СЕМИНАР 01.04.11

1. Неравенства Кларксона и равномерная выпуклость пространств Лебега

Неравенства Кларксона для функций $f, g \in L^p(X)$ имеют вид (с $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p, \quad p \in [2; +\infty),$$
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}, \quad p \in (1; 2].$$

Мы приведём полный вывод первого неравенства.

0. Заметим, что для любых $a, b \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ верны неравенства

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r), \tag{0a; 0b}$$

откуда для $s \leqslant 1$

$$a^s + b^s \geqslant (a+b)^s. \tag{1}$$

Для доказательства неравенств $(0a)$ и $(0b)$ мы воспользуемся их однородностью и разделим все три выражения на a^r. (Случай $a = 0$ тривиален.) Отношение $\frac{b}{a}$ снова обозначим символом b. С учётом этих рассуждений нам остаётся доказать неравенства

$$1 + b^r \leqslant (1+b)^r \leqslant 2^{r-1}(1 + b^r). \tag{0a'; 0b'}$$

Очевидно, что неравенство $(0a')$ обращается в равенство при $b = 0$ (найти эту точку можно, например, с помощью дифференцирования). Возьмём производные от левой и правой частей этого неравенства:

$$\frac{d}{db}(1 + b^r) = rb^{r-1}, \quad \frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}.$$

Очевидно, что при $b \geqslant 0$, $r - 1 \geqslant 0$ имеет место следующее неравенство, связывающее указанные производные:

$$rb^{r-1} \leqslant r(1+b)^{r-1}. \tag{2}$$

Поскольку при $b = 0$ в $(0a')$ достигается равенство, то из (2) получаем неравенство $(0a')$ при всех $b \geqslant 0$.

Чтобы теперь доказать $(0b')$, заметим, что это неравенство обращается в равенство при $b = 1$. Далее,

$$\frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}, \quad \frac{d}{db}2^{r-1}(1 + b^r) = 2^{r-1}rb^{r-1}.$$

Достаточно показать, что

$$r(1+b)^{r-1} \geqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad r(1+b)^{r-1} \leqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1,$$

или

$$(1+b)^{r-1} \geqslant 2^{r-1} b^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad (1+b)^{r-1} \leqslant 2^{r-1} b^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1.$$

Но это следует из очевидных неравенств

$$1+b \geqslant 2b \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad 1+b \leqslant 2b \quad \text{при} \quad b \geqslant 1$$

в силу $r-1 \geqslant 0$. Таким образом, неравенства $(0a; 0b)$ полностью доказаны.

Далее, неравенство (1) следует из $(1a)$, если в последнем в качестве a, b, r взять соответственно a^s, b^s, $\frac{1}{s}$.

1. Теперь докажем, что для всех комплексных α, β и всех $p \geqslant 1$ верно неравенство

$$(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Это имеет место в силу легко проверяемого равенства параллелограмма

$$\left(|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и неравенства

$$(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p)^{\frac{2}{p}} \leqslant |\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2,$$

которое получается, если положить в (1) $a = |\alpha+\beta|^p$, $b = |\alpha-\beta|^p$, $s = \frac{2}{p}$.

2. Возводя (3) в положительную степень p и пользуясь далее (0b) с $r = \frac{p}{2} \geqslant 1$, имеем:

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant 2^{\frac{p}{2}} \cdot 2^{\frac{p}{2}-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right) = 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right),$$

откуда следует

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right), \tag{4}$$

где, напоминаем, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $p \geqslant 2$.

3. Переписав теперь только что полученное числовое неравенство (4) в виде

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p, \tag{5}$$

положив при каждом $x \in X$ $\alpha = f(x)$, $\beta = g(x)$ и проинтегрировав по области X, получим первое неравенство Кларксона.

