ЛЕКЦИЯ 3А

Абсолютно непрерывные функции. Гёльдеровы функции

0. Напомним определение, данное на лекции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой счётной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ из отрезка $[a;b]$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{1}$$

В технических целях удобнее использовать несколько другое определение абсолютной непрерывности, а именно

Определение 1′. Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k;b_k)\}_{k=1}^{n}$ из отрезка $[a;b]$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta_1, \tag{2}$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Докажем эквивалентность этих двух определений.

1) O1 $\Rightarrow$ O1′. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1(\varepsilon) = \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{b-a}{2}\right)$. Тогда если $\mathcal{I} \equiv \{(a_k;b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная конечная система непересекающихся интервалов с суммой длин, меньшей $\delta_1(\varepsilon)$, то случай $\mathcal{I} = \{(a;b)\}$ исключён и систему $\mathcal{I}$ можно достроить до счётной системы непересекающихся интервалов (по-прежнему вложенных в отрезок $[a;b]$) с суммой длин меньше $\delta(\varepsilon)$. Для достроенной системы будет верно (1), а значит, для исходной — и подавно верно (3).

2) O1′ $\Rightarrow$ O1. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\frac{\varepsilon}{2})$. Тогда если $\{(a_k;b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная счётная система непересекающихся интервалов с суммой длин, меньшей $\delta(\varepsilon)$, то для любой её конечной подсистемы (которая, конечно, тоже будет непересекающейся) будет верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда в силу свойств рядов с положительными членами получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

что и требовалось.

1. Пусть $g(x) \in L^1(a;b)$, тогда функция

$$f(x) = c + \int_a^x g(y)\,dy$$

является абсолютно непрерывной в смысле определения 1.

Действительно, если $g(x) \in L^1(a;b)$, то функция $|g(x)|$ интегрируема на $[a;b]$ по Лебегу. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого измеримого множества $A \subset [a;b]$ из $\mu(A) < \delta(\varepsilon)$ следует

$$\int_A |g(y)|\,dy < \varepsilon.$$

Но тогда если $\{(a_k;b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — система непересекающихся интервалов из отрезка $[a;b]$ с суммарной длиной меньше $\delta(\varepsilon)$, то получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_a^{b_k} g(y)\,dy - \int_a^{a_k} g(y)\,dy\right| = \left|\int_{a_k}^{b_k} g(y)\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{a_k}^{b_k} |g(y)|\,dy = \int_{\sqcup_{k=1}^{\infty}(a_k;b_k)} |g(y)|\,dy < \varepsilon,$$

поскольку в силу счётной аддитивности меры Лебега $\mu\left(\sqcup_{k=1}^{\infty}(a_k;b_k)\right) < \delta(\varepsilon)$.

Заметим, что тем самым мы доказали, что из определения 2 (см. лекцию) следует определение 1.

2. Всякая абсолютно непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция непрерывна на нём.

Очевидно: положив в (2), (3) $n = 1$, получим определение равномерной непрерывности на отрезке $[a;b]$.

3. Если $f(x) \in \mathbb{AC}[a;b]$, то $|f(x)| \in \mathbb{AC}[a;b]$.

Как следует из оценки $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqslant |\alpha - \beta|$, применённой к значениям функции $f(x)$ на концах каждого интервала, функция $|f(x)|$ будет удовлетворять определению 1 с тем же самым $\delta(\varepsilon)$, которое подходит для $f(x)$. (Ср. пример 17 лекции 1а.)

Очевидно, обратное в общем случае неверно: достаточно взять любую разрывную на отрезке $[a;b]$ функцию, принимающую на нём значения -1 и 1. Тогда её модуль будет константой (абсолютно непрерывная функция), а сама она не будет абсолютно непрерывной (см. п. 2).

4. Пусть $f(x) \in C[a;b]$, $|f(x)| \in \mathbb{AC}[a;b]$. Тогда $f(x) \in \mathbb{AC}[a;b]$.

