# СЕМИНАР 18.03.11

## 1. Вариация на тему неравенства Гёльдера

1. Привести пример таких функций

$$f(x) \in L^1[0;1], \quad g_1(x), g_2(x) \in L^\infty[0;1],$$

что

$$\|g_1\|_\infty = \|g_2\|_\infty = 1, \quad 0 < \|f\|_1 = \int_{[0;1]} f(x)g_1(x)\,d\mu = \int_{[0;1]} f(x)g_2(x)\,d\mu, \quad g_1 \neq g_2.$$

Здесь подразумевается, что $g_1 \neq g_2$ как элементы $L^\infty[0;1]$, т. е. две эквивалентные функции условию задачи не удовлетворяет.

Легко видеть, что в качестве примера таких функций можно взять $g_1 = 1 \equiv \chi_{[0;1]}$, $f = g_2 = \chi_{[0;\frac{1}{2}]}$, где $\chi_A$ — индикаторная (характеристическая) функция множества $A$.

## 2. Общие вопросы теории линейных пространств (напоминание)

Напомним хорошо известные факты, которые важны для понимания рассматриваемого в данном семинаре материала.

1. Пространство, сопряжённое к линейному нормированному, банахово.

2. Линейный функционал есть частный случай линейного оператора.

3. Для линейного оператора и, в частности, для линейного функционала, ограниченность равносильна непрерывности. Поэтому ниже *при рассмотрении линейных операторов и функционалов* словами «непрерывный» и «ограниченный» будем пользоваться как синонимами. Это удобно, поскольку в некоторых случаях проще решить вопрос о непрерывности, а в других — об ограниченности линейного функционала.

4. Следующие определения нормы линейного оператора равносильны (мы исключаем из рассмотрения тривиальный случай нульмерного пространства):

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{x\neq\theta_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1\leqslant 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2.$$

## 3. Конструкция пространств последовательностей $l^p$ как пространств Лебега и общий вид линейного функционала в них

Уже известные пространства последовательностей $l^p$ можно рассмотреть как частный случай пространств $L^p(X)$, выбрав специальным образом пространство $X$ с мерой. В таком случае неравенства Гёльдера и Минковского получатся автоматически как следствие общей теории.

Действительно, рассмотрим $X = \mathbb{N}$ и положим для каждого конечного множества натуральных чисел его меру равной количеству чисел в множестве: $\mu(A) = \mathrm{card} A$. При этом мера любого множества, состоящего из одного натурального числа, будет равна единице. Легко видеть, что на каждом конечном подмножестве вида $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ мы таким образом действительно ввели меру. В то же время, поскольку

$$\mathbb{N} = \cup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

то мы тем самым ввели $\sigma$-конечную меру на всём множестве натуральных чисел. Следовательно, автоматически вводится и интеграл Лебега на таком пространстве. Он приобретает вид

$$\int_A f(n)\, d\mu \equiv \sum_{n \in A} f(n),$$

где $f(n)$ — функция, заданная на множестве натуральных чисел, т. е. последовательность. Теперь ясно, что $l^p$, рассматриваемое как частный случай пространства $L^p(X)$ при $X = \mathbb{N}$, — это пространство таких последовательностей $x \equiv \{x^n\}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty.$$

Норма в этом пространстве, как следует из общей теории пространства $L^p(X)$, задаётся равенством

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При этом свойство полноты полученного линейного нормированного пространства следует из общей теории, а также может быть установлено непосредственно. Однако интересно получить отдельно для этого случая теорему об общем виде линейного функционала, поскольку доказательство гораздо более «обозримо» и, в частности, не использует теорему Радона—Никодима.