Для вывода второго неравенства Кларксона используется обратное неравенство Минковского (см., напр.: С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988, с. 17) и следующее числовое неравенство, доказательство которого мы здесь не приводим:

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^q + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^q \leqslant \left(\frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{6}$$

где по-прежнему $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, но теперь $p \in (1; 2]$.

В целях удобства записи будем пользоваться стандартным обозначением

$$\|f\|_u \equiv \left(\int_X |f(x)|^u \, d\mu|\right)^{\frac{1}{u}}$$

даже при $u \in (0;1)$, хотя в последнем случае эта величина, конечно, нормой не является (см. обратное неравенство Минковского). Тогда для любой функции $h \in L^p(X)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\||h|^q\|_{p-1} = \left(\int_X |f(x)|^{q(p-1)} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int_X |h(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{q}{p}} = \|h\|_p^q. \tag{7}$$

В силу (7), обратного неравенства Минковского и (6) получим:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q = \left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_X \left[\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right]^{p-1} d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_X \left[\frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p\right] d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{2}\|f\|^p + \frac{1}{2}\|g\|^p\right)^{q-1},$$

что и доказывает второе неравенство Кларксона.

4. Теперь убедимся в том, что из неравенств Кларксона следует равномерная выпуклость пространств $L^p(X)$ при $p > 1$.

Вначале напомним определение равномерной выпуклости. Банахово пространство B называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ и $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{8}$$

Легко видеть, что что при $p \geqslant 2$ из первого неравенства Кларксона, записанного в виде

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p - \|f-g\|_p^p,$$

при $\|f\|_p \geqslant 1$, $\|g\|_p \geqslant 1$, $\|f-g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$ имеем

$$\|f+g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2(1 - \delta_1(\varepsilon)),$$

т. е. (8). Далее, при $p \leqslant 2$ из второго неравенства получаем

$$\|f+g\|_p \leqslant 2\left(\left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{q-1} - \frac{\|f-g\|_p^q}{2^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}} = 2(1 - \delta_2(\varepsilon))$$

при некотором $\delta_2(\varepsilon) > 0$, т. е. (8).

2. Вложения банаховых пространств и их сопряжённых

На лекции были доказаны некоторые утверждения про связь плотности вложения и инъективности сопряжённого оператора. Проиллюстрируем её наглядными примерами в простейших случаях конечномерных евклидовых, а также гильбертовых пространств. Чтобы помочь читателю глубже понять ситуацию, мы сначала приведём его к кажущемуся противоречию, а затем объясним, в чём дело.

1. Пусть $H \equiv l^2$ — вещественное гильбертово пространство. В силу хорошо известной теоремы Рисса любой ограниченный линейный функционал f на нём представим в виде

$$\langle f, x\rangle = (x_f, x),$$

причём установленное таким образом соответствие между H и H^* линейно и изометрично (в частности, взаимно однозначно). Поэтому при $(l^2)* = l^2$ (что можно установить и непосредственно, см. позапрошлый семинар).

Рассмотрим теперь неограниченный функционал

$$\langle l, x\rangle \equiv \sum_{k=1}^{\infty} x^{(2k)},$$

заданный последовательностью $y_l = (0, 1, 0, 1, \ldots) \notin H$. Очевидно, что значение функционала l невозможно определить на всём пространстве H (например, для $x = (1, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in l^2$), однако его заведомо можно задать на всюду плотном в l^2 подмножестве элементов, имеющих лишь конечное число ненулевых координат. В то же время ясно, что функционал l задан и ограничен на *всём* подпространстве H_1 вида

