3.16}$$

Сопоставим последовательности $\{u_n(x)\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ регулярные распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ по следующей формуле:

$$\langle u_n, \varphi \rangle \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Заметим, что имеет место вложение $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Тогда из (3.16) вытекает, что

$$\partial^\alpha u_n \rightharpoonup \partial^\alpha u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathcal{D}'_{w^*}(\mathbb{R}^N).$$

С другой стороны, из (3.15) вытекает, что

$$\partial^\alpha u_n \rightharpoonup v_\alpha \quad * -\text{слабо в} \quad \mathcal{D}'_{w^*}(\mathbb{R}^N).$$

Значит, в силу отделимости пространства $\left(\mathcal{D}'_{w^*}(\mathbb{R}^N), \tau^*_{w^*}\right)$ приходим к выводу, что

$$v_\alpha = \partial^\alpha u(x) \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{для всех} \quad |\alpha| \leqslant k.$$

Теорема доказана.

Важным вопросом в теории соболевских пространств являются теоремы о плотности, вложений и интерполяции. Сейчас мы перейдем к исследованию вопросов о плотности.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Имеет место плотное вложение*:

$$(\mathcal{D}, \tau) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \textit{при} \quad p \in [1, +\infty).$$

Доказательство.

Действительно, рассмотрим следующую срезку:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy.$$

Но если функция $u(x) \in \mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, то у этой функции существуют все слабые частные производные $\partial^\alpha u(x)$ при $|\alpha| \leqslant k$. Поэтому имеет место следующая цепочка равенств:

$$\partial^\alpha u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial_x^\alpha \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy = \\ = (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial_y^\alpha \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy = \\ = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \partial^\alpha u(y)\, dy,$$

где мы воспользовались интегрированием по частям. Теперь из теоремы 39 второй лекции получим, что

$$u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right), \quad \partial^\alpha u_\varepsilon \to \partial^\alpha u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\mathbb{R}^N) \quad |\alpha| \leqslant k.$$

Тем самым доказано, что имеет место плотное вложение

$$\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

но, с другой стороны, имеет место плотное вложение

$$\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} (\mathcal{D}, \tau)$$

и, кроме того, вложение

$$(\mathcal{D}, \tau) \subset \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Следовательно,

$$(\mathcal{D}, \tau) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теорема доказана.

Получать новые пространства С. Л. Соболева можно получать из уже имеющихся двумя способами: методом двойственности и интерполяции. К настоящему моменту у нас имеется пространство $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Сейчас мы воспользуемся методом двойственности. Дадим определение.

Определение 4. *Через* $\mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *мы обозначили пространство линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством* $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *при* $k \in \mathbb{N}$ *и* $p \in (1, +\infty)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Функционал $f^* \in \mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функции $g_\alpha(x) \in L^{p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ для всех $\alpha : |\alpha| \leqslant k$, что имеет место представление*:

$$f^*(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \partial^\alpha g_\alpha(x). \tag{3.17}$$

Доказательство.

Необходимость. Необходимость доказана в работе [3]. Это достаточно трудоемкое и технически сложное доказательство. Заметим, только, что если относительно f^* известно, что оно имеет компактный носитель, то имеет место представление (3.17).

Достаточность. Пусть имеет место представление (3.17). Тогда для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} |\langle \partial^\alpha g_\alpha(x), \varphi(x)\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} |\langle g_\alpha(x), \partial^\alpha \varphi(x)\rangle| = \\ = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |g_\alpha(x)|\, |\partial^\alpha \varphi(x)|\, dx \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |g_\alpha(x)|^{p'}\, dx \right)^{1/p'} \times \\ \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\partial^\alpha \varphi(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} c_\alpha \|\partial^\alpha \varphi\|_p^p. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Теперь отметим, что банахово пространство $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ является борнологическим в силу очевидной метризуемости этого пространства Следовательно, из борнологичности пространства $\mathbb{C}^1$ линейное отображение

$$f^* : \mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}^1$$

является непрерывным тогда и только тогда, когда из сильной сходимости к нулю произвольной последовательности $\{\varphi_n\} \subset \mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ вытекает, что

$$\langle f^*, \varphi_n\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Но из (3.18) мы пришли к неравенству

$$|\langle f^*, \varphi_n\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} c_\alpha \|\partial_n^\alpha \varphi\|_p^p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тем самым, $f^* \in \mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Теорема доказана.

Следствие из теоремы 3. *Из четвертой лекции $(\mathcal{D}, \tau)$ вытекает плотное вложение*

$$\mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} \left(\mathcal{D}_s^{'}, \tau^*\right) \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad p \in (1, +\infty),$$

где пространство $\mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *введенное в определении 4, наделено сильной относительной топологией* τ^* *пространства* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$.

Давайте попробуем охарактеризовать сильную относительную топологию τ^* пространства $\mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ как плотного подмножества локально выпуклого пространства $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$.

Прежде всего докажем, что произвольное ограниченное множество из $(\mathcal{D}, \tau)$ является ограниченным и в $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Действительно, пусть $\mathrm{B} \subset \mathcal{D}$ и ограничено в топологии τ пространства $(\mathcal{D}, \tau)$. Следовательно, из теоремы 2 (III) пятой лекции вытекает, что найдется такой компакт $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^N$, что $\mathrm{B} \subset (\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ и полунорма

$$p_k(\varphi) = \max_{|\beta|\leqslant k} \sup_{x\in \mathrm{K}} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| \leqslant \mathrm{M}_k < +\infty$$

для всех $\varphi \in \mathrm{B}$ и постоянная M_n равномерно ограничена для всех $\varphi \in \in \mathrm{B}$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{|\beta|\leqslant k} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right|^p\, dx\right)^{1/p} = \sum_{|\beta|\leqslant k} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{K}^{1/p} \sum_{|\beta|\leqslant k} \sup_{x\in\mathrm{K}} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right| \leqslant \mathrm{K}^{1/p} k p_k(\varphi) \leqslant \mathrm{M} p_k(\varphi), \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathrm{B}.$$

Значит, множество B ограничено и в $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Без ограничения общности можно считать, что имеет место следующее вложение:

$$\mathrm{B} \subset \left\{\varphi \in \mathcal{D} : \ \|\varphi\|_{k,p} \leqslant 1\right\}. \tag{3.19}$$

Общий вид полунормы из несчетного семейства полунорм, порождающих сильную топологию пространства $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$, следующий:

$$p(f^*) = \sup_{\varphi\in\mathrm{B}} \left|\langle f^*, \varphi\rangle\right|, \tag{3.20}$$

где B — произвольное ограниченное множество из $(\mathcal{D}, \tau)$. Но если $f^* \in \in \mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$, то в силу теоремы 4 имеет место представление

$$f^*(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \partial^\alpha g_\alpha(x). \tag{3.21}$$

Подставим (3.21) в (3.20), воспользуемся (3.19), а также результатом теоремы 3 и получим следующую цепочку неравенств:

$$p(f^*) = \sup_{\varphi\in\mathrm{B}} \left|\langle f^*, \varphi\rangle\right| \leqslant \sup_{\|\varphi\|_{k,p}\leqslant 1} \left|\langle f^*, \varphi\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{\|\varphi\|_{k,p}\leqslant 1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} g_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx \right| \equiv \|f^*\|_{-k,p'},$$

т. е. мы пришли к следующему неравенству

$$p(f^*) \leqslant c\|f^*\|_{-k,p'}, \tag{3.22}$$

где $c > 0$ зависит лишь от выбора полунормы p на $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$. Отметим, что отсюда мы сразу же получаем, что если на пространстве $\mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ выбрать норму следующим образом

$$\|f^*\|_{-k,p'} \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{\|\varphi\|_{k,p}\leqslant 1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} g_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx \right|, \tag{3.23}$$

то из (3.22) вытекает, что оператор вложения

$$\mathrm{J}_{k,p} : \mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right) \to \left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$$

является непрерывным. Более того, топология, порожденная нормой (3.23), является наименее сильной, при которой оператор вложения $\mathrm{J}_{k,p}$ непрерывен. Причем эта норма порождает на пространстве $\mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ тужу топологию, что и относительная топология τ^*, как подмножества локально выпуклого пространства $\left(\mathcal{D}'_s, \tau^*_s\right)$.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой имеется в работе [21].

Теорема 5. *Пространство* $\mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *является банаховым относительно нормы* (3.23).

Дадим следующие определения сильной, слабой и $*-$слабой сходимостей, определения которых и общие свойства которых нами были рассмотрены в шестой лекции.

