

Лекция 8. Банаховы пространства. Дальнейшее развитие теории.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

11 января 2012 г.

Пусть $(\mathbb{B}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{B}_2, \|\cdot\|_2)$ — это банаховы пространства.

Определение 1. Отображение \mathbb{T} называется открытым, если образ всякого открытого множества в \mathbb{B}_1 открыт в \mathbb{B}_2 .

Примером не открытого отображения является следующее отображение:

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \theta,$$

а θ — это замкнутое множество.

Обозначение:

$$\text{Im } \mathbb{T} = \{y \in \mathbb{B}_2 : y = \mathbb{T}(x), x \in \mathbb{B}_1\}.$$

Теорема об открытом отображении.

Теорема

Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и $\text{Im } T = \mathbb{B}_2$, тогда T — это открытое отображение.

Доказательству теоремы предположим две леммы.

Символом $b_i(x_0, r)$ будем обозначать открытый шар в банаховом пространстве \mathbb{B}_i при $i = \overline{1, 2}$.

Лемма

Пусть выполнены условия теоремы об открытом отображении. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon))}.$$

Доказательство-1.

Поскольку $\text{Im } \mathbb{T} = \mathbb{B}_2$, то

$$\mathbb{B}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n))}.$$

В силу теоремы Бэра о категориях найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{B}_1$ и $r > 0$, что

$$b_2(x_0, r) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}.$$

Заметим, что

$$\overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}$$

— это симметричное относительно нуля и выпуклое множество, что следует из абсолютной выпуклости $b_1(0, n_0)$ и линейности оператора \mathbb{T} .

Поэтому имеет место вложение

$$\begin{aligned} M \equiv \{y : y = \alpha z_1 + (1 - \alpha)(-z_2), z_1, z_2 \in b_2(x_0, r)\} \subset \\ \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}. \end{aligned}$$

Но M — открытое множество, содержащее θ . Следовательно, найдется такая окрестности нуля

$$b_2(0, \varepsilon) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}$$

$$\lambda b_2(0, \varepsilon) = b_2(0, \lambda\varepsilon) \subset \lambda \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))} = \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \lambda n_0))}.$$

Пусть

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{n_0},$$

тогда

$$\delta = \frac{\varepsilon^2}{n_0}$$

и

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon))}.$$

Лемма доказана.

Лемма

Пусть выполнены все условия теоремы об открытом отображении, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(b_1(0, 3\varepsilon)),$$

где ε и $\delta(\varepsilon)$ связаны соотношением предыдущей леммы.

Доказательство-1.

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^{n-1}}, \quad \delta(\varepsilon_n) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n-1}).$$

где для каждого ε_n величина $\delta(\varepsilon_n)$ — соответствующая величина в смысле предыдущей леммы.

Итак,

$$b_2(0, \delta(\varepsilon_1)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, m\varepsilon_1))}.$$

Пусть

$$y \in b_2(0, \delta(\varepsilon_1))$$

— произвольное фиксированное. Докажем, что найдется $x \in b_1(0, 3\varepsilon)$ такое, что

$$y = \mathbb{T}x.$$

Рассмотрим шар

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2).$$

Имеем

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \cap b_2(0, \delta(\varepsilon)) \neq \emptyset.$$

Поскольку

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1))},$$

то

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \cap \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1)) \neq \emptyset.$$

Следовательно, найдется такое $x_1 \in b_1(0, \varepsilon_1)$, что

$$\|y - \mathbb{T}x_1\|_2 \leq \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_2).$$

Доказательство-3.

Следовательно,

$$z = y - \mathbb{T}(x_1) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_2)).$$

Значит,

$$b_2(z, \delta(\varepsilon_3)/2) \cap \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_2)) \neq \emptyset.$$

Следовательно, найдется

$$x_2 \in b_1(0, \varepsilon_2),$$

что

$$y - \mathbb{T}(x_1) - \mathbb{T}(x_2) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_3)/2).$$

Значит,

$$y - \mathbb{T}(x_1) - \mathbb{T}(x_2) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_3))$$

и так далее по индукции.

Итак,

$$\|x_n\|_1 \leq \varepsilon_2, \quad \|y - \mathbb{T}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\|_2 \leq \frac{1}{2} \delta(\varepsilon_{n+1}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty$$

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad y = \mathbb{T}(x), \quad \|x\| < 3\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы об открытом отображении.

Пусть $A \subset \mathbb{B}_1$ — открыто.

$$x_0 \in A, \quad y_0 = \mathbb{T}(x_0).$$

Поскольку A открыто, то найдется такой шар с центром в нуле

$$b_1(0, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_1,$$

что

$$x_0 + b_1(0, \varepsilon) = b_1(x_0, \varepsilon) \subset A.$$

По предыдущей лемме найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon)).$$

Но тогда

$$y_0 + b_2(0, \delta(\varepsilon)) = b_2(y_0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(x_0 + b_1(0, \varepsilon)) \subset \mathbb{T}(A)$$

Теорема доказана.

Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения — это

$$\text{Im } \mathbb{T} = \mathbb{B}_2, \quad \text{Ker } \mathbb{T} = \theta.$$

Теорема

Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и выполнены указанные условия, то существует обратное непрерывное отображение.

Пусть A — открытое множество в \mathbb{B}_1 , тогда в силу теоремы об открытом отображении

$$\mathbb{T}(A) \text{ открыто в } \mathbb{B}_2,$$

то множество

$$(\mathbb{T}^{-1})^{-1}(A) = \mathbb{T}(A) \text{ открыто в } \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, \mathbb{T}^{-1} — это непрерывное отображение.

Теорема доказана.

Определение. Графиком линейного отображения

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$$

называется множество

$$\mathbf{Gr}(\mathbb{T}) = \{x \oplus \mathbb{T}(x) : x \in \mathbb{B}_1\} \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2.$$

Если отображение \mathbb{T} непрерывно, то $\mathbf{Gr}(\mathbb{T})$ есть замкнутое подмножество в $\mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$.

Теорема о замкнутом графике.

Теорема

Если график линейного отображения

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$$

замкнут, то \mathbb{T} — непрерывное отображение.

Если подмножество

$$\mathbf{Gr}(T) \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$$

замкнуто, то оно есть банахово подпространство. Отображение

$$P_1 : x \oplus T(x) \rightarrow x$$

есть линейное непрерывное отображение банахова пространства $\mathbf{Gr}(T)$ на банахово пространство \mathbb{B}_1 , причем

$$\text{Im}(P_1) = \mathbb{B}_1, \quad \text{Ker}(P_1) = \theta.$$

В силу теоремы Банаха об обратном отображении отображение

$$\mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbf{Gr}(T) : x \rightarrow x \oplus T(x)$$

непрерывно. Следовательно, отображение

$$T : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2 : x \rightarrow x \oplus T(x) \rightarrow T(x)$$

как композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением.

Теорема

Справедливы следующие два утверждения:

- (i) Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ из банахова пространства \mathbb{B} ограничена, причем

$$\text{если } u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|u_\infty\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|;$$

- (ii) Всякая $*$ -слабо сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ из банахова пространства \mathbb{B}^* ограничена, причем

$$\text{если } f_n \xrightarrow{*} f_\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \text{ то } \|f_\infty\|_* \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_*.$$

Доказательство (i). В силу уже установленного изометрического вложения $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}$ мы можем рассмотреть слабо сходящуюся последовательность

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{слабо в } \mathbb{B},$$

как последовательность функционалов из \mathbb{B}^{**} :

$$I_n(f) \equiv \langle u_n, f \rangle_* = \langle f, u_n \rangle \quad \text{для всех } f \in \mathbb{B}^* \text{ и } n \in \mathbb{N},$$

Поскольку последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится в \mathbb{B} , то для каждого фиксированного $f \in \mathbb{B}^*$ числовая последовательность $I_n(f)$ ограничена, но тогда по теореме о резонансе имеем, что последовательность $\{\|u_n\|\}$ тоже ограничена.

Доказательство-2.

Теперь заметим, что если отождествить \mathbb{B} с некоторым подпространством в \mathbb{B}^{**} , то можно обозначать элемент $u \in \mathbb{B}$ и соответствующий ему элемент $\mathbb{J}u \in \mathbb{B}^{**}$ одной и той же буквой u . С учетом этого замечания имеем

$$\|u_n\| = \|u_n\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_n, f \rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_n \rangle|,$$

поэтому получаем следующее неравенство

$$\|u_n\| \geq |\langle f, u_n \rangle| \quad \text{для всех } f \in \mathbb{B}^*.$$

Перейдем к нижнему пределу при $n \rightarrow +\infty$ в последнем неравенстве и получим неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| \geq |\langle f, u_\infty \rangle| \quad \text{для всех } f \in \mathbb{B}^*, \quad (1)$$

поскольку

$$\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u_\infty \rangle \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \quad \text{для всех } f \in \mathbb{B}^*.$$

Поскольку левая часть неравенства (1) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, то возьмем supremum от обеих частей по $f \in \mathbb{B}^*$: $\|f\|_* = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| \geq \|u_\infty\|,$$

поскольку

$$\|u_\infty\| = \|u_\infty\|_{**} = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle u_\infty, f \rangle_*| = \sup_{\|f\|_* = 1} |\langle f, u_\infty \rangle|.$$

Доказательство-4.

