СЕМИНАР 1

0. Тождества теории множеств. Свойства счётных множеств

Пусть $A \subset P$, $B \subset P$. Тогда

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \tag{1}$$
$$A \bigtriangleup B = (P \setminus A) \bigtriangleup (P \setminus B), \tag{2}$$

а также

$$P \setminus (P \setminus A) = A, \quad A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)], \quad A \cap B = P \setminus [(P \setminus A) \cup (P \setminus B)]$$

и вообще при $A_\alpha \subset P$ имеем соотношения двойственности:

$$P \setminus \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha (P \setminus A_\alpha),$$
$$P \setminus \cap_\alpha A_\alpha = \cup_\alpha (P \setminus A_\alpha).$$

Докажем некоторые из этих утверждений. Вообще, для доказательства равенства множеств $A = B$ достаточно доказать, что выполняются вложения $A \subset B$ и $B \subset A$. Для (1) рассуждаем следующем образом. Если множество A пусто, то утверждение тривиально: обе части равенства представляют собой пустые множества. Если $A = B$, то обе части равенства суть вновь пустые множества. Если $x \in A \setminus B$, то по определению разности множеств $x \in A$, $x \notin B$. Но тогда $x \in P$, потому что $A \subset P$, и $x \in P \setminus B$. Таким образом, x содержится в множестве, записанном в правой части формулы. Пусть теперь $x \in A \cap (P \setminus B)$. Это означает, что $x \in A$ и одновременно $x \in (P \setminus B)$. Из последнего получаем, что $x \notin B$. Но если $x \in A$ и $x \notin B$, то x принадлежит $A \setminus B$ — множеству в левой части формулы. Заметим, что это рассуждение показывает, что случай, когда одно из множеств, стоящих в левой и правой частях формулы, пусто, а другое непусто, невозможен. А если оба множества пусты, то равенство также имеет место. (В дальнейшем сделанное только что замечание о пустых множествах мы будем опускать, т. к. соответствующее рассуждение проводится аналогично.) Рассмотрим теперь равенство (2). Утверждение $x \in A \bigtriangleup B$ означает, что элемент x принадлежит ровно одному из двух множеств A и B. Пусть, для определённости, $x \in A$, $x \notin B$. Но поскольку $A \subset P$, имеем $x \in P$, откуда $x \notin P \setminus A$, $x \in P \setminus B$, а следовательно, $x \in (P \setminus A) \bigtriangleup (P \setminus B)$. Обратно, пусть $x \in (P \setminus A) \bigtriangleup (P \setminus B)$. Будем для определённости считать, что $x \in (P \setminus A)$, $x \notin (P \setminus B)$. Но тогда, во-первых, $x \in P$ и $x \notin A$, а во-вторых, $x \in B$ (последнее вытекает из $x \notin (P \setminus B)$, $x \in P$). Значит, x принадлежит ровно одному из множеств A и B и поэтому принадлежит их симметрической разности. Остальные утверждения читатель легко докажет самостоятельно, действуя аналогичным образом.

Далее,

$$(A_1 \cup A_2) \bigtriangleup (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \bigtriangleup B_1) \cup (A_2 \bigtriangleup B_2). \tag{3}$$

В самом деле, пусть $x \in (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)$, т. е. x принадлежит ровно одному из множеств $A_1 \cup A_2$, $B_1 \cup B_2$. Предположим для определённости, что $x \in A_1 \cup A_2$, $x \notin B_1 \cup B_2$. Тогда x не является элементом ни одного из множеств B_1, B_2, но является элементом хотя бы одного из множеств A_1, A_2. Но в этом случае x содержится хотя бы в одном из множеств $A_1 \triangle B_1$, $A_2 \triangle B_2$, а следовательно, содержится в их объединении.

Нам требуется и такое утверждение: если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2). \tag{4}$$

В самом деле, если $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, то вложение (4) имеет место просто в силу соглашения о том, что пустое множество считается подмножеством любого множества (в том числе пустого). Если же это пересечение непусто, рассмотрим произвольный его элемент x. Возможны два случая: либо x не принадлежит ни одному из множеств A_1, A_2, либо он принадлежит ровно одному из них. В обоих случаях, очевидно, $x \in (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$. Случай $x \in A_1$, $x \in A_2$ невозможен, потому что эти множества по условию не пересекаются.

Кроме того,

$$A \subset B \cup (A \triangle B),$$

что предлагается доказать читателю.

