## ЛЕКЦИЯ 2А

## Интеграл Римана—Стилтьеса

1. Пусть $f_n(x) \in C[a;b]$, $g(x) \in \mathbb{BV}[a;b]$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b f_n(x)dg(x) \to \int_a^b f(x)dg(x).$$

Действительно, в силу оценки

$$\left|\int_a^b F(x)dg(x)\right| \leqslant \|F\|_{C[a;b]} V_a^b(g) \tag{1}$$

и свойств линейности интеграла Лебега—Стилтьеса имеем

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dg(x)\right| \leqslant \|f_n - f\|_{C[a;b]} V_a^b(g) \to 0.$$

2. Пусть $f(x) \in C[a;b]$, $g_n(x) \in \mathbb{BV}[a;b]$, $V_a^b(g_n - g) \to 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dg_n(x) \to \int_a^b f(x)dg(x).$$

Подобно предыдущему, в силу (1) и свойств линейности интеграла верно

$$\left|\int_a^b f(x)dg_n(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| = \left|\int_a^b f(x)d(g_n(x) - g(x))\right| \leqslant \|f\|_{C[a;b]} V_a^b(g_n - g) \to 0.$$

3. Очевидно, если $g(x) \equiv C$ на $[a;b]$, то интеграл Римана—Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)dg(x) \tag{2}$$

существует абсолютно для любой функции $f(x)$. Однако этот тривиальный случай, естественно, не интересен. При $g(x) \not\equiv C$ ситуация становится более похожей на интеграл Римана. Покажем, например, что для $g(x)$, отличной от константы, и $f(x) = D(x)$ (функция Дирихле) интеграл (2) не существует.

Идея доказательства заключается в следующем. Для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ мы предъявим таких два разбиения с отмеченными точками, что соответствующие интегральные суммы будут различаться не менее чем на некоторое фиксированное число:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\ \exists T_i \equiv (x_0^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}; \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}),\ i = 1; 2,\ \ |S_{T_1} - S_{T_2}| \geqslant \varepsilon.$$

Поскольку $g \not\equiv C$, то существуют $\bar{x} < \bar{\bar{x}} \in [a;b]$ такие, что $g(\bar{x}) \neq g(\bar{\bar{x}})$. Положим $\varepsilon = |g(\bar{x}) - g(\bar{\bar{x}})|$. Выберем при всяком $\delta > 0$ разбиения $T_1$ и $T_2$ с $\lambda(T) < \delta$ состоящими их одних и тех же точек $(x_k^{(i)})_{k=0}^n$, среди которых будут точки $x_l = \bar{x}$ и $x_m = \bar{\bar{x}}$ (если в некотором разбиении их нет, можно добавить), а отмеченные точки $(\xi_k^{(i)})_{k=1}^n$ возьмём руководствуясь следующими

правилами:
1) $\xi_k^{(1)} = \xi_k^{(2)}$ при $[x_{k-1}; x_k] \not\subset [\bar{x}; \bar{\bar{x}}]$;
2) $\xi_k^{(1)} \in \mathbb{Q}$, $\xi_k^{(2)} \notin \mathbb{Q}$ при $[x_{k-1}; x_k] \subset [\bar{x}; \bar{\bar{x}}]$.
Тогда будем иметь:

$$|S_{T_1} - S_{T_2}| = \left| \sum_{k=l+1}^{m} 1 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1})) - \sum_{k=l+1}^{m} 0 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| = |g(\bar{\bar{x}}) - g(\bar{x})| = \varepsilon,$$

что и требовалось.

4. Легко построить функции $f, g$, не являющиеся ограниченными на $[-1; 1]$, такие, что интеграл Римана—Стилтьеса (2) существует. Положим, например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0] \cup \{1\}, \\ \frac{x}{1-x}, & x \in (0; 1), \end{cases} \qquad g(x) = f(-x).$$

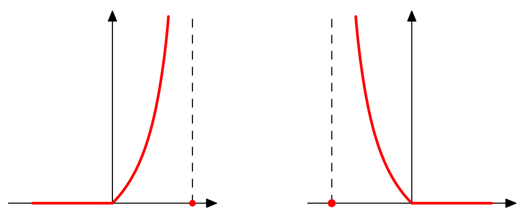

Рис. к примеру 4: функции $f(x)$ и $g(x)$.

5. Пусть существует интеграл Римана—Стилтьеса (2), причём функция $g$ разрывна в точке $c \in [a; b]$. Тогда функция $f$ непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Предположим противное: пусть $f(x)$ разрывна в точке $c$. Докажем, подобно сделанному в примере 3, что в этом случае для сколько угодно малого параметра разбиения найдутся интегральные суммы, отличающиеся не менее чем на константу.