Определение 6. *Сильной сходимостью последовательности* $\{u_n\}$ *в банаховом пространстве* $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in [1,+\infty]$ *к некоторому элементу* $u \in \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *называется сходимость по норме следующей числовой последовательности:*

$$\|u_n - u\|_{k,p} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty \quad \textit{для} \quad u \in \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{3.24}$$

Определение 7. *Последовательность* $\{u_n\} \subset \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in [1,+\infty)$ *называется слабо сходящейся к некоторому элементу* $u \in \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *если для любого элемента* $f^* \in \mathbb{W}^{-k,p'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *имеем*

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle. \tag{3.25}$$

Определение 8. *Последовательность элементов* $\{f^*_n\} \subset \mathbb{W}^{-k,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $*-$*слабо сходится к некоторому элементу* $f \in$

$\in \mathbb{W}^{-k,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *если для любого* $u \in \mathbb{W}^{k,1}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *имеет место предельное равенство*

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f, u\rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.26}$$

Справедливы следующие результаты, доказательство которых в общем виде имеются в шестой лекции.

Теорема 6. *Справедливы следующие два утверждения*:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$\text{то} \quad \|u_\infty\|_{k,p} \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|_{k,p};$$

(ii) *Всякая* $*-$*слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{W}^{-k,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$\text{то} \quad \|f_\infty\|_{-k,\infty} \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{-k,\infty}.$$

Сравни с теоремой 2 шестой лекции.

Теорема 7. *Пусть* $\{u_n\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства* $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *при* $p \in (1, +\infty)$ *и* $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда из* $\{u_n\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *подпоследовательность* $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Сравни с теоремой 4 шестой лекции.

Теорема 8. *Пусть* $\{f_n\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства* $\mathbb{W}^{-k,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Тогда из* $\{f_n\}$ *можно выделить* $*-$*слабо сходящуюся в* $\mathbb{W}^{-k,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *подпоследовательность* $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{W}^{-k,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Сравни с теоремой 5 шестой лекции.

Можно доказать *равномерную выпуклость* банаховых пространств $\mathbb{W}^{k,p}$ при $k \in \mathbb{N}$ и $p \in (1, +\infty)$. Поэтому в силу теоремы 3 шестой лекции имеет место следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $p \in (1, +\infty)$, *то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\|u_n\|_{k,p} \to \|u\|_{k,p}$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

На этом мы закончим изучение пространства $\mathbb{W}^{k,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

§ 4. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [3], [7], [9], [10], [17], [25], [33] и [34].

Лекция 15

ВЛОЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ С. Л. СОБОЛЕВА

§ 1. Теоремы вложения $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$

Теперь мы переходим к изучению пространств С. Л. Соболева в произвольных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Дадим определение.

Определение 9. *Посредством* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ *мы обозначим векторное подпространство в* $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^\alpha u(x) \in L^p(\Omega), \ |\alpha| \leqslant k \right\}. \tag{1.1}$$

Замечание 5. Отметим, что далеко не все результаты предыдущего параграфа, полученные для пространств $\mathbb{W}^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathbb{W}^{-k,p'}(\mathbb{R}^N)$, остаются справедливыми с заменой евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ на произвольную область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Дело заключается в том, что пространство $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ не плотно в $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$. Поэтому надо быть достаточно осторожным. Прежде всего надо заменить везде пространство $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \tau)$ на $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$, пространство $\left(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tau^*\right)$ на $\left(\mathcal{D}'(\Omega), \tau^*\right)$, пространство $\left(\mathcal{D}'_{w^*}(\mathbb{R}^N), \tau^*_{w^*}\right)$ на пространство $\left(\mathcal{D}'_{w^*}(\Omega), \tau^*_{w^*}\right)$.

Так что в этой части лекции мы введем еще один тип пространств С. Л. Соболева — банахово пространство $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, а также займемся вопросами теории *вложения* соболевских пространств и некоторыми результатами теории *интерполяции* соболевских пространств. Дадим определение.

Определение 10. *Посредством* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ *мы обозначим векторное пространство, полученное пополнением векторного пространства* $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ *по норме* $\|\cdot\|_{k,p}$ *пространства* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$.

По своему построению пространство $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ является банаховым относительно нормы (3.12). Заметим, что множество

$$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \backslash \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \neq \varnothing.$$

Рассмотрим теперь одну из самых важных теорем вложения соболевских пространств. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Имеют место вложения*:

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \quad \text{при} \quad N > p, \quad p^* = \frac{Np}{N-p},$$

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{при} \quad N < p.$$

Причем имеют место следующие неравенства:

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c\||\nabla u|\|_p \quad \text{при} \quad N > p; \tag{1.2}$$

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant c\,(\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}\,\||\nabla u|\|_p \quad \text{при} \quad N < p. \tag{1.3}$$

Доказательство.

Докажем неравенство (1.2) для функций $u(x) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$. Заметим, что эту функцию можно продолжить нулем вне области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Прежде всего справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{x_i} dy_i\ |\partial_i u(y)|\,.$$

$N-$раз перемножим это неравенство и получим следующее

$$|u(x)|^N \leqslant \prod_{i=1}^N \int\limits_{-\infty}^{x_i} dy_i\ |\partial_i u(y)| \leqslant \prod_{i=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i\ |\partial_i u(y)|\,.$$

Теперь возведем обе части этого неравенства в степень $(N-1)^{-1}$ и получим неравенство

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leqslant \left(\prod_{i=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i\ |\partial_i u(y)|\right)^{1/(N-1)}. \tag{1.4}$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x_1 и тогда получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)}\ dx_1 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_1 \left(\prod_{i=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i\ |\partial_i u(y)|\right)^{1/(N-1)}. \tag{1.5}$$

Сейчас воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера. Напомним, как оно выглядит для наших целей:

$$\int\limits_G |f_2(x)\cdots f_N(x)|\ dx \leqslant \|f_2\|_{p_2}\|f_3\|_{p_3}\cdots\|f_N\|_{p_N}, \quad \frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\cdots\frac{1}{p_N}=1. \tag{1.6}$$

Теперь воспользуемся этим неравенством для того чтобы оценить правую часть неравенства (1.5), положив в обобщенном неравенстве Гельдера (1.6)

$$p_2 = N-1, ..., p_N = N-1, \quad \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} + \cdots \frac{1}{N-1} = 1,$$

а в качестве функций $f_k(x)$ возьмем следующие интегралы:

$$f_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_k \, |\partial_k u(y)| \; dy_1, \quad k = \overline{2, N-1}.$$

Из выражения (1.5) и обобщенного неравенства Гельдера вытекает цепочка неравенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)} \; dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\partial_1 u(x)| \; dx_1 \right)^{1/(N-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_2(x) f_3(x) \cdots f_N(x) \, dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\partial_1 u(x)| \; dx_1 \right)^{1/(N-1)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \; dx_1 dx_2 \right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \; dx_1 dx_N \right)^{1/(N-1)} \tag{1.7}$$

Теперь проинтегрируем неравенство (1.7) по переменной x_2 и получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)} \; dx_1 \, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 \, |\partial_2 u(x)| \; dx_1 dx_2 \right)^{1/(N-1)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\partial_1 u(x)| \; dx_1 \right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \; dx_1 dx_N \right)^{1/(N-1)}$$

Воспользовавшись опять обобщенным неравенством Гельдера получим отсюда неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\partial_3 u(x)|\, dx_1 dx_2 dx_3\right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_N u(x)|\, dx_1 dx_2 dx_N\right)^{1/(N-1)}$$

Продолжая дальше интегрирование по следующей переменной с последующим применением обобщенного неравенства Гельдера мы в итоге получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx \leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, |\partial_i u(x)|\right)^{1/(N-1)}.$$

Отсюда приходим к следующему неравенству:

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\partial_1 u(x)|\, dx \times \cdots \times \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\partial_N u(x)|\, dx\right)^{1/N}. \qquad (1.8)$$

Теперь воспользуемся тем, что среднее арифметическое всегда больше среднего геометрического неотрицательных чисел:

$$(a_1 a_2 \cdots a_N)^{1/N} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N}.$$

Тогда из неравенства (1.8) получим, что

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\partial_i u(x)|\, dx. \qquad (1.9)$$

Теперь можно воспользоваться легко проверяемым неравенством для неотрицательных чисел:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда и из (1.9) получим следующее неравенство:

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|\, dx. \qquad (1.10)$$

Следовательно, неравенство (1.2) при $p = 1$ доказано. Для доказательства этого неравенства при $p > 1$ вместо функции u в (1.10) надо подставить функцию $|u|^{\beta}$. Тогда получим неравенство

$$\||u|^{\beta}\|_{N/(N-1)} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} |\nabla u| \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left\||u|^{\beta-1}\right\|_{p'} \||\nabla u|\|_p, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \qquad (1.11)$$

Относительно $\beta > 1$ потребуем, чтобы

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1) \frac{p}{p-1} \Rightarrow \beta = \frac{p(N-1)}{N-p}.$$

Можно доказать, что при $p > 1$ величина $\beta > 1$. Кроме того, имеет место выражения:

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1) \frac{p}{p-1} = p^* \equiv \frac{Np}{N-p} \quad \text{при} \quad N > p.$$

Следовательно, из (1.11) приходим к неравенству:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{(N-1)/N} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{(p-1)/p} \||\nabla u|\|_p,$$

из которого сразу же вытекает неравенство (1.2).