Идея доказательства сходна с использованной в п. 20 лекции 1а. Воспользуемся определением $1'$. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1(\varepsilon)$ из определения $1'$ для функции $|f|$ и докажем, что функция f будет удовлетворять определению $1'$ с тем же $\delta_1(\varepsilon)$. Пусть $\{(a_k;b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная система непересекающихся интервалов, вложенных в отрезок $[a;b]$, с суммарной длиной меньше $\delta_1(\varepsilon)$. Пусть для этой системы

$$K = \{k \in \{1,2,\ldots,n\} \mid f(a_k)f(b_k) < 0\}.$$

Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ для всех $k \in K$ существуют $\xi_k \in (a_k; b_k)$ такие, что $f(\xi_k) = 0$. Разбив интервалы $(a_k; b_k)$, $k \in K$, точками ξ_k на интервалы $(a_k; \xi_k)$, $(\xi_k; b_k)$, получим новую конечную систему непересекающихся интервалов с прежней суммой длин.Таким образом, это новая система будет удовлетворять условию (2)) поэтому будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1,\, k\notin K}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k\in K} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1,\, k\notin K}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k\in K} \big(|f(b_k) - f(\xi_k)| + |f(\xi_k) - f(a_k)|\big) =$$
$$= \sum_{k=1,\, k\notin K}^{n} \big||f(b_k)| - |f(a_k)|\big| + \sum_{k\in K} \Big(\big||f(b_k)| - |f(\xi_k)|\big| + \big||f(\xi_k)| - |f(a_k)|\big|\Big) < \varepsilon.$$

Поскольку были выбраны произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольная система интервалов с суммой длин, меньшей $\delta_1(\varepsilon)$, то утверждение доказано.

5. На лекции из определения 2 было выведено, что всякая абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. В качестве упражнения на понятие вариации дадим непосредственное доказательство с опорой на определение $1'$ (заметим, что его эквивалентность определению 1 уже доказана).

Положим $\varepsilon = 1$. Выберем (в смысле определения $1'$) $\delta = \delta_1(\varepsilon)$. Разобьём отрезок $[a; b]$ на конечное число N отрезков $[y_{l-1}; y_l]$ длины меньше δ. Заметим, что любое разбиение $y_{l-1} = a_0^{(l)} < < a_1^{(l)} < \ldots < a_{n_l}^{(l)} = y_l$ отрезка $[y_{l-1}; y_l]$ на отрезки автоматически порождает семейство *непересекающихся* интервалов $\{(a^l_{(k-1)}; a_k^{(l)})\}_{k=1}^{n_l}$ *суммарной длины меньше* δ. Поэтому благодаря выбору δ в силу определения $1'$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n_l} \left| f(a_k^{(l)}) - f(a_{k-1}^{(l)}) \right| < \varepsilon = 1,$$

откуда $V_{y_{l-1}}^{y_l}(f) = 1$, и в силу аддитивности полной вариации $V_a^b(f) = \sum_{l=1}^{N} V_{y_{l-1}}^{y_l}(f) \leqslant N\varepsilon = N$.

6. На лекции и в предыдущем примере было доказано, что $\mathbb{AC}[a; b] \subset \mathbb{BV}[a; b]$. Покажем теперь, что $\mathbb{BV}[a; b] \cap C[a; b] \not\subset \mathbb{AC}[a; b]$. Это будет центральной частью данной лекции.

Для доказательства построим т. н. лестницу Кантора (иногда она также называется просто функцией Кантора). Нам потребуется развить идею, использованную при построении множества Кантора (см. лекцию 4 предыдущего семестра).

Прежде всего опишем построение функции $\bar{f}(x)$, на основе которой мы затем построим функцию Кантора $f(x)$. Рассмотрим отрезок $[0; 1]$ и положим $\bar{f}(0) = 0$, $\bar{f}(1) = 1$.