Также нам понадобятся некоторые утверждения о счётных множествах.

0. Счётное множество представляет собой «минимальное» бесконечное множество в том смысле, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

1. Подмножество не более чем счётного множества не более чем счётно.

2. Объединение не более чем счётного семейства не более чем счётных множеств не более чем счётно.

1. Одно свойство меры элементарных множеств

Для элементарных множеств B_1, B_2, $B = B_1 \cup B_2$ верно:

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2).$$

(Мы пользуемся этим свойством при доказательстве измеримости объединения конечного числа измеримых множеств. В дальнейшем мы увидим, что аналогичное утверждение верно для любых измеримых множеств, коль скоро доказана хотя бы конечная аддитивность меры Лебега.)

В самом деле, достаточно представить B_1, B_2, $B_1 \cup B_2$ в виде дизъюнктных объединений (т. е. объединений непересекающихся множеств): $B_1 = (B_1 \setminus B_2) \sqcup (B_1 \cap B_2)$, $B_2 = (B_2 \setminus B_1) \sqcup (B_1 \cap B_2)$, $B_1 \cup B_2 = (B_1 \setminus B_2) \sqcup (B_1 \cap B_2) \sqcup (B_2 \setminus B_1)$ — и воспользоваться (конечной) аддитивностью меры на элементарных множествах. Читателю предлагается доказать, что объединения действительно дизъюнктны.

2. Основные свойства меры Лебега

Мера Лебега обладает следующими важнейшими свойствами, которыми мы будем пользоваться:

1) семейство измеримых множеств замкнуто относительно операций разности, симметрической разности, счётного объединения и счётного пересечения (допускается мера, равная $+\infty$);

2) мера Лебега является счётно-аддитивной на этом множестве;

3) мера Лебега полна, т. е. всякое множество, внешняя мера которого равна 0, измеримо, и его мера Лебега равна 0;

4) мера Лебега непрерывна относительно монотонного предельного перехода (с доказательством и пояснением, как переформулировать утверждения для бесконечной меры).

3. Обоснование необходимости «сужения» внешней меры до меры Лебега. Существование неизмеримых множеств

Как показывает пример (см. Колмогоров, Фомин, гл. V, § 1, окончание), существуют множества, предположение об измеримости которых противоречит требованию счётной аддитивности меры. Значит, внешняя мера, будучи определена для всех множеств, не является счётно-аддитивной, и её необходимо «ограничить» на семейство измеримых по Лебегу множеств.

Ниже (кроме раздела 6) будем рассматривать только меру Лебега на плоскости или на прямой.

4. Некоторые классы измеримых множеств

0. Любое конечное или счётное множество точек (на плоскости, прямой, в пространстве…) измеримо и имеет меру 0. В самом деле, конечное или счётное множество точек на плоскости $\{x_n\}$ может быть покрыто системой квадратов (отрезков, кубов…) $\{Q_n\}$, где $m(Q_n) = \frac{1}{2^n}\varepsilon$. Таким образом, с учётом произвольности ε, $\mu^*(\{A_n\}) = 0$, откуда в силу полноты меры Лебега и вытекает сформулированное утверждение. Следствие: множество с положительной (ненулевой) лебеговой мерой несчётно.

1. Все открытые и замкнутые множества измеримы. (См. задачу 9.)

2. Назовём борелевскими множествами (на прямой или плоскости) все множества, которые можно получить из открытых и замкнутых множеств конечными или счётными применениями операций объединения, пересечения, разности. Очевидно, борелевские множества измеримы. (Можно доказать, что ими все измеримые множества не исчерпываются.)

5. Некоторые измеримые множества и их мера. Множество Кантора

1. Доказать по определению, что множество $A = [0;1] \setminus \mathbb{Q}$ измеримо и имеет меру 1.