Приступим теперь к доказательству неравенства (1.3). Область Ω будем считать ограниченной. С этой целью рассмотрим неравенство (1.11), в котором сделаем замену функций

$$\overline{u}(x) = \frac{\sqrt{N}\, |u|}{\||\nabla u|\|_p},$$

После подстановки получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\beta/2} \||\nabla u|\|_p^{\beta} \||\overline{u}|^{\beta}\|_{N'} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_p \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\beta-1}{2}} \||\nabla u|\|_p^{\beta-1} \||\overline{u}|^{\beta-1}\|_{p'},$$

где

$$N' \equiv \frac{N}{N-1},$$

откуда сразу же приходим к неравенству

$$\||\overline{u}|^{\beta}\|_{N'} \leqslant \gamma \||\overline{u}|^{\beta-1}\|_{p'}, \qquad (1.12)$$

которое «расшифруем»:

$$\left(\int\limits_\Omega |\overline{u}|^{\beta N'}\,dx\right)^{1/N'} \leqslant \beta\left(\int\limits_\Omega |\overline{u}|^{p'(\beta-1)}\,dx\right)^{1/p'}.$$

Следовательно получим следующее неравенство:

$$\|\overline{u}\|^{\beta}_{\beta N'} \leqslant \beta\|\overline{u}\|^{\beta-1}_{p'(\beta-1)} \Rightarrow \|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta}\|\overline{u}\|^{1-1/\beta}_{p'(\beta-1)}. \qquad (1.13)$$

Теперь сделаем важное предположение, от которого мы затем в конце доказательства избавимся — пусть

$$\operatorname{meas}\{\Omega\} = 1.$$

Полезность этого предположения заключается в том, что если $p_1 > p_2$, то справедливо неравенство

$$\|v\|_{p_2} \leqslant \|v\|_{p_1} \quad \text{для всех} \quad v(x) \in L^{p_1}(\Omega).$$

Действительно, справедлива цепочка неравенств:

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2} = \left(\int\limits_\Omega 1\cdot|u|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_\Omega 1^{q'}\,dx\right)^{1/q'}\left(\int\limits_\Omega |u|^{p_1}\,dx\right)^{p_2/p_1}\right)^{1/p_2} \leqslant \left(\int\limits_\Omega |u|^{p_1}\,dx\right)^{1/p_1},$$

где

$$q' = \frac{q}{q-1}, \quad q = \frac{p_1}{p_2}.$$

С учетом этого предположения из неравенства (1.13) получим

$$\|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta}\|\overline{u}\|^{1-1/\beta}_{p'\beta}, \qquad (1.14)$$

здесь мы воспользовались неравенством $p'(\beta-1) \leqslant p'\beta$. Теперь введем обозначение:

$$\varepsilon = \frac{N'}{p'} > 1, \quad \beta = \varepsilon^m.$$

поскольку $p > N$ и учтем, что

$$\beta p' = \varepsilon^{m-1}N'.$$

Тогда из (1.14) получим неравенство:

$$\|\overline{u}\|_{\varepsilon^m N'} \leqslant \varepsilon^{m/\varepsilon^m}\|\overline{u}\|^{1-1/\varepsilon^m}_{\varepsilon^{m-1}N'} \quad \text{при} \quad m = 1, 2, \ldots \qquad (1.15)$$

Возьмем в этом неравенстве $m = 1$ и получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon} \|\overline{u}\|_{N'}^{1-1/\varepsilon}. \tag{1.16}$$

С другой стороны, из неравенства (1.10) и нашего предположения, что $\mathrm{meas}\{\Omega\} = 1$, получим неравенство

$$\|u\|_{N'} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_p.$$

Отсюда сразу же приходим к неравенству

$$\|\overline{u}\|_{N'} \leqslant 1.$$

Значит из (1.16) приходим к неравенству:

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon}. \tag{1.17}$$

Тогда после подстановки этого неравенства в (1.15) при $m = 2$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2} \left(\varepsilon^{1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2+1/\varepsilon}.$$

Тогда после подстановки этого неравенства в (1.15) при $m = 3$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^3} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3} \left(\varepsilon^{2/\varepsilon^2+1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3+2/\varepsilon^2+1/\varepsilon}.$$

Следовательно, на m—том шаге мы получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^m} \leqslant \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{m} k/\varepsilon^k} \leqslant a \equiv \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k/\varepsilon^k}$$

Из теоремы 6 первой лекции перейдя к пределу при $m \to +\infty$, получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_{\infty} \leqslant a.$$

Отсюда с учетом определения функции $\overline{u}(x)$ получим неравенство:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant \frac{a}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_p.$$

Теперь избавимся от требования $\mathrm{supp}\{\Omega\} = 1$. Сделаем замену переменной

$$y_i = \mathrm{meas}(\Omega)^{1/N} x_i \quad i = \overline{1, N}.$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant \frac{a}{\sqrt{N}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{N}} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{(\mathrm{meas}(\Omega))^{p/N}}{\mathrm{meas}(\Omega)} |\nabla_y u|^p \; dy\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{N}}\,[\mathrm{meas}(\Omega)]^{1/N-1/p}\,\||\nabla u|\|_p.$$

Мы доказали наши неравенства для случая функции $u(x) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$. Теперь нужно продолжить эти результаты для функций из $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим неравенство (1.2), поскольку неравенство (1.3) рассматривается аналогичным образом.

Пусть последовательность

$$\{u_m\} \subset \mathbb{C}_0^1(\Omega)$$

такова, что она сходится сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Возьмем $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и применим неравенство (1.2) к разности $u_{m_1} - u_{m_2}$ и получим

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\,\||\nabla u_{m_1} - \nabla u_{m_2}|\|_p \quad p^* = \frac{Np}{N-p}. \tag{1.18}$$

Поскольку последовательность $\{u_m\}$ сходится в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, то она фундаментальна в этом пространстве, следовательно, из неравенства (1.18) вытекает, что эта последовательность фундаментальна и в $L^{p^*}(\Omega)$ и в силу полноты этого пространства сходится сильно к некоторому элементу $u(x) \in L^{p^*}(\Omega)$. С другой стороны, этот же элемент $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, поскольку по условию последовательность сходится сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, а норма этого пространства имеет вид

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \||\nabla u|\|_p.$$

Следовательно, мы можем перейти к пределу при $m_1 \to +\infty$ в неравенстве (1.18) и получить следующее неравенство:

$$\|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\,\||\nabla u - \nabla u_{m_2}|\|_p\,. \tag{1.19}$$

Тем самым, отсюда вытекает неравенство

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \|u_{m_2}\|_{p^*} + \|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\||\nabla u_{m_2}|\|_p + c\||\nabla u - \nabla u_{m_2}|\|_p,$$

в котором можно перейти к пределу при $m_2 \to +\infty$ и воспользовавшись неравенством

$$|\||\nabla u_{m_2}|\|_p - \||\nabla u|\|_p| \leqslant \||\nabla u - \nabla u_{m_2}|\|_p$$

прийти к следующему неравенству:

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c\||\nabla u|\|_p \quad \text{для всех} \quad u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Как мы уже говорили, неравенство (1.3) распространяется на функции из $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ аналогичным образом.

Теорема доказана.

Непосредственным следствием этой теоремы является следующая важная теорема о вложении.

Теорема 11. *Имеют место вложения*:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset L^{Np/(N-kp)}(\Omega) \quad \textit{при} \quad N > kp; \tag{1.20}$$

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^m(\overline{\Omega}) \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant m \leqslant k - \frac{N}{p}. \tag{1.21}$$

Доказательство.