Шаг № 1. Разобьём имеющийся отрезок на 3 равных отрезка точками $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Положим

$$\bar{f}\left(\frac{1}{3}\right) = \bar{f}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}(\bar{f}(0) + \bar{f}(1)) = \frac{1}{2}.$$

Выбросим из отрезка $[0;1]$ интервал $I_1^{(1)} \equiv \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, после чего у нас останется 2 отрезка

$$\left[0;\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3};1\right].$$

Шаг № 2. Разобьём каждый их оставшихся отрезков $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3};1\right]$ на 3 равных отрезка соответственно точками $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ и $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$. Положим

$$\bar{f}\left(\frac{1}{9}\right) = \bar{f}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{f}(0) + \bar{f}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{4},$$
$$\bar{f}\left(\frac{7}{9}\right) = \bar{f}\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{f}\left(\frac{2}{3}\right) + \bar{f}(1)\right) = \frac{3}{4}.$$

Снова выбросим из оставшихся отрезков средние трети $I_2^{(1)}$ и $I_2^{(2)}$, после чего у нас останется 4 отрезка

$$\left[0;\frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9};1\right].$$

Итак, перед каждым k-м шагом у нас будет иметься 2^k отрезков длины $\frac{1}{3^{k-1}}$. Координаты их начал будут иметь троичную запись вида

$$0{,}c_1c_2\ldots c_{k-1}, \tag{4}$$

где каждое из чисел c_i, $i=\overline{1,k-1}$, равно 0 или 2 (исключён лишь случай $c_1=c_2=\ldots=c_{k-1}=2$). При этом значения функции на левом и правом концах l-го по счёту слева отрезка ($l=1,\ldots 2^k$) будут равны соответственно

$$\frac{l-1}{2^{k-1}}, \frac{l}{2^{k-1}}. \tag{5}$$

На k-м шаге для каждого имеющегося l-го отрезка мы выбираем точки $x_{kl}^{(1)}$, $x_{kl}^{(2)}$, делящие этот отрезок на 3 равные части, и полагаем

$$f\left(x_{kl}^{(1)}\right) = f\left(x_{kl}^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{l-1}{2^{k-1}} + \frac{l}{2^{k-1}}\right) = \frac{2l-1}{2^k}. \tag{6}$$

После этого выбрасываем из каждого l-го отрезка интервалы $I_k^{(l)}$, ограниченные точками $x_{kl}^{(1)}$, $x_{kl}^{(2)}$.

В результате l-й отрезок длины $\frac{1}{3^{k-1}}$ «породил» $(2l-1)$-й и $2l$-й отрезки длины $\frac{1}{3^k}$. При этом значения функции $\bar{f}$ на концах $(2l-1)$-го отрезка будут равны $\frac{l-1}{2^{k-1}} \equiv \frac{2l-2}{2^k}$ и $\frac{2l-1}{2^k}$, а на концах $2l$-го — $\frac{2l-1}{2^k}$ и $\frac{l}{2^{k-1}} \equiv \frac{2l}{2^k}$ соответственно, что сводится к (5), если заменить l на $2l-1$ и $2l$ соответственно, k на $k+1$. Таким образом, наша индуктивная процедура действительно корректно описана.

После бесконечного числа таких шагов мы получим функцию $\bar{f}$, определённую на множестве J границ всех выброшенных интервалов. Функция $\bar{f}$ монотонна на J. В самом деле, легко проследить по индукции, что на каждом конечном шаге «недостроенная» функция монотонна на том множестве, на котором она уже определена. Теперь заметим, что, каковы бы ни были точки $c, d \in J$, мы дойдём до них в построении функции $\bar{f}$ за конечное число шагов l, m соответственно. Тогда требуемое утверждение следует из монотонности «недостроенной» функции $\bar{f}$ на шаге с номером $\max(l, m)$: значения функции в этих при дальнейшем построении не изменятся.

