СЕМИНАР 25.03.11

0. Теорема Хана — Банаха и некоторые её следствия

Приведём сначала теорему Хана — Банаха и некоторые её следствия в той форме, в которой они нам понадобятся.

Теорема (Хан, Банах). Пусть X — комплексное нормированное пространство, f_0 — линейный ограниченный функционал, определённый на подпространстве $L \subset X$. Тогда существует линейный ограниченный функционал f, определённый на всём X и удовлетворяющий условиям

$$\langle f, x\rangle = \langle f_0, x\rangle, \quad x \in L,$$
$$\|f\| = \|f_0\||_L.$$

Иначе говоря, ограниченный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, можно продолжить на всё пространство с сохранением нормы.

Следствие 1. Пусть $x \in X$, $x \neq \theta$. Тогда существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$, $\langle f, x\rangle = \|x\|$.

Следствие 2. Пусть $L \subset X$ — линейное многообразие, $x_0 \in X$, $\rho(x_0, L) > 0$ (последнее условие означает, что элемент x не принадлежит не только многообразию L, но и его замыканию). Тогда существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что при любом $x \in L$ $\langle f, x\rangle = 0, \langle f, x_0\rangle = 1$, $\|f\| = \frac{1}{d}$.

1. Линейные функционалы

1. Будет ли непрерывным линейный функционал $\langle f, x\rangle$, рассматриваемый
1) на $C^1[-1; 1]$;
2) на всюду плотном в $C[-1; 1]$ множестве многочленов
относительно норм соответствующих пространств?

Очевидно, в первом случае функционал будет непрерывным, поскольку

$$|\langle f, x\rangle| = |x'(0)| \leqslant \|x'\|_C \leqslant \|x\|_{C^1}.$$

Во втором же случае — нет, как показывает пример последовательности функций x^n.

2. Пусть B — банахово пространство, $f \in B^*$ и для некоторого шара $\overline{B}_r(x_0) \equiv \{x \in B \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$ верно

$$\sup_{x,y\in\overline{B}_r(x_0)} |\langle f, x\rangle - \langle f, y\rangle| = 1. \tag{1}$$

Найти $\|f\|$.

Легко видеть, что $\|f\| = \frac{1}{2r}$. В самом деле, в силу (1) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементы $x, y \in \overline{B}_r(x_0)$, что $\|x - y\| \leqslant 2r$ и $|\langle f, x - y\rangle| \geqslant 1 - \varepsilon$. Вспомним определение нормы линейного функционала в виде

$$\|f\| = \sup_{z\neq\theta} \frac{|\langle f, z\rangle|}{\|z\|}. \tag{2}$$

Если учесть, что при $z = x - y$ значение выражения в правой части равно $\frac{1-\varepsilon}{2r}$, то очевидно, что в силу произвольности ε имеем $\|f\| \geqslant \frac{1}{2r}$. Обратно, для любого z из правой части (2) (таким образом, $\|z\| \leqslant 1$) можно построить элементы $x = x_0 + rz$, $y = x_0 - rz$. Тогда $x, y \in \overline{B}_r(x_0)$, откуда согласно (1)

$$1 \geqslant |\langle f, x - y\rangle| = |\langle f, 2rz\rangle|,$$

или $|\langle f, z\rangle| \leqslant \frac{1}{2r}$. Следовательно, при любом $\|z\| \leqslant 1$ верно $|\langle f, z\rangle| \leqslant \frac{1}{2r}$, что устанавливает $\|f\| \leqslant \frac{1}{2r}$. Обратное неравенство было показано выше.

3. Доказать, что линейный функционал в банаховом пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.

Необходимость условия $\ker f = \overline{\ker f}$ очевидна, поскольку из непрерывности функционала f сразу следует, что при $x_n \to x_0$, $\langle f, x_0\rangle = 0$ верно $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x_0\rangle = 0$, т. е. точка, являющаяся предельной для ядра, принадлежит ядру.

Осталось доказать, что из замкнутости ядра линейного функционала следует ограниченность этого линейного функционала.