Докажем сначала вложение (1.20). Пусть $N > kp$. Итак, из теоремы 13 у нас имеется вложение

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{Np/(N-p)}(\Omega). \tag{1.22}$$

По определению пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ все слабые частные производные $\partial^\beta u$ при $|\beta| \leqslant k-1$ принадлежат пространству $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Следовательно, в силу (1.22) имеет место вложение:

$$\partial^\beta u(x) \in L^{p^*}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant k-1 \quad \text{и} \quad p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Значит,

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{k-1,p^*}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p^*}(\Omega) \quad \text{при} \quad k > 1.$$

Теперь снова воспользуемся вложением (1.22) и получим новое вложение:

$$\mathbb{W}_0^{1,p^*}(\Omega) \subset L^{Np^*/(N-p^*)}(\Omega). \tag{1.23}$$

Займемся арифметикой.

$$\frac{Np^*}{N-p^*} = \frac{N^2 p}{N-p}\frac{1}{N - Np/(N-p)} = \frac{N^2 p}{N^2 - 2Np} = \frac{Np}{N-2p}.$$

Теперь воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что мы доказали вложение (1.20) при $k = m-1$. Докажем, что отсюда вытекает вложение (1.20) при $k = m$. Действительно, в силу предположения индукции имеем вложение:

$$\mathbb{W}_0^{m-1,p}(\Omega) \subset L^{Np/(N-(m-1)p)}(\Omega).$$

Докажем, что отсюда вытекает вложение

$$\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \subset L^{Np/(N-mp)}(\Omega).$$

Действительно, имеет место вложение

$$\partial^\beta u(x) \in \mathbb{W}_0^{m-1,p}(\Omega) \subset L^{Np/(N-(m-1)p)}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p^*_{m-1}}(\Omega) \quad p^*_{m-1} = \frac{Np}{N-(m-1)p}.$$

Опять воспользуемся вложением (1.22) и получим вложение:

$$\mathbb{W}_0^{1,p^*_{m-1}}(\Omega) \subset L^{Np^*_{m-1}/(N-p^*_{m-1})}(\Omega).$$

Опять займемся арифметикой.

$$
\frac{Np_{m-1}^*}{N-p_{m-1}^*} = \frac{N^2p}{N-(m-1)p}\frac{1}{N-Np/(N-(m-1)p)} = \\
= \frac{N^2p}{N^2-N(m-1)p-Np} = \frac{N^2p}{N^2-mNp} = \frac{Np}{N-mp}.
$$

Итак, мы доказали, что при $N > kp$ каждая функция

$$
u(x) \in \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)
$$

принадлежит пространству

$$
L^{Np/(N-kp)}(\Omega),
$$

т. е. имеет место вложение (1.20).

Перейдем к доказательству вложения (1.21). Прежде всего заметим, что из результата теоремы 10 у нас имеется вложение (1.21) при $m = 0$:

$$
\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m < 1 - \frac{N}{p}, \quad N < p. \tag{1.24}
$$

Действительно, решением неравенства

$$
0 \leqslant m < 1 - \frac{N}{p}
$$

в целых числах — есть $m = 0$. Воспользуемся опять методом математической индукции. Пусть мы доказали вложение (1.21) при $k = n - 1$. Докажем, что отсюда вытекает вложение при $k = n$. Итак, по предположению индукции у нас имеется вложение:

$$
\mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m \leqslant n - 1 - \frac{N}{p}.
$$

Пусть $u(x) \in \mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$, тогда

$$
\partial_i u \in \mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}).
$$

Следовательно,

$$
u(x) \in \mathbb{C}^{(m+1)}(\overline{\Omega}).
$$

Стало быть, имеет место вложение

$$
\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m+1)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m < n - 1 - \frac{N}{p}.
$$

Переобозначив $m + 1$ на m, получим вложение

$$
\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m - 1 < n - 1 - \frac{N}{p} \Rightarrow 0 \leqslant m < n - \frac{N}{p}.
$$

Следовательно, методом математической индукции доказаны оба утверждения этой теоремы.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 6. Первый результат теоремы 11 справедлив и для пространств $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$.

Наконец, мы можем доказать общую теорему вложения.

Т е о р е м а 12. *Пусть $k \geqslant m$ и $k, m \in \mathbb{Z}_+$ и выполнены неравенства*:

$$N > (k-m)p \quad \textit{и} \quad q = \frac{Np}{N-(k-m)p}, \tag{1.25}$$

тогда имеет место вложение:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega). \tag{1.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Итак, доказательство проведем методом математической индукции. Действительно, сначала докажем, что при условиях

$$q = \frac{Np}{N-p} \quad \text{и} \quad N > p$$

имеет место вложение

$$\mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega). \tag{1.27}$$

Пусть $u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$, тогда из теоремы 10 вытекает, что

$$\partial^\beta u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \quad \text{для всех} \quad \beta: \ |\beta| \leqslant m$$

Следовательно, поскольку $u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$, то получим, что

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad q = \frac{Np}{N-p}$$

и поэтому имеет вложение (1.27).

Теперь предположим, что мы уже доказали вложение

$$\mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \tag{1.28}$$

при условиях

$$q = \frac{Np}{N-(n-1)p} \quad \text{при} \quad N > (n-1)p.$$

Докажем, что отсюда вытекает вложение

$$\mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \tag{1.29}$$

при условиях

$$q = \frac{Np}{N-np} \quad \text{при} \quad N > np.$$

Пусть

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega).$$

Следовательно, поскольку (1.28) верно при указанных условиях, то отсюда получаем, что

$$\partial^\beta u \in \mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant 1.$$

Значит, из этой цепочки вложений вытекает, что имеет место следующее вложение:

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,q}(\Omega).$$

Но мы уже доказали вложение (1.27), поэтому имеем

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,q}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q^*}(\Omega) \quad \text{при} \quad q^* = \frac{Nq}{N-q}.$$

Напомним, что

$$q = \frac{Np}{N-(n-1)p}.$$

Займемся арифметикой.

$$q^* = \frac{N^2 p}{N-(n-1)p} \frac{1}{N - Np/(N-(n-1)p)} = \\ = \frac{N^2 p}{N^2 - (n-1)pN - Np} = \frac{Np}{N-np} \quad \text{при} \quad N > np.$$

Теорема доказана.

Замечание 7. Результат теоремы 12 справедлив и для пространств $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$.

Следствие. *Пусть область Ω является ограниченной в $\mathbb{R}^N$. Тогда при условиях*

$$N > (k-m)p \quad \text{и} \quad 1 \leqslant q \leqslant \frac{Np}{N-(k-m)p} \quad \text{при} \quad k \geqslant m,$$

имеет место вложение:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega).$$

Приступим теперь к доказательству классического результата Реллиха–Кондрашова о компактности вложения пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^q(\Omega)$ для случая ограниченной области Ω.

Теорема 13. *Имеет место компактное вложение*:

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{при} \quad p < N \tag{1.30}$$

для всех $q \in [1, p^*)$.

Доказательство.

Достаточно доказать, что для всякой последовательности $\{u_m(x)\}$, ограниченной в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, найдется подпоследовательность $\{u_{m_m}(x)\}$, сходящаяся сильно в $L^q(\Omega)$.

Итак, пусть последовательность $\{u_m(x)\}$ ограничена в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В частности, можно предположить, что

$$\sup_m \|u_m\|_{1,p} \leqslant c < +\infty.$$

Рассмотрим срезку последовательности $\{u_m(x)\}$:

$$u_m^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega dy\, \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u_m(y)\, dy, \tag{1.31}$$

где $\omega(z)$ — это «шапочка». Без ограничения общности будем предполагать, что область Ω содержит шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Докажем, что

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant c\varepsilon,$$

где $c > 0$ — не зависит от ε и от m. Для удобства сделаем в (1.31) замену переменной

$$z_i = \frac{x_i - y_i}{\varepsilon} \quad i = \overline{1, N}.$$

После этой подстановки мы придем к следующему равенству:

$$u_m^\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \mathrm{J}(|z|) u_m(x - \varepsilon z)\, dz.$$

Теперь учтем, что

$$\int\limits_\Omega \mathrm{J}(z)\, dz = 1.$$

Тогда сразу же получим следующая цепочка равенств:

$$u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \int\limits_\Omega \mathrm{J}(z) \left[u_m(x - \varepsilon z) - u_m(x)\right] dz =$$

$$= \int\limits_\Omega dz \mathrm{J}(z) \int\limits_0^1 dt\, u_m^{'}(x - \varepsilon t z) = -\varepsilon \int\limits_\Omega dz \mathrm{J}(z) \int\limits_0^1 dt\ (z, \nabla)\, u_m(x - \varepsilon z t).$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_\Omega |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\ dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega dz \mathrm{J}(z) \int\limits_0^1 dt \int\limits_\Omega dx\, |x|\, |\nabla_x u_m(x)| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \| |\nabla u_m| \|_1 \leqslant c\varepsilon \| |\nabla u_m| \|_p \leqslant c\varepsilon,$$

где $c > 0$ не зависит от m. Теперь воспользуемся интерполяционным неравенством из леммы 6 второй лекции. Справедливо неравенство,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant \|u_m^\varepsilon - u_m\|_1^\vartheta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*}^{1-\vartheta}, \quad \frac{1}{q} = \vartheta + \frac{1-\vartheta}{p^*}, \ \vartheta \in (0,1]. \tag{1.32}$$

Здесь остановимся. Условие, что $\vartheta > 0$ нам нужно для дальнейшего (случай $\vartheta = 0$ нам не подходит). Но это означает, что $q \in [1, p^*)$!!!