Положим теперь

$$f(x) = \sup_{y \in J | y \leqslant x} \bar{f}(y). \tag{7}$$

Заметим:

1) $f(0) = 0$, поскольку условию $y \leqslant 0$ удовлетворяет лишь одна точка множества J — точка 0 — и $\bar{f}(0) = 0$.

2) $f(x) = \bar{f}(x)$ при всех $x \in J$, что следует из (7) и монотонности функции $\bar{f}$ на множестве J; отсюда же следует, что $0 \leqslant \bar{f}(x) \leqslant 1$ при всех $x \in J$.

3) $f(1) = 1$, поскольку условию $y \leqslant 0$ удовлетворяют все точки множества J, включая 1, $\bar{f}(1) = 1$ и $\bar{f}(y) \leqslant 1$ при $y \in J$.

4) Функция $f(x)$ — монотонно неубывающая, что непосредственно следует из её определения (7).

5) Множество значений функции f всюду плотно заполняет отрезок $[0; 1]$. Действительно, в это множество входит всё множество значений функции $\bar{f}$, а оно содержит все двоично-рациональные числа отрезка $[0; 1]$ (двоично-рациональные числа – это числа вида $\frac{l}{2^m}$, $l \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, $l \in \mathbb{Z}$).

В силу монотонности функции $f(x)$ из 4) следует её непрерывность на $[0; 1]$ (см. задачу 4).

(Заметим ещё, что функция $f(x)$ постоянна на любом из интервалов $I_k^{(l)}$, а поэтому дифференцируема в каждой точке любого из них и имеет там нулевую производную. Это наблюдение нам потребуется в дальнейшем.)

Итак, функция Кантора непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и монотонна на нём, а следовательно, имеет ограниченную вариацию. Докажем, что эта функция не является абсолютно непрерывной на $[0; 1]$.

Для этого докажем, что при любом $\delta > 0$ на отрезке $[a; b]$ найдётся конечная система непересекающихся интервалов $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ с суммой длин меньше δ, для которой $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 1$.

Рассмотрим множество $P_0 = [0; 1] \setminus \cup_{k \in \mathbb{N}} \cup_{l=\overline{1, 2^{k-1}}} I_k^{(l)}$, т. е. множество, оставшееся от отрезка $[0; 1]$ после описанной индуктивной процедуры (напомним, что мы не только строили функцию, но и выбрасывали подмножества отрезка). Как известно из прошлого семестра, это множество (называемое *замкнутым множеством Кантора*) имеет меру нуль. Следовательно, при любом $\delta > 0$ оно может быть покрыто конечной или счётной системой интервалов суммарной длины меньше δ. Построим такую систему для выбранного выше δ. Поскольку P_0 замкнуто и ограничено, а следовательно, компактно, то из полученного покрытия, если оно состоит из счётного семейства интервалов, можно выбрать конечное подпокрытие (см. лекцию 12а первого семестра). Пусть это конечное подпокрытие есть

$$\{(\alpha_i;\beta_i)\}_{i=1}^m, \quad \cup_{i=1}^m(\alpha_i;\beta_i)\supset P_0.$$

Однако интервалы этого покрытия могут пересекаться. Наша ближайшая задача — построить систему непересекающихся отрезков, покрывающую P_0.

Рассмотрим замкнутое множество

$$\cup_{i=1}^m[\alpha_i;\beta_i]\supset\cup_{i=1}^m(\alpha_i;\beta_i)\supset P_0. \tag{8}$$

Пусть

$$\{c_i\}_{i=1}^p=\{a_i\}_{i=1}^m\cup\{b_i\}_{i=1}^m, \quad p\leqslant 2m,$$

есть набор упорядоченных по возрастанию начал и концов интервалов покрытия (8). Рассмотрим отрезки $[c_k;c_{k+1}]$, $k=1,\ldots,p-1$. Очевидно, что