Итак, из общей теории мы знаем, что $(L^p(X))^* = L^q(X)$, $p \in [1; +\infty)$, где равенство понимается в виде изометрического изоморфизма. (Здесь и далее считаем $p$ и $q$ сопряжёнными в смысле равенства $p^{-1} + q^{-1} = 1$.) Это означает, что между линейными непрерывными функционалами из $(L^p(X))^*$ и функциями из $L^q(X)$ можно установить взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет линейную структуру и норму:

$$\text{Если} \quad \tilde{g}_1 \sim g_1, \tilde{g}_2 \sim g_2, \quad \text{где} \quad \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in (L^p(X))^*,\ g_1, g_2 \in L^q(X), \tag{1}$$

$$\text{то} \quad \lambda\tilde{g}_1 + \mu\tilde{g}_2 \sim \lambda g_1 + \mu g_2 \tag{2}$$

$$\text{и} \quad \|\tilde{g}\|_{(L^p(X))^*} = \|g\|_q. \tag{3}$$

Установим этот изометрический изоморфизм непосредственно, сначала для случая $l^1$, а затем для $l^p$, $p \in (1; +\infty)$.

Прежде всего вспомним, что в общем случае $(L^1(X))^* = L^\infty(X)$. Выясним, какое пространство будет аналогом $L^\infty(X)$. Вспомним, что $L^\infty(X)$ состоит из классов эквивалентности тех функций, для каждой из которых существует такое $c$, что

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > c\}) = 0. \tag{4}$$

В нашем примере меру нуль имеют лишь пустые множества. Поэтому, во-первых, классы эквивалентности содержат ровно по одной функции (последовательности), а во-вторых, из (4) следует, что $l^\infty$ состоит в точности из ограниченных последовательностей. Это пространство часто для краткости также обозначают $m$. Норма же на $l^\infty \equiv m$ задаётся равенством

$$\|f\|_\infty \equiv \|\{f_1, f_2, \ldots\}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|. \tag{5}$$

Легко видеть, что если для произвольной ограниченной последовательности $f \equiv \{f_1, f_2, \ldots\} \in m$ и для произвольного $x \equiv \{x_1, x_2, \ldots\} \in l^1$ положить

$$\langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n, \tag{6}$$

то ряд будет сходиться, — покажите это самостоятельно, пользуясь определением сходимости ряда или критерием Коши. Далее, очевидно, что выполняется (2). Кроме того, из оценки

$$|\langle f, x\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n\right| \leqslant \sup_{n\in N} |f_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \equiv \|f\|_\infty \cdot \|x\|_1 \tag{7}$$

следует, что полученный линейный функционал ограничен (а следовательно, и непрерывен). Осталось доказать:

1) обратно, любой линейный функционал $\tilde{f}$, действующий в $l^\infty$, может быть задан с помощью некоторой последовательности $f \in m$;

2) выполняется условие изометричности (3).

Для доказательства 1) положим $f_n = \langle \tilde{f}, e_n\rangle$, где $e_n = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ (единица стоит на $n$-ом месте) — элементы стандартного базиса в $l^\infty$. Легко проверить, что $\|e_n\|_1 = 1$. Поскольку по условию $\tilde{f}$ — ограниченный функционал, то $f_n \in m$; при этом функционал $\tilde{f}$ действительно задаётся формулой (6). Таким образом, взаимно однозначное соответствие установлено. Для доказательства 2) заметим прежде всего, что в силу (7) $\|\tilde{f}\|_{(l^1)^*} \leqslant \|f\|_\infty$. Обратное неравенство следует из того наблюдения, что

$$\|\tilde{f}\|_{(l^1)^*} = \sup_{\|x\|_1=1} \left|\langle \tilde{f}, x\rangle\right| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\langle \tilde{f}, e_n\rangle\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| = \|f\|_\infty.$$

Итак, мы установили, что $(l^1)^* = m \equiv l^\infty$ в смысле изометрического изоморфизма указанных линейных пространств.

Сделаем то же самое для случая $(l^p)^* = l^q$. Определив для каждой последовательности $f \in l^q$ линейный функционал $\tilde{f}$ по формуле (6), мы в силу неравенства Гёльдера снова получаем, что функционал задан на всём $l^p$ и ограничен, причём выполнено свойство (2). Таким образом, $l^q \subset (l^p)^*$. По-прежнему нетривиально доказательство лишь двух фактов: 1) обратного вложения $(l^p)^* \subset l^q$ и 2) изометрии.