Пусть $\ker f = \overline{\ker f}$. Как известно, непрерывность функционала равносильна его непрерывности в нуле, поэтому для разрывного (или, что равносильно, неограниченного) функционала найдётся такая последовательность элементов $x_n \to \theta$, что $|\langle f, x_n\rangle| > C$ при некотором $C > 0$. Но тогда и $y_n \equiv \frac{Cx_n}{\langle f, x_n\rangle} \to \theta$ и $\langle f, y_n\rangle = C$. При этом $z_n \equiv y_n - y_1 \to -y_1$ и, как нетрудно проверить, $z_n \in \ker f$. Но $y_1 \notin \ker f$, поскольку $\langle f, y_1\rangle = C \neq 0$, т. е. $\ker f$ незамкнуто. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

4. Доказать, что если два линейных функционала имеют одно и то же ядро: $\ker f_1 = \ker f_2$, то они пропорциональны.

Для доказательства рассмотрим фиксированный элемент $x_0 \notin \ker f_1$ и произвольный элемент $x \notin \ker f_1$. (Если оба ядра совпадают со всем пространством, то утверждение тривиально.) Наша задача установить, что

$$\langle f_2, x\rangle = \lambda \langle f_1, x\rangle \tag{3}$$

при некотором λ, не зависящем от x.

Заметим, что существует $\mu \neq 0$, при котором

$$\mu\langle f_1, x_0\rangle + \langle f_1, x\rangle = 0:$$

достаточно положить $\mu = \frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}$, поскольку числитель и знаменатель отличны от 0. Но тогда

$$\langle f_1, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

т. е. $\mu x_0 + x \in \ker f_1 = \ker f_2$. Следовательно,

$$\langle f_2, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

или

$$\mu\langle f_2, x_0\rangle + \langle f_2, x\rangle = 0.$$

Таким образом,

$$\langle f_2, x\rangle = -\mu\langle f_2, x_0\rangle = -\frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_2, x_0\rangle = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_1, x\rangle,$$

что совпадает с (3), причём

$$\lambda = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}.$$

Замечание. Мы существенно использовали тот факт, что размерность образа линейного функционала равна 1.

5. Рассмотрим линейные функционалы

$$\langle f_\varepsilon, x\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)), \quad f_0 = x'(0), \quad x(t) \in C^1[-1;1].$$

Требуется:

1) установить ограниченность этих функционалов и найти норму;

2) доказать, что $f_\varepsilon \rightharpoonup f_0$ *-слабо;

3) выяснить, имеет ли место сильная сходимость $f_\varepsilon \to f_0$.

1) Заметим прежде всего, что норма каждого из рассматриваемых функционалов не превосходит 1. В самом деле,

$$|\langle f_0, x\rangle| = |x'(0)| \leqslant \|x'\|_C \leqslant \|x\|_C + \|x'\|_C \equiv \|x\|_{C^1},$$

$$|\langle f_\varepsilon, x\rangle| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon))\right| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}\|x'\|_C \leqslant \|x\|_{C^1}. \tag{4}$$

Легко видеть, что $\|f_0\| = 1$. Чтобы это установить, достаточно рассмотреть функции

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn} t}{2n}, & t \notin [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ t - \frac{n}{2}t|t|, & x \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Читатель легко убедится самостоятельно, что $x_n(t) \in C^1[-1;1]$. Тогда имеем $\|x_n\|_{C^1} = 1 + \frac{1}{2n}$, $\langle f_0, x_n\rangle = 1$.

Для функционалов f_ε можно доказать, что $\|f_\varepsilon\| = \frac{1}{1+\varepsilon}$, но для этого понадобится провести более тонкие оценки. Заметим прежде всего, что

$$\|x\|_C \geqslant \frac{|x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)|}{2} \equiv \varepsilon|\langle f_\varepsilon, x\rangle|. \tag{5}$$

Это следует из неравенств

$$-\|x\|_C \leqslant x(\varepsilon) \leqslant \|x\|_C,$$

$$-\|x\|_C \leqslant x(-\varepsilon) \leqslant \|x\|_C.$$

Домножив первое неравенство на (-1), имеем

$$\|x\|_C \geqslant x(\varepsilon) \geqslant -\|x\|_C,$$
$$-\|x\|_C \leqslant x(-\varepsilon) \leqslant \|x\|_C.$$

Вычитая верхнее неравенство из нижнего, получаем

$$2\|x\|_C \geqslant x(\varepsilon) - x(-\varepsilon).$$

Неравенство

$$2\|x\|_C \geqslant x(-\varepsilon) - x(\varepsilon)$$

устанавливается аналогично. Используя два последних неравенства, получаем (5). Но тогда

$$\frac{\|x\|_{C^1}}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \equiv \frac{\|x\|_C + \|x'\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} = \frac{\|x\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} + \frac{\|x'\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \geqslant \varepsilon + 1,$$