$$\cup_{k=1}^{p-1}[c_k;c_{k+1}]\supset\cup_{i=1}^m[\alpha_i;\beta_i], \tag{9}$$

и что каждый из отрезков (9) либо содержится в (8) целиком, либо не входит (кроме граничных точек) (тем самым не пересекаясь с открытым покрытием). При этом отрезки (9) имеют непересекающиеся внутренности и сумма длин тех из них, что содержатся в (8), не превосходит меры множества (8), а поэтому меньше δ. Оставив из (9) лишь те отрезки, которые содержится в (8), переобозначим их $(a_k;b_k)$, $k=\overline{1,n}$. Тогда $\{(a_k;b_k)\}_{k=1}^n$ — конечное семейство непересекающихся интервалов, содержащихся в отрезке $[0;1]$ и такое, что

$$\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta. \tag{10}$$

С другой стороны, множество

$$Q=\cup_{k=1}^n[a_k;b_k]$$

покрывает множество P_0. Иными словами, все точки из $[0;1]\setminus Q$ суть точки выброшенных интервалов.

Достроим теперь множество Q до разбиения отрезка $[0;1]$ конечным числом отрезков длины меньше δ. Обозначим добавленные при этом отрезки через $\{c_l;d_l\}_{l=1}^t$. Тогда

$$1=f(1)-f(0)=\sum_{k=1}^n(f(b_k)-f(a_k))+\sum_{l=t}^n(f(c_l)-f(d_l)). \tag{11}$$

С другой стороны, каждый из добавленных отрезков в силу сказанного в предыдущем абзаце лежит целиком в одном из выброшенных интервалов, а следовательно, функция f на нём постоянна. Следовательно, из (11) получаем:

$$1=f(1)-f(0)=\sum_{k=1}^n(f(b_k)-f(a_k)).$$

Поскольку верно (10), требуемая система интервалов построена.

Итак, функция Кантора $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $f \in \mathbb{BV}[0;1] \cap C[0;1]$;

2) $f \notin \mathbb{AC}[0;1]$;

3) $f'(x) = 0$ почти всюду на $[0;1]$.

Определение. Непрерывную функцию с ограниченным изменением, имеющую почти всюду равную нулю производную, называют *сингулярной* функцией.

Приведённое выше рассуждение показывает, что сингулярная функция, отличная от константы, не может быть абсолютно непрерывной.

Приведём ещё некоторые важные факты из теории функций действительной переменной (п. 6—8). Их доказательство (если оно не приведено здесь) можно найти у Колмогорова и Фомина, гл. VI.

6. Любая монотонная функция на отрезке дифференцируема почти всюду на этом отрезке. (В силу доказанного ранее, в том числе на предыдущих лекциях, отсюда сразу вытекает аналогичное утверждение для функций ограниченной вариации, а следовательно, и абсолютно непрерывных.)

Считая это известным, докажем, что если $f(x)$ — неубывающая на отрезке $[a;b]$ функция, то $f'(x) \in L^1(a;b)$ и верно неравенство

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a). \tag{12}$$

(Подразумевается, что $f'(x)$ доопределена произвольным образом в тех точках, где эта производная не существует.) Так, для функции Кантора левая часть равенства равна нулю, а правая — единице.

Для доказательства продолжим функцию $f(x)$ значением $f(b)$ при $x > b$ и положим при всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a;b]$

$$F_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Очевидно, что $F_n(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a;b]$ (в силу монотонного неубывания функции f) и $F_n(x) \to f'(x)$ почти всюду (во всех точках дифференцируемости $f(x)$). Заметив, что $F_n(x)$ интегрируемы (даже по Риману как разности монотонных функций), имеем

$$\int_a^b F_n(x)\,dx = n\left(\int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right)dx - \int_a^b f(x)\,dx\right) =$$
$$= n\left(-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx + \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\right) \leqslant f(b) - f(a),$$

поскольку $f(x) \geqslant f(a)$ при $x > a$ и $f(x) = f(b)$ при $x > b$.

Следовательно, по теореме Фату, применённой к функциям $F_n(x)$, интеграл Лебега $\int_a^b f'(x)dx$ существует и его значение также оценивается сверху числом $f(b) - f(a)$, что и доказывает (12).