Теперь воспользуемся неравенством (1.2) и получим неравенства

$$\begin{aligned}\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{p^*} \leqslant \||\nabla u_m^\varepsilon - \nabla u_m|\|_p \leqslant \\ \leqslant c \max\{\||\nabla u_m^\varepsilon|\|_p, \||\nabla u_m|\|_p\} \leqslant \\ \leqslant c\||\nabla u_m^\varepsilon|\|_p \leqslant c \sup_m \||\nabla u_m^\varepsilon|\|_p \leqslant c < +\infty.\end{aligned}$$

Тогда из (1.32) получим неравенство

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_q \leqslant c\|u_m^\varepsilon - u_m\|_1^\vartheta \leqslant c\varepsilon, \tag{1.33}$$

где $c > 0$ не зависит от ε и от m.

Докажем теперь, что последовательность $\{u_m^\varepsilon\}$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |u_m(y)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \|u_m\|_1 \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N},$$

$$|\nabla u_m^\varepsilon| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |\nabla u_m| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \||\nabla u_m|\|_1 \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N}.$$

Из этих неравенств вытекают следующие свойства последовательности $\{u_m^\varepsilon\}$:

$$\sup_{x\in\Omega} |u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N}, \quad |u_m^\varepsilon(x) - u_m^\varepsilon(y)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |\nabla u_m^\varepsilon|\,|x-y| \leqslant \frac{c}{\varepsilon^N}|x-y|, \tag{1.34}$$

где $c > 0$ не зависит от m. Неравенства (1.34) означают, что для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ последовательность $\{u_m^\varepsilon(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в пространстве $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, следовательно, согласно теореме Асколи–Арцела существует равномерно на $\overline{\Omega}$ сходящаяся подпоследовательность $\left\{u_{m_n}^\varepsilon(x)\right\}$.

Пусть теперь $\delta > 0$ — это произвольное фиксированное число. Тогда подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы в неравенстве (1.33)

$$c\varepsilon < \frac{\delta}{3},$$

т. е. чтобы имело место неравенство

$$\|u_{m_n}^\varepsilon - u_{m_n}\|_q \leqslant \frac{\delta}{3}. \tag{1.35}$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{u_{m_n}(x)\}$ на $\overline{\Omega}$ — эта последовательность равномерно фундаментальна:

$$\sup_{x\in\Omega}\left|u^{\varepsilon}_{m_i}(x)-u^{\varepsilon}_{m_j}(x)\right|\leqslant\frac{1}{c}\frac{\delta}{3}$$

при достаточно больших $i, j\in\mathbb{N}$. Но тогда отсюда мы приходим к неравенству

$$\|u^{\varepsilon}_{m_i}(x)-u^{\varepsilon}_{m_j}(x)\|_q\leqslant c\sup_{x\in\Omega}\left|u^{\varepsilon}_{m_i}(x)-u^{\varepsilon}_{m_j}(x)\right|\leqslant\frac{\delta}{3}. \qquad (1.36)$$

Следовательно, из неравенств (1.35) и (1.36) вытекает цепочка неравенств:

$$\|u_{m_i}-u_{m_j}\|_q\leqslant\|u_{m_i}-u^{\varepsilon}_{m_i}\|_q+\|u_{m_j}-u^{\varepsilon}_{m_j}\|_q+ \\ +\|u^{\varepsilon}_{m_i}-u^{\varepsilon}_{m_j}\|_q\leqslant\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}=\delta. \qquad (1.37)$$

Теперь возьмем в неравенстве (1.37) величину δ как

$$\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...$$

и выберем такую подпоследовательность $\{u_{m_m}(x)\}$, что для нее

$$\lim_{l,n\to+\infty}\|u_{m_l}-u_{m_n}\|_q=0,$$

т. е. построим фундаментальную последовательность в $L^q(\Omega)$, которая в силу полноты этого пространства сходится.

Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии доказать результат, обобщающий теорему Реллиха–Кондрашова. Справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть область $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ограничена и выполнены следующие условия*:

$$k>m,\quad N>(k-m)p\quad \text{и}\quad 1\leqslant q<\frac{Np}{N-(k-m)p}. \qquad (1.38)$$

Тогда имеет место компактное вложение:

$$\mathbb{W}^{k,p}_0(\Omega)\hookrightarrow\mathbb{W}^{m,q}_0(\Omega). \qquad (1.39)$$

Доказательство.

Действовать будем опять при помощи метода математической индукции. Сначала докажем, что имеет место следующее компактное вложение:

$$\mathbb{W}^{m+1,p}_0(\Omega)\hookrightarrow\mathbb{W}^{m,q}_0(\Omega)\quad\text{при}\quad N>p,\quad 1\leqslant q<p^*. \qquad (1.40)$$

Действительно, заметим, что для всех $u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$ в силу теоремы Реллиха–Кондрашова имеет место вложение

$$\partial^\beta u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{для всех} \quad |\beta| \leqslant m.$$

Пусть $\{u_n\}$ ограниченная последовательность в $\mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$, тогда для каждого мультииндекса β длины $|\beta| \leqslant m$ последовательность

$$\left\{\partial^\beta u_n(x)\right\}$$

ограничена в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому эта последовательность является *предкомпактной* в $L^q(\Omega)$ при $1 \leqslant q < p^*$. Следовательно, найдется такая подпоследовательность

$$\{u_{n_n}(x)\}$$

такая, что

$$\partial^\beta u_{n_n} \to \partial^\beta u \quad \text{сильно в} \quad L^q(\Omega), \quad \text{для всех} \quad |\beta| \leqslant m.$$

Но это означает, что

$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega).$$

Следовательно, (1.40) доказано.

Предположим теперь, что мы уже доказали компактность вложения

$$\mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{n,q}(\Omega) \tag{1.41}$$

при условиях

$$N > (m-1)p, \quad 1 \leqslant q < \frac{Np}{N-(m-1)p}.$$

Докажем, что отсюда вытекает утверждение, что

$$\mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}_0^{n,q}(\Omega)$$

при условиях

$$N > mp, \quad 1 \leqslant q < \frac{Np}{N-mp}.$$

Но это следует, из того, что оператор вложения T

$$\mathrm{T} : \mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega)$$

является ограниченным, а композиция ограниченного и компактного оператора является компактным оператором.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е 8. Утверждение теоремы 14 остается в силе для соболевских пространств $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ при некоторых дополнительных условиях на область Ω и ее границу $\partial\Omega$ (см., например, [9]).

Сейчас мы докажем еще одно обобщение теоремы Реллиха–Кондрашова.

Теорема 15. *Пусть область* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *является ограниченной. Тогда имеет место компактное вложение*:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant q < \frac{Np}{N-kp}, \quad N > kp. \tag{1.42}$$

Доказательство.