Обоснуем прежде всего измеримость множества A. Для этого рассмотрим элементарное множество $[0;1]$ и заметим, что $A \triangle [0;1]$ есть в точности множество всех рациональных точек отрезка $[0;1]$, мера (а следовательно, и внешняя мера) которого равна 0, что меньше любого наперёд заданного ε. Теперь осталось показать, что внешняя мера множества A равна 1. Неравенство $\mu^*(A) \leqslant 1$ очевидно, поскольку отрезок $[0;1]$ является одним из возможных покрытий множества A элементарными множествами. Докажем теперь, что если $\{l_i\}$ — произвольное конечное или счётное покрытие A элементарными множествами (в случае прямой сводящимися к интервалам, полуинтервалам, отрезкам, замкнутым и открытым лучам), то $\sum_i m(l_i) \geqslant 1$. Сначала рассмотрим случай конечного покрытия. Если оно содержит хотя бы один бесконечный промежуток, то указанная сумма равна бесконечности и утверждение доказано. Если бесконечных промежутков нет, то по индукции легко устанавливаем, что конечное объединение промежутков или покрывает весь отрезок, за исключением, возможно, конечного числа точек (и тогда его суммарная мера не меньше длины отрезка), или оставляет непокрытым хотя бы один отрезок, вложенный в данный. Но в последнем случае окажутся непокрытыми иррациональные точки этого меньшего отрезка и рассматриваемое «покрытие» множества A не будет не будет на самом деле его покрытием. Если же покрытие счётно, то можно в силу леммы Гейне—Бореля извлечь из него конечное подпокрытие и применить только что изложенное рассуждение.

2. Множество Кантора замкнуто, имеет меру 0, равномощно отрезку. (См. задачу 6.) Таким образом, *любое счётное множество точек имеет лебегову меру 0, но обратное неверно.*

3. Отрезок имеет плоскую меру 0. (См. ниже раздел 6.)

4. Доказать, что A борелево, и вычислить его меру, если

а) $A = \cup_{n=1}^{\infty}(n - \frac{1}{3^n}; n + \frac{1}{3^n}]$;

б) $A = \cup_{n=1}^{\infty}[n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}]$;

в) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$;

г) $A = ((0;3] \otimes [1;2)) \setminus (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q})$;

д) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Q}\} \otimes (0; +\infty)$.

Рассмотрим сначала пункты а) и б). Тот факт, что рассмотренные в них множества суть борелевы, очевидным образом следует из их конструкции: в обоих случаях речь идёт о счётных объединениях промежутков. Для вычисления меры достаточно воспользоваться счётной аддитивностью меры и значением меры (длины) промежутка: $\mu([a;b]) = b - a$ при $a \leqslant b$ (аналогично для остальных типов промежутков). Поскольку в каждом случае промежутки не пересекаются, достаточно найти сумму их мер (длин). В п. а) получаем: $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$, во втором же случае имеет расходящийся ряд и $\mu(A) = +\infty$. В следующем примере рассматриваемое множество получается исключением из плоскости объединения счётного числа прямых. Поскольку каждая прямая имеет плоскую меру 0 (см. ниже раздел 6), а в силу счётной аддитивности то же можно сказать об их объединении, получаем, что $\mu(A) = \mu(\mathbb{R}^2) - 0 = +\infty$. По аналогичным причинам мера множества, рассмотренного в п. г), равна 3. В самом деле, из прямоугольника удаляются все рациональные пары чисел, а таких пар счётное множество (оно получается как счётное множество счётных множеств: при любом $r_1 \in \mathbb{Q}$ множество пар вида (r_1, r_2) счётно). Осталось лишь учесть, что счётное множество имеет лебегову меру 0, как указано выше в разделе 4. Для решения п. д) достаточно заметить, что рассматриваемое множество представляет собой счётное объединение полупрямых. В самом деле, при каждом $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = r\}$ счётно, а поэтому $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Q}\}$ счётно как объединение счётного семейства счётных множеств. Следовательно, искомая мера равна 0.

5. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, 0 < y < e^{-x}|\sin x|\}$.

Для решения этой задачи достаточно учесть счётную аддитивность меры и результат задачи 3 (ниже, в задачах для самостоятельного решения). Тогда имеем:

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} e^{-x}|\sin x|\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k} \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k} \frac{1 + e^{-\pi}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

6. Связь лебеговых мер в евклидовых пространствах разной размерности

1. Пусть P — $(n-1)$-мерная координатная плоскость в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда любое её подмножество имеет нулевую μ_n-меру.

В самом деле, рассмотрим координатную плоскость $P = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_n = c\}$. Оценим внешнюю меру множества P. В качестве покрытия возьмём «слои», представляющие собой параллелепипеды $\Pi_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid |x_i| \leqslant k, i = 1, 2, \ldots, n-1, |x_n - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1} 2^k}\}$. Легко видеть, что мера (объём) каждого такого параллелепипеда равна $\varepsilon/2^k$, откуда $\mu^*(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) = \varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $\mu^*(P) = 0$. А тогда в силу общих свойств меры Лебега (см. лекцию 1) P измеримо и $\mu(P) = 0$.

