СЕМИНАР 22.04.11

В задачах этого семинара используется обозначение $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ — произвольная основная функция из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

1. Дифференцирование обобщённых функций

1. $\frac{d}{dx}\operatorname{sgn} x = 2\delta(x)$.

Действительно, имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\operatorname{sgn} x, \varphi(x) \right\rangle = \langle \operatorname{sgn} x, \varphi'(x) \rangle = -\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{sgn} x \varphi'(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(x)|_{-\infty}^{0} - \varphi(x)|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \varphi(0) - (-\varphi(0)) = 2\varphi(0) = 2\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle 2\delta(x), \varphi(x) \rangle.$$

2. (См. пример 13 из лекции 12.) Пусть $f(x) \in C^1(x \leqslant x_0) \cap C^1(x \geqslant x_0)$, что понимается следующим образом: $f(x) \in C^1(x < x_0) \cap C^1(x > x_0)$ и существуют (вообще говоря, различные) *конечные* предельные значения производной $f'(x)$ при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$. Отметим, что отсюда сразу следует, что $f'(x)$ ограничена при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$, а поэтому (в силу критерия Коши существования предела функции в точке) существуют конечные предельные значения $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. Имеем далее

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\varphi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\, dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx =$$
$$= -f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{x_0-0} - f(x)\varphi(x)|_{x_0+0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\, dx + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\, dx =$$
$$= f(x_0+0)\varphi(x_0) - f(x_0-0)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\}\varphi(x)\, dx = \langle \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0), \varphi \rangle.$$

3. 1) $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$. Действительно, имеем в силу определения обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, а также определения произведения обобщённых функций:

$$\left\langle x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi(x) \rangle.$$

2) $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = 1$. Имеем

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x^2\varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0)}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi(x) \rangle.$$

3) $x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3}=1$. Имеем

$$\left\langle x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3},\varphi(x)\right\rangle=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x^3},x^3\varphi(x)\right\rangle=\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^3\varphi(x)-0^3\varphi(0)-(x^3\varphi(x))'|_0\cdot x)}{x^3}dx=$$
$$=\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^3\varphi(x)-0^3\varphi(0)-0\cdot x)}{x^3}dx=\int_{\mathbb{R}^1}\varphi(x)\,dx=\langle 1,\varphi(x)\rangle.$$

4. (См. пример 15 из лекции 12.) $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}=\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Действительно,

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3},\varphi(x)\right\rangle=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x^3},x^2\varphi(x)\right\rangle=\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^2\varphi(x)-0^2\varphi(0)-(x^2\varphi(x))'|_0\cdot x)}{x^3}dx=$$
$$=\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^2\varphi(x)-0}{x^3}dx=\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

5. Докажем дальнейшие факты, использованные в примере 15 из лекции 12: 1) $\frac{d}{dx}\ln|x|=\mathcal{P}\frac{1}{x}$, 2) $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}=-\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$, 3) $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2}=-2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}$ (все равенства понимаются в смысле обобщённых функций).

1) Имеем

$$\left\langle\frac{d}{dx}\ln|x|,\varphi(x)\right\rangle=-\int_{\mathbb{R}^1}\ln|x|\varphi'(x)\,dx=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\ln|x|\varphi'(x)\,dx=$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon}+\ln|x|\varphi(x)|_{+\varepsilon}^{+\infty}-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx\right]=$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)))+\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx=$$
$$=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right\rangle-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon\cdot 2\varepsilon\cdot\varphi'(\gamma(\varepsilon))=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right\rangle,$$

где в конце мы воспользовались для бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ теоремой Лагранжа о конечных приращениях ($\gamma(\varepsilon)\in(-\varepsilon;\varepsilon)$) и известным предельным равенством $\lim_{t\to+0}t\ln t=0$.

Замечание. В начале цепочки мы фактически взяли главное значение интеграла. Но если несобственный интеграл Римана существует в обычном смысле, то он существует и в смысле главного значения и эти числа равны.

2) Имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi'(x)\right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi'(x)}{x}dx = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi'(x)}{x}dx =$$
$$= \left\{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\right\} =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(x)}{x}\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \frac{\varphi(x)}{x}\Big|_{+\varepsilon}^{+\infty} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right] =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(0)}{x^2}dx\right] =$$
$$= \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi(0)\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \frac{1}{x}\Big|_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\right] =$$
$$= \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle + \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi(0)\left(\frac{1}{-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] =$$
$$= \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle + \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right) =$$
$$= \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle + \varphi'(0) - \varphi'(0) = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle.$$

Замечание. Как видно, в основе техники работы с обобщёнными функциями лежит интегрирование по частям, а также учёт свойств гладкости основных функций (применяем теорему Лагранжа либо определение производной, стандартные пределы и т. п.).

3) См. задачу 2.

6. Докажем, что решением уравнения $x^m u = 0$ является в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ являются функции $u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c^k \delta^{(k)}(x)$, где c_k, $k = 0, \ldots, m-1$,— произвольные постоянные.