где в последнем неравенстве мы оценили первое слагаемое с помощью (5), а второе — с помощью неравенства $|\langle f_\varepsilon, x\rangle| \leqslant \|x'\|_C$, полученного по ходу дела в цепочке (4). Итак, для любой функции $x(t) \in C^1[-1;1]$ имеем

$$\frac{\|x\|_{C^1}}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \geqslant \varepsilon + 1, \quad \text{или} \quad \frac{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|}{\|x\|_{C^1}} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|f_\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}. \tag{6}$$

Установим теперь обратное неравенство. Для этого при каждом фиксированном ε рассмотрим нечётные функции $x_{n\varepsilon}$, определённые при $t \geqslant 0$ следующим образом:

$$x_{n\varepsilon}(t) = \begin{cases} t, & t \in [0;\varepsilon), \\ \varepsilon + (t-\varepsilon) - \frac{n}{2}(t-\varepsilon)^2, & t \in [\varepsilon; \varepsilon + \frac{1}{n}]; \\ \varepsilon + \frac{1}{2n}, & x \in (\varepsilon + \frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$

Читатель легко проверит, что $x_{n\varepsilon}(t) \in C^1[-1;1]$ и $\|x_{n\varepsilon}\|_{C^1} = \varepsilon + \frac{1}{2n} + 1$.

Теперь легко видеть, что

$$\frac{\langle f_\varepsilon, x_{n\varepsilon}\rangle}{\|x\|_{C^1}} = \frac{\frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon))}{\|x\|_{C^1}} = \frac{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}}{1 + \varepsilon + \frac{1}{2n}} \to \frac{1}{1+\varepsilon}$$

при $n \to \infty$, а поэтому $\|f_\varepsilon\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}$. Обратное неравенство было доказано выше.

2) Для любой функции $x(t) \in C^1[-1;1]$ имеем

$$\langle f_\varepsilon, x\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)) = \frac{1}{2}\left[\frac{x(\varepsilon) - x(0)}{\varepsilon} - \frac{x(0) - x(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \to \frac{2x'(0)}{2} = x'(0)$$

при $\varepsilon \to 0$.

3) Сильная сходимость места не имеет. В самом деле, рассмотрим функции $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$. Ясно, что $\|x_n\|_{C^1} = \frac{n+1}{n}$. В то же время,

$$|\langle f_\varepsilon - f, x_n\rangle| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\cdot\frac{\sin n\varepsilon + \sin n\varepsilon}{n} - 1\right| = \left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right|,$$

и поэтому

$$\|f_\varepsilon - f\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right|}{\frac{n+1}{n}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n+1}\cdot\left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right| = 1$$

при каждом фиксированном ε. Отсюда и следует, что $f_n \not\to f$.

Замечание. В рассмотренном примере при $\varepsilon \to 0$ имеем $f_\varepsilon \rightharpoonup f_0$ *-слабо, $\|f_\varepsilon\| \to \|f_0\|$, $f_\varepsilon \not\to f_0$. Полезно сравнить эту ситуацию с теоремой 9 лекции 7.

Приведём более простой пример, когда из *-слабой сходимости функционалов и сходимости их норм не следует сильная сходимость. Вспомним рассмотренные на предыдущем семинаре пространства l^1 и $m = (l^1)^*$. Рассмотрим последовательность элементов $\{f_n\} \subset m$, где $f_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$, где после n первых единиц стоят нули. Легко видеть, что $f_n \rightharpoonup f \equiv (1, 1, 1\ldots)$ *-слабо (докажите это самостоятельно), а также что $\|f_1\| = \|f_2\| = \ldots = \|f\| = 1$, однако при любом n имеем $\|f_n - f\|_m = 1$, поэтому $f_n \not\to f$.

2. Сепарабельность

6. Установим сепарабельность пространства l^1.