$$H_1 = \{x \in H \mid x^{(2k)} = 0, k \in \mathbb{N}\}.$$

Итак, казалось бы, H_1^* шире H^* и уж во всяком случае $H^* \subset H_1^*$. С другой стороны, в силу теоремы Рисса пространства H_1 и H_1^* должны быть изоморфны, но как это может быть, если $H_1 \subset H = H^* \subset H_1^*$? Читатель может сказать, что здесь нет ничего страшного, ведь все эти пространства счётномерны, а следовательно, действительно изоморфны. Мы не будет вдаваться в исследования, почему структура изоморфизма между гильбертовым пространством и его сопряжённым, навязываемая теоремой Рисса, в данной ситуации исключает возможность построения изоморфизма между H_1 и H_1^* из имевшегося изоморфизма между H и H^*, а перейдём к конечномерному случаю, где подобное возражение точно не сработает. Рассмотрим евклидово пространство E^n и его подпространство E^m, $m < n$. Легко видеть, что каждое из них совпадает со своим сопряжённым. Чтобы заметить это, достаточно в качестве базиса в сопряжённом пространстве взять такие функционалы f_i, что $\langle f_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, k, k \in \{n; m\}$. Таким образом, в данном случае вместо $H_1 \subset H = H^* \subset H_1^*$ имеем $E^m \subset E^n$, $(E^m)^* \subset (E^n)^*$, т. е. ситуация полностью противоположная.

Читатель легко найдёт разгадку, если попытается применить «гильбертово» рассуждение к конечномерному случаю. Для наглядности положим $n = 3$, $m = 2$, $E^2 = \{x \in E^3 \mid (x, e_3) = 0\}$. Тогда ясно, что функционалы

$$\langle \tilde{f}, x\rangle = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} \quad \text{и} \quad \langle \tilde{\tilde{f}}, x\rangle = x^{(1)} + x^{(2)} + 2x^{(3)},$$

будучи сужены на подпространство E^m, перестают различаться. Таким образом, в обоих случаях при попытке действовать на подпространство «старыми» функционалами мы теряем взаимную однозначность соответствия между элементами и функционалами, и при рассмотрении функционалов над H_1 их уже *нельзя* отождествлять с элементами H. Легко видеть, что это находится в полном соответствии с теоремами, доказанными на лекции: «причиной» неинъективности оператора $J^t : H \to H^1$ является отсутствие плотности вложения оператора $J : H^1 \to H$.

3. Конкретные примеры плотных вложений банаховых пространств

Мы только что обсудили, почему плотность вложения существенна. Рассмотрим конкретные примеры, дав прежде всего чёткое определение.

Определение. Оператор $J : B_1 \to B_2$ называется оператором вложения банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2, если:
1) он определён на всём B_1,
2) он является линейным,
3) он является инъективным,
4) существует такое $C > 0$, что при любом $x \in B_1$ верно $\|Jx\|_2 \leqslant C\|x\|_1$.

Как видно из этого определения, часто встречающийся случай, когда $B_1 \subset B_2$ в теоретико-множественном смысле, не исчерпывает всех таких ситуаций, когда говорят о вложении банаховых пространств.

Говорят также, что вложение $J : B_1 \to B_2$ плотно, если замыкание множества $JB_1 \equiv \{Jx \mid x \in B_1\}$ по норме пространства B_2 совпадает со всем пространством B_2. Обозначение: $B_1 \overset{ds}{\subset} B_2$.

1. Покажем, что в случае $\mu(X) < \infty$ имеет место плотное вложение $L^p(X) \overset{ds}{\subset} L^q(X)$ при $p > q \geqslant 1$.

Здесь можно говорить о теоретико-множественном вложении. При этом свойства 1) и 4) следуют из неравенства Гёльдера (показано в лекции 5), свойство 2) – из того, что операции сложения и умножения на число в $L^p(X)$ и $L^q(X)$ определены одинаково, а свойство 3) — из теоретико-множественного вложения и того факт, что эквивалентность функций, образующих элементы $L^p(X)$ и $L^q(X)$, определена одинаково. Осталось доказать, что рассматриваемое вложение плотно.

Мы покажем несколько более сильное утверждение, а именно: ограниченные (измеримые, в дальнейшем не оговариваем) функции образуют плотное в L^q множество. Поскольку при $\mu(X) < \infty$ любое L^p содержит все ограниченные функции, то тем самым мы видим, что L^p плотно в L^q, $p > q$.