Рассмотрим сначала случай $c \in (a; b)$. Как будет ясно из дальнейших рассуждений, рассмотрение случая граничной точки отрезка даже проще.

Итак, по нашему предположению неверно по крайней мере одно из равенств в каждой строке:

$$\begin{gathered} g(c-0) = g(c), \quad g(c+0) = g(c), \\ f(c-0) = g(c), \quad f(c+0) = g(c) \end{gathered} \tag{3}$$

(невыполнение любого из равенств подразумевает или отсутствие предельного значения, или его отличие от значения соответствующей функции в точке). Могут представиться два случая:
1) среди неверных равенств в (3) найдутся два в одном столбце;
2) таковых не найдётся, т. е. неверных равенств всего два и они расположены «по диагонали».

1) Рассмотрим первый случай. Пусть для определённости не выполняются равенства правого столбца. Это означает:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \ \forall \delta_1 > 0 \ \exists x(\delta_1) \in (c; c+\delta_1) \ \ |g(x(\delta_1)) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1, \tag{4}$$

$$\exists \varepsilon_2 > 0 \ \forall \delta_2 > 0 \ \exists x(\delta_2) \in (c; c+\delta_2) \ \ |f(x(\delta_2)) - f(c)| \geqslant \varepsilon_2. \tag{5}$$

Пусть дано некоторое $\rho > 0$. Выберем сначала точку $\bar{\bar{x}}$ так, чтобы имели место неравенства

$$c < \bar{\bar{x}} < c + \rho, \quad |g(\bar{\bar{x}}) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1. \tag{6}$$

Это возможно в силу (4). Теперь построим такое разбиение $T$ отрезка $[a; b]$ с параметром разбиения $\lambda(T) < \rho$, в которое войдут точки $c$ и $\bar{\bar{x}}$, причём они будут соседними (это возможно, поскольку $\bar{\bar{x}} - c < \rho$). Пусть в полученном разбиении точки $c$, $\bar{\bar{x}}$ имеют номера соответственно $l-1$, $l$. Далее, выберем на отрезках $[x_{i-1}; x_i]$ точки $\xi_i$, $i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots n$. Выберем теперь, пользуясь (5), $\xi^{(2)}$ из условий

$$1)\ c < \xi^{(2)} < \bar{\bar{x}}, \quad 2)\ |f(\xi^{(2)}) - f(c)| \geqslant \varepsilon_2 \tag{7}$$

(для этого надо положить в (5) $\delta_2 = \bar{\bar{x}} - c$).

Пусть теперь интегральные суммы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ определяются одним и тем же разбиением $T$ и следующим выбором точек: $\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(2)} = \xi_i$, $i \neq l$, и $\xi_l^{(1)} = c \in [c; \bar{\bar{x}}] \equiv [x_{l-1}; x_l]$, $\xi_l^{(2)} = \xi^{(2)}$. Тогда получим

$$\left|S^{(1)} - S^{(2)}\right| = |(f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l) - g(x_{l-1}))| \geqslant \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (6), (7). Поскольку возможность такого построения показана для всякого $\rho > 0$ и при этом константы $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ от $\rho$ не зависят, для первого случая рассуждение завершено.

2) Во втором случае ситуация осложняется тем, что односторонняя непрерывность не позволяет нам одновременно оценить снизу $|g(x) - g(c)|$ и $|f(x) - f(c)|$ ни в одной из полуокрестностей точки $c$. Однако это мешающее обстоятельство можно обратить в пользу, если из одной полуокрестности «немного шагнуть» в другую: мы приобретём разрыв одной из функций, не сильно ухудшив уже найденную оценку снизу для другой. Проведём теперь это рассуждение более подробно.

Пусть, для определённости,

$$g(c-0) = g(c), \quad g(c+0) \neq g(c),$$
$$f(c-0) \neq g(c), \quad f(c+0) = g(c).$$

(Напоминаем, что в данном случае знак $\neq$ может обозначать не только неравенство, но и отсутствие предела.) Тогда:

$$\exists \varepsilon_1 > 0\ \forall \delta_1 > 0\ \exists x(\delta_1) \in (c; c+\delta_1)\ \ |g(x(\delta_1)) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1, \tag{8}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall x \in (c; c+\delta_2)\ \ |f(x) - f(c)| < \varepsilon_2,$$
$$\forall \varepsilon_3 > 0\ \exists \delta_3 > 0\ \forall x \in (c-\delta_3; c)\ \ |g(x) - g(c)| < \varepsilon_3, \tag{9}$$
$$\exists \varepsilon_4 > 0\ \forall \delta_4 > 0\ \exists x(\delta_4) \in (c-\delta_4; c)\ \ |f(x(\delta_4)) - f(c)| \geqslant \varepsilon_4, \tag{10}$$

Пусть задано $\rho > 0$. Выберем теперь:

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{x}} \text{ из условий } \bar{\bar{x}} \in \left(c; c+\frac{\rho}{2}\right), \ |g(\bar{\bar{x}}) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1,\\
&\bar{x} \text{ из условий } \bar{x} \in \left(c-\frac{\rho}{2}; c\right), \ |g(\bar{x}) - g(c)| < \frac{\varepsilon_1}{2},\\
&\xi^{(2)} \text{ из условий } \xi^{(2)} \in (\bar{x}; c), \ |f(\xi^{(2)}) - f(c)| \geqslant \varepsilon_3,
\end{aligned} \tag{11}$$

что возможно соответственно в силу (8), (9), (10). Теперь дополним систему $(\bar{x}; \bar{\bar{x}})$ (отметим, что $\bar{\bar{x}} - \bar{x} < \rho$) до разбиения $T$ отрезка $[a; b]$ с $\lambda(T) < \rho$ так, чтобы между $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ не оказалось новых точек. Предположим, $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ получили соответственно номера $l-1$ и $l$. Выберем теперь $\xi_i$, $i \neq l$, произвольным образом и $\xi_l^{(1)} = c$, $\xi_l^{(2)} = \xi^{(2)}$. Пусть $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ — соответствующие интегральные суммы. Поскольку в силу (11)

$$|g(\bar{\bar{x}}) - g(\bar{x})| \geqslant \frac{\varepsilon_1}{2}, \quad |f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)})| \geqslant \varepsilon_3,$$

получаем

$$\left|S^{(1)} - S^{(2)}\right| = |(f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l) - g(x_{l-1}))| \geqslant \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{2},$$

что в силу произвольности $\rho > 0$ и независимости от $\rho$ констант $\varepsilon_1$, $\varepsilon_3$ завершает рассуждение для второго случая.

Легко видеть, что при совпадении точки $c$ с одним из концов отрезка мы всегда будем иметь первый случай.

*Утверждение доказано.*

6. Пусть $a < c < b$, $g(x) = \chi_{[c;b]}(x)$. Тогда интеграл Римана—Стилтьеса (2) существует лишь в том случае, когда $f(x)$ непрерывна в точке $c$, и в случае интегрируемости

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(c).$$

Заметим, что необходимость доказана ранее (п. 5). Докажем достаточность. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = f(\xi_l)(g(x_l) - g(x_{l-1})) = f(\xi_l), \quad \text{где} \quad x_{l-1} < c \leqslant x_l.$$

При $\lambda(T) \to 0$ имеем $\xi_l \to c$, что в случае непрерывности функции $f(x)$ в точке $c$ гарантирует $f(\xi_l) \to f(c)$. Это и доказывает как существование рассматриваемого интеграла, так и равенство $f(x)dg(x) = f(c)$.

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $c$, интеграл (2) существует. Тогда интеграл

$$\int_a^b f(x)\, d\tilde{g}(x), \quad \text{где} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c, \\ A \neq g(c), & x = c, \end{cases} \tag{12}$$

также существует и равен интегралу (2).

*Доказательство.* Принцип доказательства состоит в том, чтобы убедиться, что разница между соответствующими интегральными суммами стремится к нулю при стремлении к нулю параметра разбиения. Идея же основана на наблюдении, что чем менее меняется функция $f$, тем слабее интеграл «замечает» конкретные значения функции $g$. Так,

$$\text{при } f(x) \equiv C = \text{const} \quad \text{имеем } \int_a^b f(x)\,dg(x) = C(g(b) - g(a)). \tag{13}$$

Приступим собственно к доказательству.

Рассмотрим некоторое разбиение $T$ отрезка $[a;b]$. Если $c \notin T$, то интегральная сумма вовсе не поменялась. В противном случае ($x_l = c$) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\tilde{g}(x_k) - \tilde{g}(x_{k-1})) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big((g(x_k) - \tilde{g}(x_k)) - (g(x_{k-1}) - \tilde{g}(x_{k-1}))\big) = (g(x_l) - \tilde{g}(x_l))(f(\xi_l) - f(\xi_{l+1})). \tag{14}$$

В силу определения непрерывности функции $f$ в точке $c$

$$\forall \gamma > 0\ \exists \delta(\gamma) > 0\ \forall \xi \in (c - \delta(\gamma); c + \delta(\gamma))\ \ |f(\xi) - f(c)| < \gamma. \tag{15}$$

Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\rho = \delta\left(\gamma = \frac{\varepsilon}{2|g(c) - \tilde{g}(c)|}\right)$. Пусть разбиение $T$ удовлетворяет условию $\lambda(T) < \rho$. Тогда

$$|\xi_l - c| < \rho, \quad |\xi_{l+1} - c| < \rho,$$

в силу чего из (15) моментально получим, что $|f(\xi_l) - f(\xi_{l+1})| < \frac{\varepsilon}{|g(c) - \tilde{g}(c)|}$, откуда в силу (14) следует, что интегральные суммы для параметра разбиения меньше выбранного $\rho$ различаются меньше чем на $\varepsilon$. Тем самым, интегральные суммы интеграла (12) тоже имеют предел и он равен интегралу (2).