При $k = 1$ вложение (1.42) имеет место в силу теоремы Реллиха–Кондрашова. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что мы доказали утверждение теоремы при $k = n-1 \geqslant 1$ докажем тогда, что оно имеет место и при $k = n$. Действительно, пусть

$$\{u_m(x)\}$$

— это ограниченная последовательность пространства $\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$. Но поскольку оператор дифференцирования

$$\partial^\beta : \mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant 1$$

является ограниченным, то последовательность

$$\left\{\partial^\beta u_n(x)\right\}$$

является ограниченной в

$$\mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*_{n-1}}(\Omega), \quad q^*_{n-1} = \frac{Np}{N-(n-1)p}, \quad N > (n-1)p.$$

Следовательно, последовательность $\{u_n(x)\}$ является ограниченной в

$$\mathbb{W}_0^{1,q^*_{n-1}}(\Omega) \quad q^*_{n-1} = \frac{Np}{N-(n-1)p}.$$

Но в силу теоремы Реллиха–Кондрашова эта последовательность является предкомпактной в $\mathbb{L}^q(\Omega)$ при

$$1 \leqslant q < q^*_n = \frac{Nq^*_{n-1}}{N-q^*_{n-1}}.$$

Займемся арифметикой.

$$q^*_n = \frac{Nq^*_{n-1}}{N-q^*_{n-1}} = \frac{N^2p}{N-(n-1)p}\frac{1}{N-Np/(N-(n-1)p)} =$$
$$= \frac{N^2p}{N^2-N(n-1)p-Np} = \frac{N^2p}{N^2-npN} = \frac{Np}{N-np}.$$

Значит, произвольная ограниченная в $\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$ оказалась предкомпактной в $L^q(\Omega)$ при

$$1 \leqslant q < \frac{Np}{N-np}.$$

Стало быть, соответствующий оператор вложения $\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ является компактным.

Теорема доказана.

Замечание 9. Утверждение теоремы 15 остается в силе для соболевских пространств $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ при некоторых дополнительных условиях на область Ω и ее границу $\partial\Omega$ (см., например, [9]).

Продолжим изучать различные варианты теорем вложения соболевских пространств. И теперь мы займемся случаем $N < kp$. Рассмотрим некоторые вспомогательные результаты. Докажем важное неравенство принадлежащее Морри.

Теорема 16. *Для функций $u(x) \in \mathbb{W}^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ имеет место неравенство*:

$$\|u\|_{0,\lambda} \leqslant c\|u\|_{1,p} \quad \textit{при} \quad N < p \quad \textit{и} \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}. \tag{1.43}$$

Доказательство.

Сначала докажем неравенство Мори для функций из $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \cap \cap \mathbb{W}^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. И прежде всего докажем следующее неравенство:

$$\frac{1}{R^N} \int\limits_{\mathrm{B}(R,x)} |u(x) - u(y)|\, dy \leqslant c \int\limits_{\mathrm{B}(R,x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy, \tag{1.44}$$

где

$$\mathrm{B}(R,x) \equiv \left\{y \in \mathbb{R}^N :\ |y - x| \leqslant R\right\}.$$

□ Итак, рассмотрим произвольную точку на границе единичного с центром в начале координат:

$$z \in \partial\mathrm{B}(0,1).$$

Для каждой такой точки справедливо следующее равенство:

$$u(x+rz) - u(x) = \int\limits_0^r dt \frac{d}{dt} u(x+tz),$$

из которого вытекает неравенство

$$|u(x+rz) - u(x)| \leqslant \int\limits_0^r dt\, |(z,\nabla)\, u(x+tz)| \leqslant \int\limits_0^r dt\, |\nabla u(x+tz)|\, .$$

Теперь проинтегрируем по $z \in \partial\mathrm{B}(0,1)$ последнее неравенство и получим

$$\int\limits_{\partial\mathrm{B}(0,1)} |u(x+rz) - u(x)|\, dS \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_{\partial\mathrm{B}(0,1)} dt dS\, |\nabla u(x+tz)|\, .$$

Введем точку $y = x + tz$, тогда $t = |x - y|$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} |u(x+rz)-u(x)|\,dS \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B(0,1)} dt\,dS \frac{t^{N-1}}{t^{N-1}}\,|\nabla u(x+tz)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B(x,r)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}}\,|\nabla u(y)| \leqslant \int\limits_{B(x,R)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}}\,|\nabla u(y)|\,, \quad (1.45)$$

где мы сделали замену переменной $y = x + tz$. Теперь умножим обе части последнего неравенства на r^{N-1} и проинтегрируем его по $r \in \in (0, R)$, тогда получим неравенство

$$\int\limits_0^R dr\, r^{N-1} \int\limits_{\partial B(0,1)} |u(x+rz)-u(x)|\,dS \leqslant \frac{R^N}{N} \int\limits_{B(x,R)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}}\,|\nabla u(y)|\,.$$

Итак, неравенство (1.44) доказано. ☒

Справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant |u(x)-u(y)| + |u(y)|.$$

Проинтегрируем по шару $B(x,1)$ это неравенство, тогда получим неравенство

$$|u(x)| \leqslant c \int\limits_{B(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy + \int\limits_{B(x,1)} |u(y)|\,dy.$$

Теперь заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_{B(x,1)} |u(y)|\,dy \leqslant c\|u\|_p,$$

$$\int\limits_{B(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy \leqslant \left(\int\limits_{B(x,1)} |\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\,dy\right)^{1/p'}.$$

Оценим последний интеграл:

$$\int\limits_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\,dy \leqslant c\int\limits_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr =$$

$$= c\int\limits_0^1 \frac{1}{r^\alpha}\,dr < +\infty \quad \alpha = (N-1)(p^{'}-1)\frac{N-1}{p-1} < 1,$$

поскольку $N < p$. Следовательно, мы пришли к неравенству

$$|u(x)| \leqslant c\|u\|_{1,p}$$

и отсюда сразу же получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| \leqslant c\||\nabla u|\|_p. \tag{1.46}$$

Теперь пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$ — это произвольные точки и рассмотрим шары радиуса $R = |x-y|$ с центрами в этих точках:

$$\mathrm{B}(x,R) \quad \text{и} \quad \mathrm{B}(y,R).$$

Очевидно, они пересекаются. Введем множество

$$\mathrm{U} = \mathrm{B}(x,R) \cap \mathrm{B}(y,R).$$

Имеет место неравенство треугольника:

$$|u(x)-u(y)| \leqslant |u(x)-u(z)| + |u(y)-u(z)|.$$

Умножим обе части этого равенства на $[\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\}]^{-1}$ и проинтегрируем по U. Получим неравенство

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\}}\int\limits_{\mathrm{U}} |u(x)-u(z)|\,dz + \frac{1}{\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\}}\int\limits_{\mathrm{U}} |u(y)-u(z)|\,dz. \tag{1.47}$$

Воспользуемся теперь равенством

$$\mathrm{meas}\{\mathrm{U}\} = cR^N,$$

где $c > 0$ и не зависит от R и, кроме того, от $x, y \in \mathbb{R}^N$. И тогда из (1.47) получим следующее неравенство:

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{c}{\mathrm{meas}\{\mathrm{B}(x,R)\}}\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)} |u(x)-u(z)|\,dz + \\ + \frac{c}{\mathrm{meas}\{\mathrm{B}(y,R)\}}\int\limits_{\mathrm{B}(y,R)} |u(y)-u(z)|\,dz. \tag{1.48}$$

Рассмотрим, например, первый интеграл в правой части этого неравенства:

$$\frac{1}{\mathrm{meas}\{\mathrm{B}(x,R)\}}\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)} |u(x)-u(z)|\,dz \leqslant \frac{c}{R^N}\int\limits_{\mathrm{B}(x,R)} |u(x)-u(z)|\,dz \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{B(x,R)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{N-1}}\,dz \leqslant c \left(\int\limits_{B(x,R)} |\nabla u(z)|^p\,dz \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{B(x,R)} \frac{1}{|x-z|^{(N-1)p'}}\,dz \right)^{1/p'} \leqslant c\||\nabla u|\|_p \left(\int\limits_0^R \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr \right) \leqslant$$

$$\leqslant cR^{\frac{N}{p'}-N+1}\||\nabla u|\|_p \leqslant c|x-y|^\lambda \||\nabla u|\|_p \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}.$$

Таким образом, из (1.48) получим неравенство

$$|u(x)-u(y)| \leqslant c|x-y|^\lambda \||\nabla u|\|_p \quad \lambda = 1-\frac{N}{p}, \tag{1.49}$$

т.е.

$$[u]_\lambda \equiv \sup_{x,y\in\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant c\||\nabla u|\|_p.$$

Отсюда и из (1.46) вытекает утверждение теоремы для функций $u(x) \in \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$.