Для доказательства 1) положим $f_n = \langle f, e_n \rangle$, где смысл обозначения $e_n$ прежний. Далее, положим

$$x^{(k)} = \{|f_1|^{q-1} \operatorname{sgn} f_1, |f_2|^{q-1} \operatorname{sgn} f_2, \ldots, |f_k|^{q-1} \operatorname{sgn} f_k, 0, 0 \ldots\}. \tag{8}$$

При этом мы построили последовательность элементов $x^{(k)}$ пространства $l^p$ (пусть читатель сам установит, что $x^{(k)} \in l^p$). Каждый из этих элементов является числовой последовательностью, определённой формулой (8). Тогда в силу линейности функционала $\tilde{f}$ имеем $\langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle = \sum_{n=1}^{k} |f_k|^q$. Но

$$\left| \langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle \right| \leqslant \|\tilde{f}\| \cdot \|x^{(k)}\| = \|\tilde{f}\| \left( \sum_{n=1}^{k} |f_n|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|\tilde{f}\| \left( \sum_{n=1}^{k} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

где мы пользовались ограниченностью функционала $\tilde{f}$ и для краткости опустили обозначения пространств у норм $\|\tilde{f}\|_{(l^p)^*}$ и $\|x^{(k)}\|_p$. Итак, при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle \right| = \langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle = \sum_{n=1}^{k} |f_n|^q \leqslant \|\tilde{f}\| \left( \sum_{n=1}^{k} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Разделив последнее неравенство в этой цепочке на $\left( \sum_{n=1}^{k} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{p}}$, с учётом $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ получаем

$$\left( \sum_{n=1}^{k} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\tilde{f}\|$$

при любом $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q$$

и оценка

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\tilde{f}\|.$$

таким образом, $f \in l^q$ и $\|f\|_q \leqslant \|\tilde{f}\|_{(l^p)^*}$.

С другой стороны, $\|\tilde{f}\| \leqslant \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ в силу неравенства Гёльдера.

Итак, для случая $p \in (1; +\infty)$ изометрический изоморфизм между пространствами $(l^p)^*$ и $l^q$ также доказан.

5. Можно показать (пользуясь соображениями сепарабельности), что, напротив, $m^* \neq l^1$, но мы этого делать пока не будем.

6. Хорошо известно, что в силу теоремы Рисса в гильбертовом пространстве $H$ можно определить слабую сходимость элементов в терминах скалярного произведения:

$$x_n \rightharpoonup x, \quad \text{если} \quad \forall y \in H \quad (y, x_n) \to (y, x).$$

Далее, если $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в (сепарабельном) гильбертовом пространстве, то $e_n \rightharpoonup 0$ (это следует из требования стремления к нулю коэффициентов в разложении по базису произвольного элемента пространства $H$). Заметим, однако, что в нетрудно привести пример, когда в банаховом пространстве выбран нормированный базис $\{e_n\}$ (понятие ортогональности теряет смысл) такой, что $e_n$ уже не стремится слабо к нулевому элементу. Такой пример уже был рассмотрен выше: это пространство $l^1$ со стандартным базисом.

## 4. Некоторые конкретные примеры линейных функционалов в различных функциональных пространствах

1. Установить непрерывность следующих линейных функционалов над пространством $C[-1;1]$:
1) $\langle f, x\rangle = x(0)$;
2) $\langle f, x\rangle = \frac{1}{3}(x(-1)+x(1))$;
3) $\langle f_\varepsilon, x\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon)+x(-\varepsilon)-2x(0)), \quad \varepsilon \in [-1;1]$;
4) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 x(t)\,dt$;
5) $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^0 x(t) - \int_0^1 x(t)\,dt$;
6) $\langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^\infty \frac{x(1/n)}{n!}$.