*Утверждение доказано.*

*Замечание.* Условие несовпадения точки $c$ с концами отрезка существенно, что очевидно уже из (13).

*Следствие 1.* Если функция $f$ непрерывна в точке $c \in (a;b)$, а функция $g$ равна нулю всюду на $[a;b]$, кроме точки $c$, то $\int_a^b f\,dg = 0$.

*Следствие 2.* То же верно для любого конечного числа точек, если $f$ непрерывна в каждой из них (или, скажем, на всём отрезке).

*Следствие 3.* Если $f \in C[a;b]$, $g \in \mathbb{BV}[a;b]$ и $g$ отлична от нуля лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу $(a;b)$, то $\int_a^b f\,dg = 0$. Это следует из теоремы Хелли и предыдущего следствия (поскольку «приближения» к функции $g$, имеющие конечное число разрывов, имеют вариации, ограниченные в совокупности числом $V_a^b(g)$).

*Следствие 4.* Если $f \in C[a;b]$, $g_1, g_2 \in \mathbb{BV}[a;b]$ и эти функции различны лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу $(a;b)$, то $\int_a^b f\,dg_1 = \int_a^b f\,dg_2$.

Но это означает, что наивная попытка описать $(C[a;b])^*$ как $\mathbb{BV}[a;b]$ (используя теорему Рисса) наталкивается на трудности: функция $g$ оказывается не единственной (даже если потребовать $g(a)=0$), и различные «представители» совсем не равноправны в том смысле, что они могут иметь различную полную вариацию.

8. Вычислить

$$\int_0^\pi \sin x\, dg(x),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right), \\ 2, & x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \pi\right\}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right). \end{cases}$$

Заметим, что в силу п. 7 можно переопределить функцию $g(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ её левым пределом $\frac{\pi}{2}$. Далее, в точке $x = \pi$ её тоже можно переопределить левым пределом $\frac{\pi}{2}$, поскольку $f(x)$ непрерывна (слева) в точке $\pi$ и $f(\pi) = 0$ (см. задачу 3; отметим, что результат п. 7 здесь неприменим!). Обозначим полученную после двух переопределений функцию через $\tilde{g}(x)$. Имеем теперь

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x\, dg(x) &= \int_0^\pi \sin x\, d\tilde{g}(x) = \int_0^\pi \sin x\, d\left(x - \frac{\pi}{2}\chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\right) = \\ &= \int_0^\pi \sin x\, d(x) - \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x d\left(\chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\right) = \\ &= \int_0^\pi \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\left(\sin\pi\cdot 1 - \sin\frac{\pi}{2}\cdot 0 - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\, d\sin x\right) = \\ &= 2 + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^2 \chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\cos x\, dx = 2 + \frac{\pi}{2}\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2 - \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

где при переходе к третьей строке мы воспользовались сведением к интегралу Римана для непрерывно дифференцируемой функции $g(x) = x$ (см. лекцию) и интегрированием по частям, а при переходе к четвёртой — той же теоремой для $g(x) = \sin x$, а затем воспользовались возможностью изменить в одной точке подынтегральную функцию в интеграле Римана.

9. Найти (какую-либо) функцию $g \in \mathbb{BV}[-1;1]$, для которой при любой $f(x) \in C[-1;1]$ верно равенство

$$\int_{-1}^1 f(x)dg(x) = f(0). \tag{16}$$

В силу результата примера 6 можно взять, например, $g(x) = \chi_{[0;1]}(x)$. Отметим, что при этом $V_{-1}^1(g) = 1$, но функцию $g(x)$ можно переопределить в любой точке интервала $(a;b)$ — при этом равенство (16) не нарушится (см. пример 7), а её вариация изменится.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Вычислить интегралы Римана—Стилтьеса:

1) $\int_{-\pi}^{\pi}(x+2)\,d\left(e^x \operatorname{sgn}(\sin x)\right)$;

2) $\int_0^{\pi}(x-1)d(\cos x \operatorname{sgn} x)$.

2. Подробно обосновать существование интеграла (2) в примере 4.

3. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции $g(x)$ в граничной точке отрезка, которым мы воспользовались при решении примера 8.

4. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции $f(x)$ в точке непрерывности функции $g(x)$. Нужно ли при этом требовать, чтобы $c$ не была граничной точкой?

5**. Сформулировать и доказать для интеграла Римана—Стилтьеса утверждение, обобщающее необходимое условие интегрируемости по Риману (ограниченность подынтегральной функции функции).