1) Очевидно, что $u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c^k \delta^{(k)}(x)$ является решением рассматриваемого уравнения, поскольку

$$\left\langle x^m \delta^{(k)}(x), \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \delta^{(k)}(x), x^m\varphi(x)\right\rangle = (-1)^k\left\langle \delta(x), (x^m\varphi(x))^{(k)}\right\rangle = 0$$

при всех $k = 0, \ldots, m-1$.

2) Докажем, что найдено общее решение рассматриваемого уравнения. Пусть $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки $x = 0$ (вопрос о её построении сейчас обсуждать не будем). Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ верно представление

$$\varphi(x) = \eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k + x^m\psi(x),$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m}\left[\varphi(x) - \eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right].$$

Заметим, что $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. В самом деле, она финитна (поскольку финитны $\varphi(x)$ и $\psi(x)$); её бесконечная дифференцируемость во всех точках $x \neq 0$ очевидна; в точке $x = 0$ она следует из формулы Тейлора

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O(|x|^{N+1-m}), \tag{1}$$

справедливой в той окрестности точки $x = 0$, где $\eta = 1$.

Следовательно, если $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — решение уравнения $x^m u = 0$, то

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right\rangle + \langle u, x^m \psi(x) \rangle =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle u, \eta(x) x^k \rangle + \langle x^m u, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) + 0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle$$

с $c^k = \frac{(-1)^k}{k!} \langle u, x^k \eta(x) \rangle$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Важное замечание. При использовании рядов Тейлора для функций из $\mathcal{D}$ необходимо учитывать, что эти ряды, вообще говоря, лишь асимптотические и могут не сходиться к функции на интересующем нас множестве. В самом деле, в силу единственности аналитического продолжения с действительной прямой финитная функция, отличная от тождественного нуля, не может являться аналитической.

2. Тензорное произведение обобщённых функций

Прежде всего дадим следующее

Определение. Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда введём в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ обобщённую функцию $f(x) \cdot g(y)$ по правилу

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^{m+n}} = \langle f(x) \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^n} \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

и назовём её *тензорным произведением* обобщённых функций $f(x)$ и $g(y)$.

(Можно проверить корректность этого определения, но мы этого сейчас делать не будем.)

7. Определим функцию

$$\delta(at - |x|) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad a > 0,$$

равенством

$$\delta(at - |x|) = \theta(t)\delta(at + x) + \theta(t)\delta(at - x),$$

где в полном соответствии с определениями (тета-функции, дельта-функции и замены переменных в обобщённых функциях)

$$\langle \theta(t)\delta(at + x), \varphi(t, x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(t, -at)\, dt,$$
$$\langle \theta(t)\delta(at - x), \varphi(t, x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(t, at)\, dt.$$

Покажем, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(at - |x|) = a\delta(at - |x|),$$

где

$$\theta(at - |x|) = \begin{cases} 1, & at - |x| \geqslant 0, \\ 0, & at - |x| < 0. \end{cases}$$

Действительно, для любой $\varphi(t, x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\theta(at - |x|), \varphi(t, x) \right\rangle = -\left\langle \theta(at - |x|), \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) \right\rangle = -\iint_{at \geqslant |x|} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x)\, dt\, dx =$$
$$= -\int_0^{+\infty} dx \int_{\frac{x}{a}}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x)\, dt - \int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\frac{x}{a}}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x)\, dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} dx\, \varphi\left(\frac{x}{a}, x\right) + \int_{-\infty}^{0} dx\, \varphi\left(-\frac{x}{a}, x\right) =$$
$$= \int_0^{+\infty} dx\, \varphi\left(\frac{x}{a}, x\right) - \int_0^{-\infty} dx\, \varphi\left(-\frac{x}{a}, x\right) =$$
$$= \{t = \frac{x}{a}; \quad t = \frac{x}{a}\} = a\int_0^{+\infty} dt\, \varphi(t, at) + a\int_0^{+\infty} dt\, \varphi(t, -at).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что при всех $m \in \mathbb{N}$ верно

$$x^m \mathcal{P}\frac{1}{x^m} = 1,$$

где

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^m}, \varphi(x) \right\rangle \equiv \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \sum_{l=0}^{m-2} \frac{x^l}{l!}\varphi^{(k)}(0)}{x^m} dx.$$

2. Решить пример 5.3).

3. Привести пример таких функций $f_n(x)$ (поточечно определённых), что:
1) f_n являются представителями элементов пространства $L^1(\mathbb{R}^1)$ (т. е. принадлежат некоторым классам эквивалентности);
2) $f_n(x) \to 0$ всюду;
3) $f_n \to \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.
Указание. Эти функции могут быть выбраны непрерывными, если в п. 2) требовать сходимость к 0 лишь почти всюду.

4*. Проверить корректность определения тензорного произведения обобщённых функций. (что именно надо проверить?)