Проще установить ограниченность, что в случаях 1—5 делается тривиально. При этом можно использовать общее утверждение о том, что ограниченные линейные функционалы образуют банахово пространство и поэтому, в частности, их линейная комбинация, а также сходящийся по норме ряд суть снова ограниченные линейные функционалы. Последнее соображение удобно использовать в примере 6.

2. Выяснить, будут ли ограниченными в $C[0;1]$ следующие линейные функционалы:
1) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$;
2) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 x(t^2)\,dt$;
3) $\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)\,dt$.

Задачи 1), 2) решаются с помощью интегрирования по частям. При этом в случае 2) после получения несобственного интеграла $\int_0^1 \frac{|x(y)|}{2\sqrt{y}}\,dy$ следует применить оценку $|x(y)| \leqslant \|x\|_C$ и вынести мажоранту за знак интеграла. Исследование существования предела и ограниченности функционала в примере 3) предложено в виде домашней задачи.

3. Установить ограниченность данного линейного функционала и найти его норму:
1) $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt, \quad x \in C[-1;1]$;
2) $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt, \quad x \in L^1[-1;1]$;
3) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 tx(t)\,dt, \quad x \in C^1[-1;1]$;
4) $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt, \quad x \in L^2[-1;1]$;
5) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 t^{-1/3}x(t)\,dt, \quad x \in L^2[0;1]$.

1) Если бы нам нужно было только установить ограниченность функционала $f$, было бы достаточно оценить подынтегральное выражение следующим образом: $|tx(t)| \leqslant 1 \cdot \|x\|_C$ при $t \in [-1;1]$, откуда $\|f\| \leqslant 2$. Однако ясно, что это слишком грубая оценка, поскольку множитель

$t$ «зарезает» значение интеграла. Поэтому проведём более тонкую оценку подобно тому, как это было сделано в предыдущей задаче:

$$\left|\int_{-2}^{1} tx(t)\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |t| \cdot |x(t)| \leqslant \int_{-1}^{1} |t| \|x\|_C dx \leqslant 2\|x\|_C \int_0^1 t\, dt = \|x\|_C,$$

откуда $\|f\| \leqslant 1$. Можно убедиться, что $\|f\| = 1$, рассмотрев последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & x \in [-1; -\frac{1}{n}]; \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$$

(сделайте это самостоятельно). Поэтому норма рассматриваемого функционала равна 1.

2) В силу неравенства Гёльдера при $p = 1$, $q = \infty$ имеем $\|f\| \leqslant 1$. Легко видеть, что это величина $\frac{|\langle f,x\rangle|}{\|x\|_1}$ достигает этого значения при $x(t) = \operatorname{sgn} t$.

3) В данном случае с помощью интегрирования по частям получаем

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant |x(1)| + \int_0^1 \frac{t^2}{2}|x'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_C + \frac{1}{6}\|x'\|_C \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_{C^1}.$$

Обратное неравенство следует из рассмотрения функции $x(t) = 1$.

4) Пользуясь неравенством Коши—Буняковского и тем фактом, что при совпадении функций оно обращается в равенство, находим $\|f\| = \|t\|_{L^2[-1;1]} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Из аналогичных соображений, пользуясь тем фактом, что $t^{-1/3} \in L^2[0;1]$, получаем $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^{-2/3}} = \sqrt{3}$.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Установить, что пространства $l^p$ суть банаховы относительно введённой выше нормы. При этом не пользоваться общей теорией лебеговых пространств.

2. Решить задачу 2.3) из раздела 4.

3. Установить непрерывность и найти норму следующих линейных функционалов:

1) $\langle f, x\rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in l^2;$

2) $\langle f, x\rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in m.$

4. Выяснить, при каких $p$ функционалы

1) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})\, dt;$

2) $\langle f, x\rangle = \int_0^1 x(t^2)\, dt$

непрерывны в $L^p[0;1]$.

5. Пусть $X$ — вещественное линейное пространство, $f$ — определённый на нём линейный функционал. Доказать, что он непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in X \mid \langle f, x\rangle < c\}, \quad \{x \in X \mid \langle f, x\rangle > c\}$$

открыты относительно метрики пространства $X$.