Итак, пусть дана произвольная функция $g \in L^q$ и произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$. Укажем такую ограниченную функцию $\tilde{g}$, что $\|g - \tilde{g}\|_q < \varepsilon$. Для этого прежде всего, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега (см. лекцию 4), выберем такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $e \subset X$ с $\mu(e) < \delta$ выполняется неравенство

$$\int_e |g(x)|^q \, d\mu < \varepsilon^q. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что из неравенства Чебышёва следует:

$$\mu(B_M \equiv \{x \in X \mid |g(x)|^q > M\}) \leqslant \frac{\|g\|_q^q}{M}.$$

Поэтому существует такое $M > 0$, что $\mu(B_M) < \delta$, где δ было введено выше. Но тогда с учётом $\mu(B_M) < \delta$ в силу (9) имеем

$$\int_{B_M} |g(x)|^q \, d\mu < \varepsilon^q. \tag{10}$$

Построим теперь функцию $\tilde{g}$ следующим образом:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & |g(x)|^q \leqslant M, \\ 0, & |g(x)|^q > M \end{cases} \equiv \begin{cases} g(x), & x \notin B_M, \\ 0, & x \in B_M \end{cases}. \tag{11}$$

Тогда с учётом (11) и (10) имеем

$$\|g - \tilde{g}\|_q^q = \int_X |g - \tilde{g}|^q \, d\mu = \int_{B_M} |g|^q \, d\mu < \varepsilon^q,$$

или

$$\|g - \tilde{g}\|_q < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Читатель легко построить пример функции $f(x)$ такой, что $f \in L^q$, $f \notin L^p$. Таким образом, вложение плотно, но не сюръективно.

Пространство $C(X)$, где X — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, плотно вложено в $L^1(X)$.

Теорема. Пространство $C(X)$, где X — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, плотно вложено в $L^1(X)$.

Доказательству теоремы предпошлём три леммы.

Лемма 1. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^n$ измеримо (и имеет конечную меру). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое открытое множество $O_{M\varepsilon}$, что $O_{M\varepsilon} \supset M$, $\mu(O_{M\varepsilon} \setminus M) < \varepsilon$.

Действительно, рассмотрим такое покрытие множества M параллелепипедами Π_k, что $\sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) \leqslant \mu(M) + \frac{\varepsilon}{2}$. Теперь для каждого из параллелепипедов Π_k построим открытые параллелепипеды $\widetilde{\Pi}_k$, содержащие Π_k и такие, что при всех $k \in \mathbb{N}$ верно $m(\widetilde{\Pi}_k) \leqslant m(\Pi_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Легко видеть, что построенные таким образом открытые прямоугольники образуют покрытие множества M, причём множество $O_{M\varepsilon} \equiv \cup_{k=1}^{\infty} \widetilde{\Pi}_k$ открыто и в силу счётной аддитивности меры $\mu(O_{M\varepsilon}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\widetilde{\Pi}_k) \leqslant \mu(M) + \varepsilon$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^n$ измеримо (и имеет конечную меру). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое замкнутое множество $F_{M\varepsilon}$, что $F_{M\varepsilon} \subset M$, $\mu(M \setminus F_{M\varepsilon}) < \varepsilon$.

Для доказательства достаточно рассмотреть некоторый шар, содержащий M и воспользоваться леммой, перейдя к дополнениям.

Лемма доказана.

Определим расстояние от точки x до множества D в произвольном метрическом пространстве (в частности, в $\mathbb{R}^n$) таким образом:

$$\rho(x, D) \equiv \inf_{y \in D} \rho(x, y).$$

Лемма 3. Расстояние $\rho(x, D)$ от точки x до множества D непрерывно как функция аргумента x.