Заметим теперь, что в силу (12) с учётом монотонности $f(x)$ имеем

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \equiv \int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a),$$

т. е. $f'(x) \in L^1(a;b)$.

Легко видеть, что в силу линейности пространства $L^1(a;b)$ то же верно для производной всякой функции ограниченной вариации.

7. Как мы видели, в общем случае равенство

$$f(x) = \int_a^x f'(x)\,dx + f(a), \quad x \in [a;b], \tag{13}$$

неверно. Более того, можно утверждать, что (13) верно в том и только случае, когда $f \in \mathbb{AC}[a;b]$. Легко доказать, что условие (13) достаточно. Действительно, оно предполагает, что интеграл имеет (конечное) значение, а тогда $f'(x) \in L^1(a;b)$, далее см. п. 1. Существенно сложнее доказать, что для всякая абсолютно непрерывная функция почти всюду имеет производную (см. предыдущий пункт) и что эта производная позволяет восстановить функцию по формуле (13).

8. Верно и в каком-то смысле обратное утверждение: если $g(x) \in L^1(a;b)$, то почти всюду на $[a;b]$:
1) функция переменной x $\int_a^x g(y)\,dy$ дифференцируема и
2) при почти всех $x \in [a;b]$ верно равенство $\frac{d}{dx}\int_a^x g(y)\,dy = g(x)$.

9. В задачах для самостоятельного решения к лекции 1а требовалось показать, что всякая функция ограниченной вариации $f(x)$ раскладывается в сумму непрерывной функции ограниченной вариации $g(x)$ и функции скачков $s(x)$. Теперь мы можем установить дальнейший результат. Именно, всякая непрерывная функция ограниченной вариации $g(x)$ раскладывается в сумму абсолютно непрерывной функции $\psi(x)$ и сингулярной функции $\chi(x)$. Действительно, положим (см. п. 6, 7)

$$\psi(x) = f(a) + \int_a^x g'(y)\,dy, \quad \chi(x) = g(x) - \psi(x).$$

Тогда легко видеть, что $\psi(x) \in \mathbb{AC}[a;b]$, $\chi(x) \in C[a;b] \cap \mathbb{BV}[a;b]$ и (см. п. 8)

$$\chi'(x) = g'(x) - \psi'(x) = g'(x) - \frac{d}{dx}\int_a^x g'(y)\,dy = g'(x) - g'(x) = 0.$$

Таким образом, *любую функцию ограниченной вариации можно представить в виде непрерывной функции ограниченной вариации, функции скачков и сингулярной функции*:

$$f(x) = \psi(x) + s(x) + \chi(x), \tag{14}$$

причём это разложение можно сделать единственным, если, например, наложить условия $\chi(a) = s(a) = 0$. Важно, что *при интегрировании производной восстанавливается лишь абсолютно* *непрерывная компонента*, тогда как функция скачков и сингулярная (чьи производные равны нулю почти всюду) «бесследно исчезают»:

$$\int_a^x f'(y)\,dy + f(a) = \int_a^x (\psi'(y) + s'(y) + \chi'(y))\,dy + f(a) = \psi(x).$$

$$\begin{tikzcd}
 & \text{ф-я скачков} \arrow[rr] & & \text{ф-я скачков} \\
\text{ф-я ограниченной вариации} \arrow[ur] \arrow[ddr] & + & & + \\
 & & & \text{сингулярная ф-я} \\
 & \text{непрерывная ф-я ограниченной вариации} \arrow[urr] \arrow[drr] & & + \\
 & & & \text{абсолютно непрерывная}
\end{tikzcd}$$

Схема к п. 9: разложение функции ограниченной вариации в сумму функции скачков, сингулярной функции и абсолютно непрерывной функции

