

# ЛЕКЦИЯ 1А

## Функции ограниченной вариации

### 1. Факты, сообщённые на лекции 1 (напоминание)

Для удобства ссылок приведём некоторые основные факты.

Л1. Функции ограниченной вариации образуют линейное пространство.

Л2. Всякая монотонная на отрезке  $[a; b]$  функция имеет на нём ограниченную вариацию, причём в этом случае

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|, \quad (1)$$

а всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух монотонных (например,  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x) = V_a^x(f)$ ).

Л3. При  $a < c < b$  имеет место вложение

$$\mathbb{BV}[a; b] \subset \mathbb{BV}[a; c] \cap \mathbb{BV}[c; b]. \quad (2)$$

### 2. Другие важные свойства

1. Всякая функция ограниченной вариации ограничена. Действительно, для любого  $x \in [a; b]$  имеем

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f).$$

2. («Слияние») В формуле (2) верно и обратное вложение, причём

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f). \quad (3)$$

Доказательство этого факта сходно с доказательством (2). В обоих случаях используется следующая ключевая идея: *добавление ещё одной точки к разбиению  $T$  отрезка  $[a; b]$  может лишь увеличить сумму*

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

3. Если  $f, g \in \mathbb{BV}[a; b]$ , то  $fg \in \mathbb{BV}[a; b]$ , причём

$$V_a^b(fg) \leq \sup_{x \in [a; b]} |g(x)| \cdot V_a^b(f) + \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| \cdot V_a^b(g).$$

Доказательство совсем несложно. Для произвольного разбиения  $T$  запишем:

$$\begin{aligned} |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| &= |(f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)) + (f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1}))| \leq \\ &\leq |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)| + |f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\ &= |g(x_k)||f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1})||g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq \sup |g||f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sup |f||g(x_k) - g(x_{k-1})|. \end{aligned}$$

После суммирования по всем отрезкам разбиения и взятия точной верхней грани по всем разбиениям получаем требуемый результат.

### 3. Некоторые примеры

4. Требуется представить данную функцию в виде разности двух монотонно неубывающих.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \in (0; 1), \\ 0, & x \in [0; 1] \setminus \{a\}. \end{cases}$$

Очевидно, требуется воспользоваться результатом Л2, для которого надо построить «вариацию с переменным верхним пределом»  $f_1(x) = V_0^x(f)$ . Это можно сделать пользуясь утверждением Л3 о разбиении с учётом (3) и (1). Тогда получим  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; a), \\ 1, & x = a, \\ 2, & x \in (a; 1], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; a), \\ 0, & x = a, \\ 2, & x \in (a; 1], \end{cases}$$

5. А как представить функцию  $f(x)$  в виде разности строго возрастающих функций? Очевидно, достаточно положить  $\tilde{f}_1(x) = f_1(x) + x$ ,  $\tilde{f}_2(x) = f_2(x) + x$ .

6. Представить в виде разности монотонно неубывающих функций функцию  $f(x) = \sin x$  на отрезке  $[0; 2\pi]$ .

Снова используем аддитивное свойство вариации, в данном случае – применительно к отрезкам  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ ,  $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ , и свойство (1) вариации монотонной функции – для отрезков вида  $[a_i; x]$ , где  $a_i = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ . После этого легко видеть, что

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ 2 - \sin x, & x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ \sin x + 4, & x \in [\frac{\pi}{2}; 1], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ 2 - 2 \sin x, & x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ 4, & x \in [\frac{\pi}{2}; 1]. \end{cases}$$

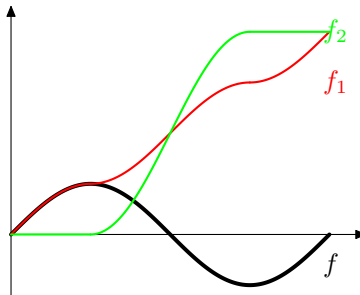


Рис. к примеру 6.

7, 8. На лекции было доказано, что  $\forall f, g \in \mathbb{BV}[a; b]$  верно неравенство  $V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$ . Может ли здесь достигаться равенство? Конечно: рассмотрим постоянные функции. Может ли здесь иметь место строгое неравенство? А в случае непрерывных функций  $f$  и  $g$ ? (См. задачи для самостоятельного решения.)