Отсюда следует, что и любое подмножество P' указанной плоскости имеет меру 0. В самом деле, любое покрытие плоскости есть покрытие любого её подмножества, поэтому рассуждение применимо и к P'. Так, например, плоская мера Лебега отрезка равна 0.

2. Доказать, что существует μ_2-измеримое подмножество $\mathbb{R}^2$, проекции которого на координатные оси μ_1-неизмеримы.

Ранее было указано, что неизмеримые множества существуют. В частности, существует хотя бы одно неизмеримое множество на прямой. Обозначим одно из таких множеств символом A и построим множества $B_1 = \{(x, y) \mid x \in A, y = 0\}$ и $B_2 = \{(x, y) \mid y \in A, x = 0\}$. Тогда множество $B = B_1 \cup B_2$ удовлетворяет условию. В самом деле, само множество B измеримо как множество на плоскости, т. к. представляет собой объединение двух подмножеств координатных «плоскостей». В то же время, каждая из проекций, имеющая вид $A \cup \{0\}$, представляет собой, очевидно, неизмеримое (линейной мерой Лебега) множество.

Задачи для самостоятельного решения

При решении задач можно пользоваться утверждениями, сформулированными на семинаре, кроме того, которое, собственно, требуется доказать.

1. Доказать тождества и вложения, сформулированные в разделе 0 и не доказанные на семинаре. Доказать также следующие утверждения, где $A, B, \ldots$ — произвольные подмножества некоторого множества P:

1) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, причём если объединение в левой части дизъюнктно, то тем же свойством обладает и объединение в правой части;

2) $A \triangle B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$ (таким образом, здесь требуется доказать и тот факт, что объединение в правой части всегда дизъюнктно);

3) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

4) $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$.

1а*. Завершить формулу и доказать получившееся утверждение:

1) $A = (A \setminus B) \cup \ldots$;

2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup \ldots$.

2*. Доказать сформулированные в разделе 0 свойства счётных множеств. При этом доказательство утверждения 2 можно разбить на следующие этапы:

1) Объединение конечного и счётного множества счётно.

2) Объединение двух счётных множеств счётно.

3) Объединение конечного семейства счётных множеств счётно.

4) Объединение счётного семейства конечных множеств счётно.

5) Объединение счётного семейства счётных множеств счётно.

2а (добавлена 24.03.11). Доказать, что множество алгебраических чисел счётно. (Число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами.)

3. Назовём *подграфиком* функции $f(x)$ множество $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f), 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, где $D(f)$ — область определения функции $f(x)$. Доказать, что подграфик неотрицательной функции, определённой на отрезке $[a;b]$ и интегрируемой по Риману, измерим по Лебегу и его мера равна $\int_a^b f(x)\,dx$. (Указание. Можно воспользоваться суммами Дарбу.)

4. (Продолжение.) Обобщить это утверждение на случай функций, интегрируемых по Риману в несобственном смысле (для интегралов первого и второго рода).

5. Доказать, что множество A измеримо, и найти его меру, если

а) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant y < \frac{a^2}{a^2+x^2}\}$, $a = \mathrm{const} > 0$;

б) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\}$;

в) $A = \cup_{n=1}^{\infty}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [n;n+1), 0 \leqslant y \leqslant \frac{(x-n)^n}{n}\}$.

6*. Доказать, что множество Кантора равномощно отрезку. (Указание. Можно воспользоваться троичной записью действительных чисел.)

7*. (Продолжение.) Найти меру множества всех тех чисел отрезка $[0;1]$, в стандартном десятичном разложении которых отсутствует цифра 5.

8. Можно ли указать замкнутое подмножество A замкнутого единичного квадрата, мера μ_2 которого равна 1 и которое не совпадает со всем квадратом? (Указание. Рассмотрите квадрат как метрическое пространство и воспользуйтесь тем, что разность квадрат минус A будет непустым открытым множеством.)

9*. Докажем, что любое непустое открытое множество на плоскости представимо в виде счётного (не более чем счётного) объединения открытых прямоугольников и, следовательно, измеримо. Будем в этой задаче под открытыми прямоугольниками понимать только те непустые открытые прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат. Назовём прямоугольник рациональным, если его стороны лежат на вертикальных прямых с рациональными абсциссами и на горизонтальных прямых с рациональными ординатами.