Для доказательства рассмотрим произвольные точки x, x_0. По определению точной нижней грани найдётся такая последовательность $\{y_n\} \subset D$, что

$$\rho(x_0, y_n) \to \rho(x_0, D). \tag{12}$$

В силу неравенства треугольника имеем для x

$$\rho(x, y_n) \leqslant \rho(x_0, y_n) + \rho(x, x_0). \tag{13}$$

С другой стороны, при любом $n \in \mathbb{N}$ в силу определения расстояния от точки до множества верно

$$\rho(x, D) \leqslant \rho(x, y_n). \tag{14}$$

Переходя в (13), (14) к пределу при $n \to \infty$, в силу (12) имеем

$$\rho(x, D) \leqslant \rho(x_0, D) + \rho(x, x_0).$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\rho(x_0, D) \leqslant \rho(x, D) + \rho(x, x_0).$$

Из последних двух неравенств следует:

$$|\rho(x, D) - \rho(x_0, D)| \leqslant \rho(x, x_0).$$

Лемма доказана.

Теперь приступим собственно к доказательству теоремы. Пусть $f(x) \in L^1$, $\varepsilon > 0$. В силу определения интеграла Лебега существует такая простая интегрируемая функция $\varphi(x)$, что $\|f - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Далее, отбрасывая некоторый хвост в ряде, представляющем интеграл от $\varphi(x)$ по X, строим простую функцию $\tilde{\varphi}$, принимающую лишь конечное число значений и такую, что $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Эту последнюю можно представить в виде

$$\tilde{\varphi} = \sum_{k=1}^{m} y_k \chi_{A_k}(x), \tag{15}$$

где обозначения имеют тот же смысл, что в лекциях 3, 4. Чтобы доказать, что φ можно с произвольной точностью приблизить в норме L^1 непрерывными функциями, это, очевидно, достаточно доказать для каждой из функций $\chi_{A_k}(x)$.

Итак, теорема будет доказана, если мы научимся для индикаторной функции любого ограниченного измеримого множества M и любого $\delta > 0$ строить непрерывную функцию $\varphi_{M\delta}(x)$ такую, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{M\delta}(x) - \chi_M(x)|\, d\mu < \delta \tag{16}$$

(в дальнейшем будем опускать M в индексе). С этой целью построим, пользуясь леммами 1 и 2, такие множества F_M, O_M, что $F_M \subset M \subset O_M$ и $\mu(O_M) - \mu(F_M) < \delta/2$, причём F_M замкнуто, а O_M открыто. Убедимся, что функция

$$\varphi_\delta(x) = \frac{\rho(x, \mathbb{R}^n \setminus O_M)}{\rho(x, \mathbb{R}^n \setminus O_M) + \rho(x, F_M)} \tag{17}$$

удовлетворяет всем указанным требованиям. Во-первых, она непрерывна. Действительно, все расстояния от точки до множеств суть непрерывные функции в силу леммы 3. Далее, знаменатель не обращается в нуль, потому что множества $\mathbb{R}^n \setminus O_M$ и F_M замкнуты и не пересекаются. Кроме того, $\varphi_\delta|_{\mathbb{R}^n \setminus O_M} = 0$, $\varphi_\delta|_{F_M} = 1$ и для любых x $\varphi_\delta(x) \in [0; 1]$. Таким образом, функции φ_δ и χ различаются лишь на $O_M \setminus F_M$ и $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\delta(x) - \chi(x)|\, d\mu \leqslant 2\mu(O_M \setminus F_m) < \delta$ (на самом деле двойку здесь можно убрать, но нам это не важно). Итак, приходим к (16).

Теорема доказана.

Легко видеть (постройте различные примеры!), что и в данном случае вложение не сюръективно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что неравенство (6) — более сильное, чем доказанное нами (5), а именно, из (6) следует (5).

2. Распространить доказанную в конце семинара теорему на случай пространств $L^p(X)$, $p \in (1; \infty)$.