#### 4. Некоторые критерии

9. Мы знаем, что всякую функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих. Верно ли, что всякая разность двух монотонных функций имеют ограниченную вариацию?

Конечно, поскольку всякая монотонная функция имеет ограниченную вариацию, а функции ограниченной вариации образуют линейное пространство.

10. Мы знаем, что для монотонной функции  $f$  верно  $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$ . Верно ли, что, наоборот, из последнего равенства следует, что функция  $f$  монотонна?

Да. Докажем это. Пусть для определённости  $f(b) - f(a) \geq 0$ . Тогда имеем (для произвольных  $a < x_1 < x_2 < b$ )

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &= f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \leq \\ &\leq |f(b) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \leq V_a^b(f). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку равенство в неравенстве треугольника

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

достигается лишь в том случае, когда выражения под знаком модуля имеют постоянные знаки, то из (4) имеем, в частности, что  $f(x_2) > f(x_1)$ .

11. («Оценка»). Очевидно, что если  $f(x) \in \mathbb{BV}[a; b]$ , то  $\forall [x; y] \subseteq [a; b]$  выполняется  $|f(y) - f(x)| \leq V_x^y(f) = f_1(y) - f_1(x)$ . Обратно, существование такой неубывающей на  $[a; b]$  функции  $g(x)$ , что  $\forall [x; y] \subseteq [a; b]$  выполняется  $|f(y) - f(x)| \leq g(y) - g(x)$ , гарантирует, что  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$ .

В самом деле, для любого разбиения  $T$  имеем

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n (g(x_k) - g(x_{k-1})) = g(b) - g(a) < +\infty,$$

поэтому  $V_a^b(f) \equiv \sup_T V_T(f) < +\infty$ .

12. («Замена переменной»). Пусть  $f(x)$  — функция, заданная на  $[a; b]$ ,  $\varphi(x)$  — 1) строго возрастающая 2) непрерывная функция на  $[a; b]$ , 3) причём  $\varphi(a) = a$ ,  $\varphi(b) = b$ . Доказать, что функция  $f(x)$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a; b]$  тогда и только тогда, когда функция  $g(x) \equiv f(\varphi(x))$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a; b]$ , и при этом  $V_a^b(f) = V_a^b(g)$ .

Заметим прежде всего, что область значений  $R(\varphi)$  функции  $\varphi(x)$  есть отрезок  $[a; b]$ : в силу монотонности и условия 3)  $R(\varphi) \subseteq [a; b]$ , а в силу непрерывности  $[a; b] \subseteq [a; b]$ .

Рассмотрим теперь произвольное разбиение  $T$ . Имеем

$$V_T(g) = \sum_{k=1}^n |f(\varphi(x_k)) - f(\varphi(x_{k-1}))|. \quad (5)$$

Заметим, что точки  $(\varphi(x_k))$  образуют некоторое новое разбиение  $\varphi(T)$  отрезка  $[a; b]$ . В самом деле: в силу условия 1) порядок следования точек не нарушается, в силу сказанного в предыдущем абзаце  $\varphi(T) \subset [a; b]$ , а в силу условия 3) граничные точки переходят в граничные. Поэтому равенство (5) можно продолжить:

$$V_T(g) = \sum_{k=1}^n |f(\varphi(x_k)) - f(\varphi(x_{k-1}))| = V_{\varphi(T)}(f) \leq V_a^b(f),$$

откуда следует, что  $V_a^b(g) \leq V_a^b(f)$ .

Теперь заметим, что в силу условий, наложенных на функцию  $\varphi$ , она имеет обратную, обладающую теми же свойствами. Поэтому мы можем провести аналогичные рассуждения и получить оценку  $V_a^b(f) \leq V_a^b(g)$ , что и доказывает требуемые утверждения.

## 5. Некоторые контрпримеры

13. Если снять условие непрерывности, то предыдущее утверждение неверно.

Идея контрпримера: «обойти» место, где функция  $f$  «плохо себя ведёт». Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1), \\ \frac{1}{2-x} - 1, & x \in [1; 2), \\ 1, & x \in [2; 3], \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1), \\ \frac{1}{2}(x+3), & x \in [1; 3], \end{cases}$$

тогда

$$f(\varphi(x)) \equiv 1, \quad x \in [0; 3].$$

14.  $\mathbb{BV}[a; b] \not\subset C[a; b]$ .

Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1), \\ 2, & x \in [1; 2]. \end{cases}$$

Очевидно, эта функция имеет ограниченную вариацию (например, как монотонная).

15.  $C[a; b] \not\subset \mathbb{BV}[a; b]$ .

Например, рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Непрерывность этой функции легко проверяется. Далее, имеем при каждом  $n \in \mathbb{N}$

$$V_0^1(f) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi(k+1/2)} \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

если выбрать точки разбиения вида  $\frac{1}{\pi n}, \frac{1}{\pi(n+1/2)}$ .

**Замечание.** Можно построить примеры, показывающие, что пространство ограниченной вариации не содержит гёльдеровских пространств и не содержится в них.

## 6. Дальнейшие свойства

16. Очевидно, что всякая липшиц-непрерывная на отрезке функция имеет ограниченную вариацию. В частности, если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , дифференцируема на интервале  $(a; b)$  и  $\sup_{x \in (a; b)} |f'(x)| = C < +\infty$ , то  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$ . (Доказательство очевидно.)

17. Если  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$ , то и  $|f| \in \mathbb{BV}[a; b]$  и  $V_a^b(|f|) \leq V_a^b(f)$ . Доказательство: следует из легко проверяемого неравенства  $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$ , верного для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

18. Легко видеть, что неравенство здесь достигается. В самом деле, возьмём кусочно постоянную функцию, принимающую только значения  $\pm 1$ , тогда её модуль будет константой.

19. Легко видеть, что из условия  $|f| \in \mathbb{BV}[a; b]$  не следует, что  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$ . Положим, например,

$$f(x) = (-1)^k, \quad x \in \left( \frac{1}{2^{k+1}}; \frac{1}{2^k} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad f(0) = 0.$$

20. Если  $|f| \in \mathbb{BV}[a; b]$  и  $f \in C[a; b]$ , то  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$  и  $V_a^b(|f|) = V_a^b(f)$ .

Идея доказательства будет понятна, если заметить, что величина

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

не меняется при переходе от функции к её модулю и обратно, если в каждой слагаемом либо  $f(x_k)$  и  $f(x_{k-1})$  имеют одинаковый знак, либо хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

Рассмотрим некоторое произвольное фиксированное разбиение  $T$  отрезка  $[a; b]$ . Для тех  $k$ , для которых  $f(x_k)f(x_{k-1}) < 0$ , т. е. значения функции в соседних точках разбиения имеют разные знаки, в силу непрерывности функции  $f(x)$  найдутся точки  $\xi_k \in (x_{k-1}; x_k)$ , для которых  $f(\xi_k) = 0$ . Добавив эти точки к разбиению  $T$ , получим разбиение  $T'$ , обладающее следующими свойствами:

- 1)  $V_{T'}(f) \geq V_T(f)$  (см. начало лекции),
- 2) в соседних точках разбиения  $T'$  функция  $f(x)$  принимает значения одного знака или нулевые.

Тогда для

$$V_{T'}(f) = \sum_{l=1}^m |f(y_l) - f(y_{l-1})|$$

получим

$$V_{T'}(f) = \sum_{l=1}^m |f(y_l) - f(y_{l-1})| = \sum_{l=1}^m ||f(y_l)| - |f(y_{l-1})||,$$

откуда  $V_a^b(f) \leq V_a^b(|f|)$ . Тем самым,  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$ , а тогда из ранее полученного результата (см. п. 17) получаем требуемое равенство.

## 7. Пример на исследование функции

21. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \geq 0$ . Исследовать в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , принадлежит ли функция  $f(x)$  пространству  $\mathbb{BV}[0; 1]$ .

Начнём рассмотрение со случая  $\beta = 0$ . Очевидно, при  $\alpha < 0$   $f(x) \notin \mathbb{BV}[0; 1]$  (как неограниченная функция, см. п. 1 этой лекции), а при  $\alpha \geq 0$   $f(x) \in \mathbb{BV}[0; 1]$  (как монотонная на отрезке функция).