а) Докажите, что любой открытый прямоугольник можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников (не обязательно попарно непересекающихся).

б) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения открытых прямоугольников. (Указание. Представьте его сначала в виде объединения открытых кругов.)

в) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде объединения рациональных прямоугольников.

д) Докажите, что любое открытое множество можно представить в виде счётного объединения рациональных прямоугольников.

10*. В частном случае открытого множества на прямой можно рассуждать по-другому.

а) Показать, что (непустое) открытое множество A на прямой представляет собой объединение непересекающихся промежутков. (Указание. Разбить все точки A на классы эквивалентности, относя к одному классу точки x, y, для которых существует такой интервал $(a;b)$, что $x \in (a;b)$, $y \in (a;b)$, $(a;b) \subset A$.)

б) Показать, что множество промежутков, на которые оказалось разбитым A, не более чем счётно.

В обоих случаях (задачи 9 и 10) измеримость открытого множества будет следовать из счётной аддитивности меры.

СЕМИНАР 2

7. Тождества теории множеств. Свойства счётных множеств

На втором семинаре было продолжено обсуждение некоторых вопросов первого семинара. Так, было обосновано свойство непрерывности меры.

Теорема о непрерывности меры. Пусть $\{A_n\}$ — такая последовательность измеримых подмножеств множества X, что

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots . \tag{5}$$

Тогда, при условии $\mu(X) < +\infty$, имеет место предельное соотношение

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{6}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда множество $A \equiv \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ пусто. Рассмотрим множества

$$\widetilde{A_n} = A_n \setminus A_{n+1}.$$

В частности,

$$\widetilde{A_1} = A_1 \setminus A_2.$$

Заметим, что эти множества не пересекаются. В самом деле, при любом натуральном k $\widetilde{A_k} \cap \widetilde{A_{k+1}} = \varnothing$. Но тогда тем более, в силу (5), не пересекаются и множества $\widetilde{A_k}$, $\widetilde{A_{k+p}}$ при любом натуральном p. С другой стороны,

$$A_n = \sqcup_{k=n}^{\infty} \widetilde{A_k} \tag{7}$$

и, в частности,

$$A_1 = \sqcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{A_k}. \tag{8}$$

Действительно, если $x \in A_n$, то в силу $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ обязательно найдётся такое множество A_m, $m > n$, что $x \notin A_m$, $x \in A_{m-1}$. Но тогда $x \in \sqcup_{k=n}^{\infty} \widetilde{A_k}$. Таким образом, $A_n \subset \sqcup_{k=n}^{\infty} \widetilde{A_k}$. Обратное вложение непосредственно следует из (5). Но тогда, в силу счётной аддитивности меры, из (8) получаем

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\widetilde{A_k}), \tag{9}$$

а из (7) —

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(\widetilde{A_k}), \tag{10}$$

Но множество $A_1 \subset X$ имеет конечную меру. Следовательно, ряд (9) сходится и его частичные суммы стремятся к нулю. На эти частичные суммы — не что иное, как правые части (10). Таким образом, мы получили

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 = \mu(A),$$

поскольку $A = \varnothing$.

Теперь обратимся к случаю, когда $A \neq \varnothing$. Достаточно положить $\overline{A_n} = A_n \setminus A$. Тогда $A_n = \overline{A_n} \sqcup A$, $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \varnothing$. По только что доказанному $\lim_{n\to\infty} \mu(\overline{A_n}) = 0$. С другой стороны,

$$\mu(A_n) = \mu(\overline{A_n}) + \mu(A),$$

откуда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\overline{A_n}) + \mu(A) = \mu(A).$$

Теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что условие $\mu(X) < +\infty$ существенно. В самом деле, рассмотрим множества на плоскости $A_n = \{(x, y) \mid x > n, 0 < y < 1\}$. Тогда $\mu(A_n) = +\infty$, поэтому предел в формуле (6) равен $+\infty$. Однако их пересечение пусто, и следовательно, левая часть формулы (6) равна нулю.

Следствие. Пользуясь свойствами меры и переходя к дополнениям, можно доказать, что для измеримых множеств

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

верно предельное соотношение

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Также были доказаны два утверждения из лекции 2. Рассмотрим их.