Легко видеть, что счётное всюду плотное множество в нём образует система всевозможных последовательностей вида $(r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(m)}, 0, \ldots)$, где $r^{(1)}, \ldots, r^{(m)}$ суть *рациональные* числа и количество ненулевых членов последовательности *конечно*. Это множество является счётным, т. к. представляет собой счётное объединение (по $m \in \mathbb{N}$) счётных множеств последовательностей рациональных чисел с ненулевым начальным отрезком длины m. Оно всюду плотно в l^1. В самом деле, пусть задан произвольный элемент $x \in l^1$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots)$, а также произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$. По определению пространства l^1 найдётся такой номер N, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, для найденного N найдутся такие рациональные числа $r_0^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, что при всех $i = 1, \ldots, N$

$$|r_0^{(i)} - x^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Положим $\tilde{x} = (r_0^{(1)}, \ldots, r_0^{(N)}, 0, 0, \ldots)$ и получим:

$$\|\tilde{x} - x\| = \sum_{k=1}^{N} |r_0^{(k)} - x^{(k)}| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x^{(k)}| < N\cdot\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

7. Пространство $m \equiv l^\infty$ несепарабельно.

1) Установим, что в данном пространстве найдётся множество X элементов, попарные расстояния между которыми не меньше единицы, равномощное множеству чисел отрезка $[0;1]$. Действительно, возьмём в качестве X множество всех последовательностей, состоящих из чисел $\{0,1,2,\ldots,9\}$, кроме тех, у которых с некоторого номера следуют числа 9. Если отделить первое число запятой и рассматривать теперь элементы последовательностей как цифры, мы получим множество десятичных записей чисел полуинтервала $[0;10)$. Такие элементы удобно обозначать символом $x^{(\alpha)}$, где $\alpha \in [0;10)$ — число, десятичной записью которого является рассматриваемый элемент. Итак, мы указали в m подмножество мощности континуум. Легко видеть в силу определения нормы в m, что попарные расстояния между различными элементами множества X не меньше единицы.

2) Убедимся в том, что из этого следует несепарабельность пространства m. Допустим, что $\{y_n\}$ — счётное всюду плотное множество в m. Тогда по определению всюду плотного множества для каждого $x^{(\alpha)} \in X$ существует такой элемент $y^{(n(\alpha))}$, что

$$\|x^{(\alpha)} - y^{(n(\alpha))}\| < \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Но для различных $\alpha_1 \neq \alpha_2$ имеем $\|x^{(\alpha_1)} - x^{(\alpha_2)}\| \geqslant 1$. Отсюда и из (7) следует, что

$$\|y^{(n(\alpha_1))} - y^{(n(\alpha_2))}\| > \frac{1}{2},$$

и, таким образом, $y^{(n(\alpha_1))} \neq y^{(n(\alpha_2))}$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Таким образом, мы установили существование в счётном множестве $\{y_n\}$ несчётного подмножества. Полученное противоречие завершает доказательство.

8. Если пространство B^*, сопряжённое к банаховому пространству B, сепарабельно, то сепарабельно и само пространство B. (Отметим, что и пространство, сопряжённое к конечномерному, не может быть бесконечномерным.)

Пусть $\{f_k\}$ — счётное всюду плотное множество в B^*. Построим для каждого f_k такой элемент $x_k \in B$, что $\|x_k\| = 1$, $|\langle f_k, x_k\rangle| \geqslant \frac{\|f_k\|}{2}$ (существование таких элементов следует из определения нормы функционала). Рассмотрим множество K, состоящее из всех конечных линейных комбинаций элементов x_k с рациональными коэффициентами. Его счётность устанавливается аналогично рассуждению из предыдущего примера. Докажем, что K всюду плотно.

Если бы это было не так, то по следствию 2 из теоремы Хана — Банаха (см. раздел 0) существовал ненулевой функционал f такой, что $\langle f, x\rangle = 0$ на всём $\overline{K}$. В частности, при всех $k \in \mathbb{N}$ имели бы $\langle f, x_k\rangle = 0$. С другой стороны, поскольку $\{f_k\}$ всюду плотно в B^*, то для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось бы такое $m = m(\varepsilon)$, что $\|f - f_m\| < \varepsilon$. Для такого функционала с учётом $\|x_m\| = 1$, $\langle f, x_m\rangle = 0$ имели бы

$$\varepsilon > \|f - f_m\| \geqslant |\langle f - f_m, x_m\rangle| = |\langle f_m, x_m\rangle| \geqslant \frac{\|f_m\|}{2},$$

откуда $\|f_m\| < 2\varepsilon$. Но в силу неравенства треугольника в этом случае

$$\|f\| \leqslant \|f_m\| + \|f - f_m\| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

что в силу произвольности ε означает: $\|f\| = 0$. Но f — ненулевой функционал. Полученное противоречие завершает доказательство.