Теперь перейдём к случаю  $\beta > 0$ . Пользуясь п. 12 лекции, сделаем «замену переменной»: введём функцию  $\varphi(x) = x^{\frac{1}{\beta}}$  и заметим, что  $f(x) \in \mathbb{BV}[0; 1]$  тогда и только тогда, когда  $g(x) \in \mathbb{BV}[0; 1]$ , где

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{\alpha}{\beta}} \sin x, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (7)$$

поскольку  $g(x) = f(\varphi(x))$ , а  $\varphi(x)$  удовлетворяет всем условиям, наложенным в п. 12.

Положим  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ . Если  $\gamma < -1$ , то функция (7) неограничена на  $[0; 1]$  и поэтому  $g \notin \mathbb{BV}[a; b]$ , а следовательно, и  $f \notin \mathbb{BV}[a; b]$ . Далее, при  $\gamma = -1$  получаем функцию

$$g_{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ограниченную на  $[0; 1]$  и монотонную на  $(0; 1]$  и поэтому имеющую ограниченную вариацию. Поскольку  $g(x) = g_{-1}(x)x^{\gamma+1}$ , то при  $\gamma \geq -1$  имеем  $g(x) \in \mathbb{BV}[0; 1]$  (как произведение двух функций ограниченной вариации, см. п. 3), а поэтому и  $f \in \mathbb{BV}[0; 1]$ . Собирая воедино все случаи, имеем:  $f(x) \in \mathbb{BV}[a; b]$  тогда и только тогда, когда (в данной области изменения параметров)  $\alpha + \beta \geq 0$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти  $V_0^{50}(e^x)$ ,  $V_1^2(\ln x)$ ,  $V_0^{4\pi}(\cos x)$ .
2. 1) Привести пример двух функций  $f, g$  ограниченной вариации, для которых выполняется строгое неравенство  $V_a^b(f + g) < V_a^b(f) + V_a^b(g)$ .  
2) То же, причём функции должны быть непрерывными.
3. Будет ли функция  $g(f(x))$  иметь ограниченную вариацию на  $[0; 1]$ , если  $f$  имеет ограниченную вариацию на этом отрезке и  $g(t)$  непрерывна на всей числовой оси?
4. Доказать, что если  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$  и  $f_1(x) \equiv V_a^x(f)$  непрерывна в точке  $x_0 \in [a; b]$ , то то же можно сказать о функции  $f(x)$ .
- 5\*. Доказать, что если  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$  и  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \in [a; b]$ , то то же можно сказать о функции  $f_1(x) \equiv V_a^x(f)$ .
6. Вывести из предыдущей задачи, что всякая функция  $f \in \mathbb{BV}[a; b] \cap C[a; b]$  представима в виде разности монотонно неубывающих непрерывных функций.

7\*. Доказать, что монотонная функция, определённая на отрезке, может иметь только разрывы первого рода и не более чем в счётном количестве.

8. Вывести отсюда аналогичный результат для функций ограниченной вариации.

9. Пусть  $\{x_k\}$  — счётная система точек на отрезке  $[a; b]$  ( $x_k \neq x_j$  при  $k \neq j$ ). Пусть  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  — такие числа, что

$$\sum_k (|a_k| + |b_k|) < +\infty.$$

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \sum_k a_k \chi_{(x_k; b]}(x) + \sum_k b_k \chi_{[x_k; b]}(x),$$

называемую *функцией скачков*.

- 1) Доказать, что эта функция корректно определена. (Какие могут быть проблемы?)
- 2) Доказать, что она может быть представлена в виде разности монотонных функций.
- 3) Доказать, что она имеет конечную вариацию.
- 4\*) Доказать, что она непрерывна во всех точках, кроме точек  $x_k$ .
- 5\*) Пусть  $f(x) \in \mathbb{BV}[a; b]$ . Положим

$$s_f(x) = \begin{cases} \sum_{k: x_k < x} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) + (f(x) - f(x - 0)), & x \in (a; b], \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Доказать, что это корректно определённая функция скачков.

6\*) Доказать, что для  $f \in \mathbb{BV}[a; b]$  и соответствующей функции  $s_f(x)$  верно  $g(x) \equiv f(x) - s_f(x) \in V_a^b \cap C[a; b]$ . (Таким образом, мы научились раскладывать всякую функцию ограниченной вариации в сумму непрерывной функции ограниченной вариации и функции скачков.)

10\*. Исследовать функцию (6) в случае  $\beta < 0$ .