1. Имеет место вложение

$$B \triangle \cup_{k=1}^{\infty} A_k \subset (B \triangle \cup_{k=1}^{n} A_k) \cup \left(\cup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right).$$

В самом деле, если

$$x \notin B, \quad x \in \cup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

то $x \in B \triangle \cup_{k=1}^{n} A_k$. В случае же, когда

$$x \in B, \quad x \notin \cup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

надо рассмотреть две возможности. Во-первых, если существует такое $k \geqslant n+1$, что $x \in A_k$, то x принадлежит правому «слагаемому» (может принадлежать и левому, но это уже не важно). Если же такого k нет, это означает, что x входит в одно из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Но тогда в силу $x \notin B$ имеем $x \in B \triangle \cup_{k=1}^{n} A_k$.

2. При доказательстве единственности продолжения меры с алгебры $\mathcal{A}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}_\mu$ мы воспользовались следующим рассуждением. Если $A \in \mathcal{A}_\mu$, то при произвольном $\varepsilon > 0$ найдётся такое $B \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, как мы сейчас докажем, что существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что

$$A \triangle B \subset \cup_{n=1}^{\infty} C_n,$$

причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon.$$

В самом деле, пусть $\mu^*(A \triangle B) = \varepsilon - \delta$. Тогда в силу определения внешней меры (см. определение 6 в лекции 2) найдётся такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что

$$A \triangle B \subset \cup_{n=1}^{\infty} C_n$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon - \delta/2,$$

что и требовалось доказать.

Также были разобраны задачи 8 и 10. В данном тексте мы бы хотели сосредоточиться на понятии отношения эквивалентности, которое было введено в связи с задачей 10 и имеет много важнейших применений.

Итак, пусть дано некоторое множество X.

Определение 1. Говорят, что на множестве X задано отношение, если в декартовом произведении $X \times X \equiv \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$ выбрано некоторое подмножество упорядоченных пар $Q \subset X \times X$.

Определение 2. Говорят, что на множестве X задано отношение эквивалентности, если в декартовом произведении $X \times X \equiv \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$ выбрано некоторое подмножество упорядоченных пар $R \subset X \times X$, удовлетворяющее следующим условиям:
1) для любого $a \in X$ верно: $(a, a) \in R$ (иными словами, любой элемент эквивалентен самому себе);
2) для любых $a \in X$, $b \in X$ из $(a, b) \in R$ следует $(b, a) \in R$ (эквивалентность не зависит от порядка);
3) для любых $a \in X$, $b \in X$, $c \in X$ из $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ следует $(a, c) \in R$ (транзитивность эквивалентности).

Если теперь записать $(a, b) \in R$ в более привычном виде $a \sim b$, то только что сформулированные условия могут быть кратко записаны в виде
1) $\forall a \in X\ a \sim a$;
2) $\forall a \in X, \forall b \in X\ a \sim b \Rightarrow (b, a) \in R$;
3) $\forall a \in X, \forall b \in X, \forall c \in X\ a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

В качестве «крайних» примеров можно привести следующие: а) будем считать каждый элемент множества X эквивалентным лишь самому себе, б) будем считать все его элементы эквивалентными друг другу. В качестве более осмысленного примера можно предложить в) отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел, при котором эквивалентными считаются любые два числа одинаковой чётности.

Подчеркнём, что любое отношение, удовлетворяющее указанным условиям, называется отношением эквивалентности, вне зависимости от того, соответствует ли оно некоторой «эквивалентности» в обычном понимании или нет. Однако сама по себе конструкция отношения и, в частности, отношения эквивалентности не интересна. Смысл в таком общем понятии, как и, пожалуй, во всех общих и абстрактных понятиях математики, — в возможности доказать разом, «автоматически» различные факты. (В данном случае очень важна задача 3.)

Задачи для самостоятельного решения

0. Показать, что отношение равенства на множестве действительных чисел является отношением эквивалентности. Как задать отношение равенства в терминах подмножеств декартова произведения?

1. Привести пример такого отношения на множестве действительных чисел, которое не удовлетворяет условию 2.

2. а) Проверить, что приведённые три примера отношений эквивалентности действительно являются отношениями эквивалентности. б) «Перевести» описания трёх примеров отношений эквивалентности на язык подмножеств декартова произведения.

3. Доказать, что любое отношение отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно задано, на непересекающиеся подмножества.

4. (Продолжение.) Предположим, некоторое множество A разбито на непересекающиеся подмножества A_α. Верно ли, что отношение «элемент x находится в одном подмножестве с элементом y» является отношением эквивалентности?

5. Разбить множество рациональных чисел на счётное семейство непересекающихся подмножеств.