Продолжим неравенство Морри на функции из класса $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Множество $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \bigcap \mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Поэтому для любого $u \in \mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ найдется сходящаяся в $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ последовательность $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^N) \bigcap \mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Возьмем произвольные натуральные числа $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и применим неравенство Морри к разности $u_{m_1} - - u_{m_2}$:

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{0,\lambda} \leqslant c\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{1,p}. \tag{1.50}$$

Отсюда сразу же получаем, что последовательность $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$. Следовательно,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N).$$

Теперь перейдем в неравенстве (1.50) к пределу при $m_1 \to +\infty$ и получим неравенство

$$\|u - u_{m_2}\|_{0,\lambda} \leqslant c\|u - u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Но тогда имеет место неравенство

$$\|u\|_{0,\lambda} \leqslant \|u - u_{m_2}\|_{0,\lambda} + \|u_{m_2}\|_{0,\lambda} \leqslant c\|u - u_{m_2}\|_{1,p} + c\|u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Теперь перейдем к пределу при $m_2 \to +\infty$ и получим неравенство Морри, но уже для функций из $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Из теоремы* 16 *вытекает, что оно имеет место для функций из* $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$.

Теперь мы можем получить более общий результат о вложении. Справедлива следующая теорема.

Теорема 17. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ограниченной и $N < kp$, тогда имеют место вложения*:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma = \left[\frac{N}{p}\right] - \frac{N}{p} + 1, \quad \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}_+; \tag{1.51}$$

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma \in (0,1), \quad \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.52}$$

Доказательство.

Докажем сначала (1.51). Пусть

$$\frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}_+.$$

Тогда согласно следствию из теоремы 14 имеет место вложение

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{k-m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad N > mp \quad \text{и} \quad q = \frac{Np}{N-mp}. \tag{1.53}$$

Выберем теперь $m \in \mathbb{Z}_+$ таким образом, чтобы

$$m + 1 > \frac{N}{p} > m.$$

Докажем, что при этом $q > N$. Действительно, справедлива цепочка неравенств:

$$\frac{Np}{N-mp} > N \Rightarrow Np > N^2 - mpN \Rightarrow p > N - mp \Rightarrow \frac{N}{p} < m+1.$$

Из вложения (1.53) вытекает, что для любого мультииндекса α длины $|\alpha| \leqslant k - m - 1$ имеем

$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega).$$

Теперь поскольку $q > N$ можно применить теорему 16 и получить вложение:

$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{N}{q} = 1 - \frac{N}{p} + m = 1 - \frac{N}{p} + \left[\frac{N}{p}\right].$$

Стало быть, приходим к выводу, что

$$u(x) \in \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad \gamma = 1 - \frac{N}{p} + \left[\frac{N}{p}\right].$$

Тем самым, вложение (1.51) доказано.

Докажем теперь вложение (1.52). Действительно, пусть

$$\frac{N}{p} \in \mathbb{Z}_+.$$

Положим
$$m = \left[\frac{N}{p}\right] - 1 = \frac{N}{p} - 1.$$
Тогда имеет место вложение
$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{k-m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad q = \frac{Np}{N-mp}.$$
С другой стороны,
$$q = \frac{Np}{N-mp} = \frac{Np}{N-N+p} = N.$$
Ниже мы докажем, что в этом случае имеет место вложение:
$$\mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega) \subset L^r(\Omega) \quad \text{при} \quad N \leqslant r < +\infty$$
Значит, имеем
$$\partial^\alpha u(x) \in L^r(\Omega) \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant k - m - 1 = k - \frac{N}{p}.$$
$$\partial^\beta u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant k - \frac{N}{p} - 1$$
Теперь можно воспользоваться неравенством Морри и получить, что
$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad \gamma \in (0,1) \quad \text{и} \quad |\alpha| \leqslant k - \frac{N}{p} - 1.$$
Следовательно,
$$u(x) \in \mathbb{C}^{k-\frac{N}{p}-1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad \gamma \in (0,1).$$

Теорема доказана.

Перейдем к доказательству соответствующего случаю $N < kp$ результата о компактном вложении. Начнем, с главного результат в этом направлении. Справедлива следующая теорема.

Теорема 18. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ограниченной и $p > N$, тогда имеет место компактное вложение*:
$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \quad \textit{при} \quad \beta \in \left[0, 1 - \frac{N}{p}\right). \tag{1.54}$$

Доказательство.

Пусть $\{u_m(x)\}$ ограниченная в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ последовательность, т. е. без ограничения общности можно предположить, что
$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \||\nabla u_m|\|_p \leqslant c < +\infty.$$
В силу неравенства Морри (теорема 16) получаем следующее неравенство:
$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|u_m\|_{0,\gamma} \leqslant c \sup_{m\in\mathbb{N}} \||\nabla u_m|\|_p \leqslant c < +\infty \quad \text{при} \quad \gamma = 1 - \frac{N}{p}. \tag{1.55}$$

Кроме того, имеет место цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}|u_m(x)-u_m(y)| \leqslant \frac{|u_m(x)-u_m(y)|}{|x-y|^\gamma}|x-y|^\gamma \leqslant \\ \leqslant \left(\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|u_m(x)-u_m(y)|}{|x-y|^\gamma}\right)\times|x-y|^\gamma \leqslant \\ \leqslant [u_m]_\gamma|x-y|^\gamma \leqslant \|u_m\|_{0,\gamma}|x-y|^\gamma \leqslant c|x-y|^\gamma, \quad (1.56)\end{aligned}$$

где $c > 0$ не зависит от x, y и от $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, из (1.55) и (1.56) приходим к выводу, что последовательность $\{u_m\} \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на $\overline{\Omega}$. Стало быть, в силу теоремы Асколи–Арцела приходим к выводу, что некоторая подпоследовательность $\{u_{m_m}\} \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ сходится равномерно на $\overline{\Omega}$:

$$u_{m_m}(x) \rightrightarrows u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \quad \text{равномерно на} \quad \overline{\Omega}.$$

Теперь воспользуемся леммой 2 второй лекции, из которой вытекает следующее интерполяционное неравенство:

$$[f]_\beta \leqslant M\left(\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\right)^{1-\vartheta}[f]^\vartheta_\gamma, \quad \gamma = 1-\frac{N}{p}, \quad (1.57)$$

где

$$\beta = \vartheta\gamma, \quad \vartheta \in [0,1).$$

Воспользуемся теперь интерполяционным неравенством (1.57), в котором положим

$$f(x) = u_{m_n}(x) - u_{m_l}(x),$$

тогда получим неравенство

$$\begin{aligned}[u_{m_n}-u_{m_l}]_\beta \leqslant M\left(\sup_{x\in\Omega}|u_{m_n}(x)-u_{m_l}(x)|\right)^{1-\vartheta}\times \\ \times[u_{m_n}(x)-u_{m_l}(x)]^\vartheta_\gamma, \quad \gamma = 1-\frac{N}{p}, \quad (1.58)\end{aligned}$$

но в силу неравенства Морри

$$\begin{aligned}[u_{m_n}(x)-u_{m_l}(x)]_\gamma \leqslant [u_{m_n}(x)]_\gamma + [u_{m_l}(x)]_\gamma \leqslant \\ \leqslant 2\sup_{m\in\mathbb{N}}[u_m]_\gamma \leqslant 2\sup_{m\in\mathbb{N}}\|u_m\|_{0,\gamma} \leqslant c\sup_{m\in\mathbb{N}}\||\nabla u_m|\|_p \leqslant c < +\infty.\end{aligned}$$

Поэтому из (1.58) приходим к неравенству

$$[u_{m_n}-u_{m_l}]_\beta \leqslant c\left(\sup_{x\in\Omega}|u_{m_n}(x)-u_{m_l}(x)|\right)^{1-\vartheta}. \quad (1.59)$$

Но последовательность $\{u_{m_m}(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$, поскольку она сильно сходится в этом банаховом пространстве, поэтому из (1.59) (так как $\vartheta \in [0,1)$) приходим к выводу о том, что последовательность

$\{u_{m_m}(x)\}$ принадлежит $\mathbb{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ и фундаментальна в этом гельдеровском банаховом пространстве, следовательно, в силу полноты $\mathbb{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ приходим к выводу, что она сходится сильно в этом пространстве к функции $u(x) \in \mathbb{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ при $\beta \in [0, \gamma)$. Следовательно, всякая ограниченная в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ последовательность является предкомпактной в $\mathbb{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем доказать более общий результат.

Теорема 19. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ограниченной и выполнено условие $N < kp$. Тогда справедливы следующие компактные вложения*:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}), \ \gamma \in \left[0, \left[\frac{N}{p}\right] + 1 - \frac{N}{p}\right), \ \frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}_+, \quad (1.60)$$

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}^{k-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}), \ \gamma \in [0, 1), \ \frac{N}{p} \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.61)$$

Доказательство.