10. Отметим ещё, что если $f \in \mathbb{AC}[a;b]$, то $f_1 \equiv V_a^x(f) \in \mathbb{AC}[a;b]$. Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ в смысле определения $1'$. Получим тогда для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k;b_k)\}_{k=1}^n$

$$\sum_{k=1}^n |f_1(b_k) - f_1(a_k)| = \sum_{k=1}^n V_{a_k}^{b_k}(f) = \sum_{k=1}^n \sup_{T_k} \sum_{l_k=1}^{n_k} |f(b_{l_k}) - f(a_{l_k})| =$$
$$= \sup_{T_k} \sum_{k=1}^n \sum_{l_k=1}^{n_k} |f(b_{l_k}) - f(a_{l_k})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

поскольку $\cup_{k=1}^n \{(a_{l_k};b_{l_k})\}_{l_k=1}^{n_k}$ также есть система непересекающихся интервалов суммарной длиной меньше $\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, а следовательно, каждая сумма, стоящая под знаком sup, меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

11. Отсюда непосредственно следует, что всякая абсолютная непрерывная функция может быть представлена в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных функций.

12. Покажем, что, хотя всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна, от неё, вообще говоря, нельзя ожидать выполнения «чуть более» сильного требования — гёльдеровости (ни с каким показателем) и тем более липшицевости (= гёльдеровость с показателем 1). Рассмотрим функции

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\ln^2\frac{2}{x}}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln\frac{2}{x}}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что
1) $g(x) > 0$ при $x \in (0;1]$,
2) $g(x) \in L(0;1)$,
3) $\int_0^x g(y)\,dy = f(x)$, $x \in [0;1]$.
Следовательно, $f(x) \in \mathbb{AC}[0;1]$. С другой стороны, при любом $\alpha \in (0;1]$ имеем

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x) - f(0)}{(x-0)^\alpha} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x^\alpha \ln\frac{2}{x}} = +\infty,$$

поэтому $f(x) \notin C^\alpha[0;1]$ ни при каком $\alpha \in (0;1]$. (Отметим, что попутно мы установили, что не все непрерывные функции гёльдеровы).

Задачи для самостоятельного решения

1. 1) Привести пример дифференцируемой почти всюду функции $f(x)$, для которой интеграл $\int_a^b f'(x)\,dx$ существует, но $\int_a^b f'(x)\,dx \neq f(b) - f(a)$.
2) То же, но $f(x)$ должна быть непрерывной, а интеграл от производной должен быть отличен от нуля.
3) Представить построенную в п. 2) функцию в виде (14).

2. Доказать, что $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{AC}[a;b]$, если $f, g \in \mathbb{AC}[a;b]$, $|g| \geqslant C > 0$.

3. Доказать, что липшиц-непрерывная функция абсолютно непрерывна.

4*. Доказать, что если функция f монотонно не убывает на отрезке $[a;b]$, а множество её значений всюду плотно на отрезке $[f(a);f(b)]$, то $f(x) \in C[a;b]$.

5*. Как мы видели в примере 12, абсолютная непрерывность не гарантирует гёльдеровости. Показать, что если в определении абсолютной непрерывности снять требование пустоты попарного пересечения интервалов, то функции, удовлетворяющие новому определению, будут даже липшицевы.

6*. Построить функцию

$$f(x) \in \left(\cap_{\alpha\in(0;1)} C^\alpha[0;1]\right) \setminus \mathbb{BV}[0;1].$$

7*. Построить функцию $f(x) \in \mathbb{BV}[0;1] \cap C[0;1]$, не являющуюся гёльдеровой ни при каком $\alpha \in (0;1)$ (и тем более липшицевой).

8*. Построить на некотором отрезке $[a;b]$ функцию $g(x)$, для которой функция

$$f(x) = \int_a^x g(y)\,dy,$$

где интеграл понимается в несобственном смысле Римана, определена (как конечная функция) при всех $x \in [a;b]$, но не является абсолютно непрерывной. Возможно ли такое, если интеграл понимается в смысле Лебега? Чем объяснить кажущееся несоответствие?