Доказательство (ii). Введем обозначение

$$K_n(u) \equiv \langle f_n, u \rangle \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B} \text{ и } n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку числовая последовательность $\{K_n(u)\}$ сходится для каждого $u \in \mathbb{B}$, то из теоремы о резонансе вытекает ограниченность числовой последовательности $\{\|f_n\|_*\}$. По определению нормы $\|\cdot\|_*$ имеем

$$\|f_n\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_n, u \rangle| \geq |\langle f_n, u \rangle|.$$

Теперь перейдем к нижнему пределу при $n \rightarrow +\infty$, тогда поскольку

$$\langle f_n, u \rangle \rightarrow \langle f_\infty, u \rangle \quad \text{для всех } u \in \mathbb{B},$$

то получим неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_* \geq |\langle f_\infty, u \rangle|. \quad (2)$$

Поскольку левая часть неравенства (2) не зависит от $u \in \mathbb{B}$, то перейдем в обеих частях к supremum по $u \in \mathbb{B} : \|u\| = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_* \geq \|f_\infty\|_*,$$

поскольку

$$\|f_\infty\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_\infty, u \rangle|.$$

Теорема доказана.

Достаточное условие слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства \mathbb{B} . Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в \mathbb{B} подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Для простоты докажем эту теорему для случая *сепарабельного* банахова пространства \mathbb{B} .

Поскольку пространство \mathbb{B} рефлексивно, значит мы можем отождествить пространство \mathbb{B} с дважды сопряженным \mathbb{B}^{**} .

Стало быть, имеем $\mathbb{B}^{**} = \mathbb{B}$, а так как \mathbb{B} сепарабельно, то сепарабельно и пространство \mathbb{B}^{**} , но это пространство является сопряженным к банахову пространству \mathbb{B}^* . Значит, в силу леммы 4 пространство \mathbb{B}^* является сепарабельным.

Доказательство-2.

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это счетное всюду плотное в \mathbb{B}^* множество. Поскольку последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ ограничена по норме, то числовая последовательность

$$\langle f_1, u_n \rangle$$

ограниченная, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_1, u_{n_1} \rangle.$$

Числовая последовательность

$$\langle f_2, u_{n_1} \rangle$$

тоже ограниченная, а значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_2, u_{n_2} \rangle.$$

Продолжая таким образом этот процесс мы получим подпоследовательность $\{u_{n_{k+1}}\}$, которая слабо сходится на элементах f_j при $j = 1, \dots, k + 1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$ исходной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится на счетном всюду плотном в \mathbb{B}^* множестве $\{f_n\}$.

Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u_\infty \in \mathbb{B}$.

Доказательство-4.

Пусть $f \in \mathbb{B}^*$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f, u_{m_m} \rangle| &\leq |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{n_n} \rangle| + \\ &\quad + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + |\langle f, u_{m_m} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| \leq \\ &\leq \|f - f_k\|_* \|u_{n_n}\| + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_m}\|. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{f_k\}$ в пространстве \mathbb{B}^* относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\} \subset \mathbb{B}$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \rightarrow +\infty$.

Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f, u_{n_n} \rangle\}$$

является фундаментальной при любом $f \in \mathbb{B}^*$. Значит, сходится. Стало быть, найдется некоторый элемент $u \in \mathbb{B}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

Достаточное условие $*$ –слабой сходимости.

Теорема

Пусть \mathbb{B} — есть сепарабельное банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства \mathbb{B}^* . Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$ –слабо сходящуюся в \mathbb{B}^* подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad * \text{–слабо в } \mathbb{B}^* \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Определение. Пусть \mathbb{B} — это банахово пространство. Пространство \mathbb{B} называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ и $\|u - v\| \geq \varepsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon)). \quad (3)$$

Приведем без доказательства следующий важный результат В. Д. Мильмана.

Теорема

Всякое равномерно выпуклое банахово пространство \mathbb{B} рефлексивно.

Достаточное условие сильной сходимости.

Теорема

Если \mathbb{B} — это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

и

$$\|u_n\| \rightarrow \|u\|$$

вытекает, что

$$u_n \rightarrow u \text{ сильно в } \mathbb{B} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Доказательство-1.

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \rightarrow +\infty$. Теперь возьмем $\varepsilon_n = \|v_n - u\|$, тогда по определению 18 найдется такая неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$ и $\delta(0) = 0$, что

$$\|v_n + u\| \leq 2(1 - \delta(\|v_n - u\|)). \quad (4)$$

Поскольку в силу теоремы Мильмана банахово пространство \mathbb{B} рефлексивно, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \|v_n + u\| &= \|v_n + u\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v_n + u, f \rangle_*| = \\ &= \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, v_n + u \rangle| \geq |\langle f, v_n + u \rangle| \quad (5) \end{aligned}$$

Переходя к нижнему пределу в неравенстве (4) с учетом неравенства (5), получим следующее неравенство:

$$2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta(\|v_n - u\|)) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |\langle f, v_n + u \rangle| = 2 |\langle f, u \rangle|, \quad (6)$$

поскольку $v_n \rightharpoonup u$ слабо в \mathbb{B} . Левая часть неравенства (6) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, поэтому можно перейти к supremum по всем $f \in \mathbb{B}^* : \|f\|_* = 1$ и получить неравенство

$$2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta(\|v_n - u\|)) \geq 2\|u\|_{**} = 2\|u\| = 2.$$

Которое возможно только в том случае, когда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u\| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\|v_n \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{B} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \rightarrow \|u\| = 1$.

Теорема доказана.