При $k = 1$ утверждение теоремы следует из теоремы 18. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что утверждение доказано при $k = m$. Докажем, что оно справедливо и при $k = m + 1$. Действительно, пусть

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{m-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Следовательно,

$$\partial^\alpha u(x) \in \mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{m-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant 1.$$

Пусть теперь $\{u_m(x)\}$ произвольная ограниченная последовательность в $\mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$. Следовательно, $\{\partial^\alpha u_m(x)\}$ является ограниченной в $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega)$ при $|\alpha| \leqslant 1$. Но тогда существует такая подпоследовательность $\{u_{m_m}(x)\}$, что

$$\partial^\alpha u(x)_{m_m} \to \partial^\alpha u(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{m-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant 1.$$

Значит,

$$u_{m_m}(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{m+1-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Таким образом, имеет место компактное вложение:

$$\mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}^{m+1-[N/p]-1,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Теорема доказана.

§ 2. Пространства $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$

Теперь мы займемся построением пространств с отрицательным целым индексом $\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$. Прежде всего отметим, что мы будем строить это пространство как сопряженное к $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$. Но ведь как мы уже говорили в начале этого параграфа мы можем построить способом, указанным в первом параграфе, пространства $\left(\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)\right)^*$. Разумеется, сопряженные к $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ и к $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ — это различные пространства. Поэтому мы отметим, что далее мы будем заниматься сопряженными именно к пространствам $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$. По поводу сопряженных к $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ отсылаем читателя к первому параграфу. Теперь по поводу обозначений. Далее символом $\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$ мы будем обозначать сопряженное к $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$. Кроме того, норму в банаховом пространстве $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ будем обозначать символом:

$$\|u\|_{k,p;\,\Omega} \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{p;\,\Omega}.$$

Дадим определение.

Определение 11. *Символом* $\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$ *мы обозначим сопряженное к пространству* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ *при* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $p \in [1,+\infty)$.

Справедлива следующая теорема о плотных вложениях.

Теорема 20. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *является ограниченной областью, тогда имеют место плотные вложения*:

$$(\mathcal{D}(\Omega),\tau) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1}$$

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \quad k \geqslant m,\ 1 \leqslant q \leqslant \frac{Np}{N-(k-m)p},\ N > (k-m)p, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^r(\Omega) \quad 1 \leqslant r \leqslant \frac{Np}{N-kp}, \quad N > kp, \tag{2.3}$$

где $p \in [1,+\infty)$.

Доказательство.

Все утверждения вытекают из теорем вложения С. Л. Соболева и того, что соболевские пространства $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $p \in [1,+\infty)$ строятся как пополнение векторного пространства $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{k,p}$. Кроме того, опять по построению, векторное пространство $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ плотно в $(\mathcal{D}(\Omega),\tau)$. Наконец, векторное пространство $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\mathbb{L}^r(\Omega)$ при $r \in [1,+\infty)$.

Теорема доказана.

Теперь заметим, что для пространства $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ в силу результата теоремы 12 четвертой лекции.

Теорема 21. *При условиях теоремы* 25 *имеют место плотные вложения*:

$$\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \left(\mathcal{D}_s'(\Omega),\tau^*\right), \quad p' = \frac{p}{p-1}, \tag{2.4}$$

$$\mathbb{W}^{-m,q'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega), \quad q' = \frac{q}{q-1}, \quad p > 1, \tag{2.5}$$

$$\mathbb{L}^{r'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega), \quad r' = \frac{r}{r-1}, \quad p > 1. \tag{2.6}$$

Заметим, что в силу теоремы 22 имеет место плотное вложение

$$(\mathcal{D}(\Omega), \tau) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}_0^{k,1}(\Omega),$$

но тогда из теоремы 23 приходим к выводу, что имеет место плотное вложение

$$\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \left(\mathcal{D}_s'(\Omega), \tau^*\right),$$

где пространство $\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$ наделено относительной сильной топологией τ^*. Поэтому имеет место равенство скобок двойственности (смотри теорему 12 из четвертой лекции)

$$\langle f^*, \varphi\rangle_{k,1;\Omega} = \langle f^*, \varphi\rangle \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega) \quad \text{и} \quad \varphi \in \mathbb{W}_0^{k,1}(\Omega),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{k,1}$ — это скобки двойственности между $\mathbb{W}_0^{k,1}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$. Полунормы на $\mathcal{D}'(\Omega)$, порождающие сильную топологию τ^*, имеют вид

$$p(f^*) = \sup_{\varphi\in \mathrm{B}} |\langle f^*, \varphi\rangle|,$$

где B пробегает все ограниченные множества пространства $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Нетрудно, как и ранее, доказать, что B является ограниченным множеством в $\mathbb{W}_0^{k,1}(\Omega)$. Кроме того, имеет место следующее неравенство:

$$p(f^*) \leqslant c\|f^*\|_{-k,\infty;\Omega},$$

где

$$\|f^*\|_{-k,\infty;\Omega} = \sup_{\|\varphi\|_{k,1\,;\,\Omega}\leqslant 1} |\langle f^*, \varphi\rangle|. \tag{2.7}$$

Следовательно, мы нашли представление для нормы банахова пространства $\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$. Кроме того, нами показано, что эта норма порождает туже топологию на этом пространстве, что и относительная топология τ^* объемлющего пространства $\left(\mathcal{D}_s'(\Omega), \tau^*\right)$.

Тем самым, мы доказали следующую теорему.

Теорема 22. *Сильным сопряженным к банахову пространству $\mathbb{W}_0^{k,1}(\Omega)$ является банахово относительно нормы* (2.7) *пространство* $\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$.

Дадим необходимые нам определения сильной, слабой и $*$—слабой сходимостей и их свойств, рассмотренные нами в общем виде в шестой лекции.

Определение 12. *Сильной сходимостью последовательности $\{u_n\}$ в банаховом пространстве $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in [1, +\infty]$ к некоторому элементу $u \in \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ называется сходимость по норме следующей числовой последовательности:*

$$\|u_n - u\|_{k,p\,;\,\Omega} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для} \quad u \in \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega). \tag{2.8}$$

Определение 13. *Последовательность* $\{u_n\} \subset \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in [1, +\infty)$ *называется слабо сходящейся к некоторому элементу* $u \in \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, *если для любого элемента* $f \in \mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$ *имеем*

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle. \tag{2.9}$$

Определение 14. *Последовательность элементов* $\{f_n\} \subset \mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$ $*-$*слабо сходится к некоторому элементу* $f \in \mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$, *если для любого* $u \in \mathbb{W}_0^{k,1}(\Omega)$ *имеет место предельное равенство*

$$|\langle f_n, u\rangle - \langle f, u\rangle| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.10}$$

Справедливы следующие результаты, доказательство которых в общем виде имеются в шестой лекции.

Теорема 23. *Справедливы следующие два утверждения*:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$
$$\textit{то} \quad \|u_\infty\|_{k,p;\,\Omega} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{k,p;\,\Omega};$$

(ii) *Всякая* $*-$*слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$
$$\textit{то} \quad \|f_\infty\|_{-k,\infty\,;\,\Omega} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{-k,\infty\,;\,\Omega}.$$

Сравни с теоремой 2 шестой лекции.

Теорема 24. *Пусть* $\{u_n\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ *при* $p \in (1, +\infty)$ *и* $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда из* $\{u_n\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ *подпоследовательность* $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Сравни с теоремой 4 шестой лекции.

Теорема 25. *Пусть* $\{f_n\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства* $\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$. *Тогда из* $\{f_n\}$ *можно выделить* $*-$*слабо сходящуюся в* $\mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega)$ *подпоследовательность* $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\textit{слабо в} \quad \mathbb{W}^{-k,\infty}(\Omega) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Сравни с теоремой 5 шестой лекции.

Пространство $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ является равномерно выпуклым, поэтому в силу теоремы 6 имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 26. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $p \in (1, +\infty)$, *то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\|u_n\|_{k,p;\,\Omega} \to \|u\|_{k,p;\,\Omega}$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Наконец, справедлива следующая теорема о общем представлении функционала из $\mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$.

Т е о р е м а 27. *Функционал* $f^* \in \mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда найдутся такие функции* $g_\alpha(x) \in L^{p'}(\Omega)$ *для всех* $\alpha : |\alpha| \leqslant k$, *что имеет место представление*:

$$f^*(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \partial^\alpha g_\alpha(x).$$

На это мы закончим изучение пространств С. Л. Соболева и приступим к исследованию нелинейных краевых задач, для исследования которых мы широко будем пользоваться теорией пространств С. Л. Соболева.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [3], [7], [9], [10], [17], [25], [33] и [34].