Из доказанного в трёх предыдущих примерах сразу следует, что $m^* \neq l^1$ и, тем самым, пространство l^1 не является рефлексивным.

9. Нерефлексивность пространства $C[-1;1]$ мы покажем другим способом. Прежде всего заметим, что если пространство B рефлексивно, то для любого линейного функционала $f \in B^*$ найдётся элемент $x \in B$, для которого $\langle f, x\rangle = \|f\|_*\|x\|$ (здесь мы для большей ясности явно указали на норму в сопряжённом пространстве). Действительно, в силу следствия 1 из теоремы Хана – Банаха (см. раздел 0), применённого к B^* и $(B^*)^* = B^{**}$, для каждого линейного функционала $f \in B^*$ существует линейный функционал $F \in B^{**}$ такой, что $\langle F, f\rangle_* = \|F\|_{**}\|f\|_*$. Но тогда в силу рефлексивности пространства B можно положить $x = J^{-1}F$, причём в силу изометричности отображения $J : B \to B^{**}$ верно $\|x\| = \|F\|_{**}$.

Рассмотрим теперь функционал $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} t\, x(t)\, dt$. Легко видеть, что $\|f\| = 2$, но не существует непрерывной функции $x(t)$, для которой имело бы место равенство $|\langle f, x\rangle| = 2\|x\|_C$. С учётом только что доказанного утверждения это гарантирует нерефлексивность пространства C.

3. Строгая и равномерная выпуклость

10. Всякое евклидово (в частности, гильбертово) пространство равномерно выпукло (следовательно, и строго выпукло). Это легко следует из равенства параллелограмма, записанного в виде

$$\|u + v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) - \|u - v\|^2. \tag{8}$$

Действительно, при $\|u\| = \|v\| = 1$, $\|u - v\| \geqslant \varepsilon$ из (8) имеем $\|u + v\|^2 \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon))$ с $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

11. Пространство $C[-1;1]$ не является строго выпуклым (и, тем более, равномерно выпуклым). Достаточно заметить, что для функций $f = 1$, $g = x$ имеем $\|f + g\| = 2 = \|f\| + \|g\|$. Аналогичные примеры можно построить для пространств L^∞ и m. Отсюда, в частности, следует в силу предыдущего примера, что ни в одном из этих пространств нельзя задать скалярное произведение, согласованное со стандартной нормой.

Заметим, что отсутствие равномерной выпуклости пространства C можно было также установить как результат примера 9 и теоремы Мильмана. Такое же рассуждение годится и для пространств L^∞, m.

12. Приведём, пока без доказательства, неравенства Кларксона, обобщающие равенство параллелограмма. Для наглядности сначала перепишем это последнее в форме

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|g\|^2.$$

В частности, оно выполнено для гильбертова пространства $L^2(X)$.

Неравенства же Кларксона, верные для $L^p(X)$ при $p \in (1; +\infty)$, выглядят следующим образом:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p, \quad p \in [2; +\infty),$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^q \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \right)^{q-1}, \quad p \in (1; 2],$$

где p и q связаны стандартным соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

На следующем семинаре мы проведём вывод неравенств Кларксона, а также покажем, что из них следует равномерная выпуклость пространств Лебега $L^p(X)$ с $p \in (1; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Верно ли утверждение, аналогичное утверждению примера 4, для линейных операторов?

2. Перенести рассуждение примера 8 на пространства C и L^∞.

3. В каком месте не пройдёт доказательство 10, если всевозможные конечные линейные комбинации с рациональными коэффициентами заменить на конечные линейные комбинации с *целыми* коэффициентами?

4**. Доказать, что в пространстве l^1 слабая сходимость совпадает с сильной.

5. («Манхэттен».) Рассмотрим бесконечную клетчатую бумагу с декартовыми осями, проходящими по перпендикулярным линиям сетки. Введём расстояние между произвольными узлами сетки как точную нижнюю грань длин всех путей (вдоль линий сетки!), соединяющих данные точки.

а) Описать полученное метрическое пространство пар натуральных чисел аналитически (задать расстояние с помощью формулы и т. п.).

б) Введя естественным образом операции сложения и вычитания рассматриваемых пар чисел, выяснить, следует ли из равенства $\rho(A(m_1, n_1), C(m_3, n_3)) = \rho(A(m_1, n_1), B(m_2, n_2)) + \rho(B(m_2, n_2), (m_3, n_3))$ коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.