СЕМИНАР 1

0. Тождества теории множеств. Свойства счётных множеств

Пусть $A \subset P$, $B \subset P$. Тогда

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \quad A \triangle B = (P \setminus A) \triangle (P \setminus B),$$

а также

$$P \setminus (P \setminus A) = A, \quad A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)], \quad A \cap B = P \setminus [(P \setminus A) \cup (P \setminus B)]$$

и вообще при $A_\alpha \subset P$ имеем соотношения двойственности:

$$P \setminus \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha (P \setminus A_\alpha),$$
$$P \setminus \cap_\alpha A_\alpha = \cup_\alpha (P \setminus A_\alpha).$$

Далее,

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

Если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

Кроме того,

$$A \subset B \cup (A \triangle B).$$

Также нам понадобятся некоторые утверждения о счётных множествах.

0. Счётное множество представляет собой «минимальное» бесконечное множество в том смысле, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

1. Подмножество не более чем счётного множества не более чем счётно.

2. Объединение не более чем счётного семейства не более чем счётных множеств не более чем счётно.

1. Одно свойство меры элементарных множеств

Для элементарных множеств B_1, B_2, $B = B_1 \cup B_2$ верно:

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2).$$

В самом деле, достаточно представить $B_1 \setminus B_2$, $B_2 \setminus B_1$, $B_1 \cap B_2$ в виде суммы конечного числа непересекающихся прямоугольников. Мы пользуемся этим свойством при доказательстве измеримости объединения конечного числа измеримых множеств.

2. Основные свойства меры Лебега

Мера Лебега обладает следующими важнейшими свойствами, которыми мы будем пользоваться:

1) семейство измеримых множеств замкнуто относительно операций разности, симметрической разности, счётных объединений и пересечений (допускается мера, равная $+\infty$);

2) мера Лебега является счётно-аддитивной на этом множестве;

3) мера Лебега полна, т. е. всякое множество, внешняя мера которого равна 0, измеримо, и его мера Лебега равна 0;

4) мера непрерывна относительно монотонного предельного перехода (с доказательством и пояснением, как переформулировать утверждения для бесконечной меры).

3. Обоснование необходимости «сужения» внешней меры до меры Лебега. Существование неизмеримых множеств

Как показывает пример (см. Колмогоров, Фомин), существуют множества, предположение об измеримости которых противоречит требованию счётной аддитивности меры. Значит, внешняя мера, будучи определена для всех множеств, не является счётно-аддитивной, и её необходимо «ограничить» на семейство измеримых по Лебегу множеств.

Ниже (кроме раздела 6) будем рассматривать только меру Лебега на плоскости или на прямой.

4. Некоторые классы измеримых множеств

0. Любое конечное или счётное множество точек измеримо и имеет меру 0. Следствие: множество с положительной (ненулевой) лебеговой мерой несчётно.

1. Все открытые и замкнутые множества измеримы. (См. задачу 9.)

2. Назовём борелевскими множествами (на прямой или плоскости) все множества, которые можно получить из открытых и замкнутых множеств конечными или счётными применениями операций объединения, пересечения, разности. Очевидно, борелевские множества измеримы. (Можно доказать, что ими все измеримые множества не исчерпываются.)

5. Некоторые измеримые множества и их мера. Множество Кантора

1. Доказать по определению, что множество $A = [0;1] \setminus \mathbb{Q}$ измеримо и имеет меру 1.

2. Множество Кантора замкнуто, имеет меру 0, равномощно отрезку. Таким образом, *любое счётное множество точек имеет лебегову меру 0, но обратное неверно.*

3. Отрезок имеет плоскую меру 0.

4. Доказать, что A борелево, и вычислить его меру, если

а) $A = \cup_{n=1}^{\infty}(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{3^n}]$;

б) $A = \cup_{n=1}^{\infty}[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}]$;

в) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$;

г) $A = ((0;3] \otimes [1;2)) \setminus (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$;

д) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Q}\} \otimes (0;+\infty)$.

5. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, 0 < y < e^{-x}|\sin x|\}$.

6. Связь лебеговых мер в евклидовых пространствах разной размерности

1. Пусть P — $(n-1)$-мерная координатная плоскость в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда любое её подмножество имеет нулевую μ_n-меру.

2. Доказать, что существует μ_2-измеримое подмножество $\mathbb{R}^2$, проекции которого на координатные оси μ_1-неизмеримы.

Задачи для самостоятельного решения

При решении задач можно пользоваться утверждениями, сформулированными на семинаре, кроме того, которое, собственно, требуется доказать.

1. Доказать тождества и вложения, сформулированные в разделе 0 и не доказанные на семинаре.

2*. Доказать сформулированные в разделе 0 свойства счётных множеств. При этом утверждение 2 можно разбить на следующие этапы:

1) Объединение конечного и счётного множества счётно.

2) Объединение двух счётных множеств счётно.

3) Объединение конечного семейства счётных множеств счётно.

4) Объединение счётного семейства конечных множеств счётно.

5) Объединение счётного семейства счётных множеств счётно.

3. Назовём *подграфиком* функции $f(x)$ множество $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f), 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где $D(f)$ — область определения функции $f(x)$. Доказать, что подграфик неотрицательной функции, определённой на отрезке $[a;b]$ и интегрируемой по Риману, измерим по Лебегу и его мера равна $\int_a^b f(x)\,dx$. (Указание. Можно воспользоваться суммами Дарбу.)

4. (Продолжение.) Обобщить это утверждение на случай функций, интегрируемых по Риману в несобственном смысле (для интегралов первого и второго рода).

5. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если

а) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant y < \frac{a^2}{a^2+x^2}\}$, $a = \mathrm{const} > 0$;

б) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\}$;

в) $A = \cup_{n=1}^{\infty} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [n;n+1), 0 \leqslant y \leqslant \frac{(x-n)^n}{n}\}$.

6*. Доказать, что множество Кантора равномощно отрезку. (Указание. Можно воспользоваться троичной записью действительных чисел.)

7*. (Продолжение.) Найти меру множества всех тех чисел отрезка $[0;1]$, в стандартном десятичном разложении которых отсутствует цифра 5.

8. Можно ли указать замкнутое подмножество A замкнутого единичного квадрата, мера μ_2 которого равна 1 и которое не совпадает со всем квадратом? (Указание. Рассмотрите квадрат как метрическое пространство и воспользуйтесь тем, что разность квадрат минус A будет непустым открытым множеством.)

9*. Докажем, что любое непустое открытое множество на плоскости представимо в виде счётного (не более чем счётного) объединения открытых прямоугольников и, следовательно, измеримо. Будем в этой задаче под открытыми прямоугольниками понимать только те непустые открытые прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат. Назовём прямоугольник рациональным, если его стороны лежат на вертикальных прямых с рациональными абсциссами и на горизонтальных прямых с рациональными ординатами.

а) Докажите, что любой открытый прямоугольник можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников (не обязательно попарно непересекающихся).

б) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников. (Указание. Представьте его сначала в виде объединения открытых кругов.)

в) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения рациональных прямоугольников.

д) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников.