ЛЕКЦИЯ 4А
Теорема Радона—Никодима

Это занятие будет посвящено доказательству теоремы Радона—Никодима. Она будет нужна нам для того, чтобы доказать изоморфизм пространств $L^p(\Omega)$ и $(L^q(\Omega))^*$, где $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Заряды

Пусть X — некоторое множество (которое мы часто будем называть пространством, подчёркивая тем самым, что в дальнейшем будут рассматриваться его подмножества), $\mathcal{A}_\mu$ — некоторая σ-алгебра его подмножеств. Напомним

Определение. Числовая функция μ, определённая на $\mathcal{A}_\mu$, называется *мерой*, если
1) $\forall A \in \mathcal{A}_\mu\ \mu(A) \geqslant 0$;
2) μ обладает свойством σ-аддитивности, т. е. если $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}_\mu$ и при всех $i, j \in \mathbb{N}$ верно $A_i \cap A_j = \varnothing$, то $\mu(\sqcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

Для простоты будем пока рассуждать о конечных мерах: $\mu(X) < +\infty$.

Пусть $f(x)$ — некоторая неотрицательная измеримая и интегрируемая (по Лебегу) на X функция. Тогда величина

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu \tag{1}$$

определена при всех $A \in \mathcal{A}_\mu$ и обладает всеми свойствами меры. Таким образом, формула (1) определяет некоторую новую меру на $\mathcal{A}_\mu$. Если снять условие неотрицательности функции, так уже не будет. Однако в определении меры тоже можно снять условие неотрицательности и прийти к обобщению понятия меры:

Определение. Числовая функция Φ, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}_\Phi$ подмножеств пространства X и обладающая на этой σ-алгебре свойством σ-аддитивности, называется *зарядом.* Заряд называется *конечным*, если его значение на любом $A \in \mathcal{A}$ выражается конечным числом ($\pm\infty$ не допускается).

Смысл такого названия ясен: $\Phi(A)$ можно представить себе как полный электрический заряд, заключённый в объёме A. В этом случае $f(x)$ будет иметь смысл объёмной плотности заряда.

Нашей целью будет доказать, что не только всякая интегрируемая функция порождает заряд, но и, напротив, при некоторых условиях всякий заряд может быть представлен в виде (1) с некоторой функцией $f(x)$.

2. Разложение Хана и разложение Жордана

Итак, пусть рассматривается конечный заряд Φ, определённый на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X и принимающий лишь конечные значения. Кратко будем говорить, что заряд определён на пространстве X, а множества из $\mathcal{A}$ будем в этом параграфе называть измеримыми (рассматривая тем самым измеримость не относительно меры, а относительно заряда).

Определение. Множество $E \in \mathcal{A}$ называется *отрицательным относительно заряда* Φ, если $\forall F \in \mathcal{A}$ верно $\Phi(E \cap F) \leqslant 0$. Множество $E \in \mathcal{A}$ называется *положительным относительно заряда* Φ, если $\forall F \in \mathcal{A}$ верно $\Phi(E \cap F) \geqslant 0$.

Замечание. Вообще говоря, далеко не всякое множество, имеющее отрицательный заряд, является отрицательным. (В каком случае всё-таки это можно утверждать?)

Лемма 1. Множество $A \in \mathcal{A}$ положительно относительно заряда Φ тогда и только тогда, когда всякое его измеримое подмножество имеет неотрицательный заряд. (Аналогичное утверждение можно сформулировать для отрицательного множества.)

Доказательство рекомендуется провести самостоятельно (см. задачу 2).

Лемма 2. Пусть $A_0 \in \mathcal{A}$, $\Phi(A_0) < 0$. Тогда в A_0 найдётся непустое измеримое отрицательное подмножество.

Доказательство. Заметим, что A_0 непусто (см. задачу 1). Далее, если в A_0 нет подмножеств положительного заряда, утверждение доказано (см. лемму 1).

Рассмотрим теперь случай, когда в A_0 найдётся хотя бы одно подмножество положительного заряда. Тогда существуют такое $k \in \mathbb{N}$ и такое измеримое подмножество $C \subset A_0$, что $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. Выберем наименьшее из натуральных k, обладающее следующим свойством: в A_0 есть измеримое подмножество C с $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. Зафиксируем такое k и такое C, обозначив их соответственно k_1, C_1. Положим

$$A_1 = A_0 \setminus C_1.$$

Заметим, что $\Phi(A_1) = \Phi(A_0) - \Phi(C_1) < 0$, поэтому A_1 непусто. Могут представиться два случая: либо A_1 является отрицательным множеством, и тогда утверждение доказано, либо в A_1 найдётся подмножество C положительного заряда. Во втором случае вновь выберем наименьшее натуральное k, для которого в A_1 найдётся подмножество C с $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. Обозначим эти число и множество соответственно k_2, C_2. Заметим, что с необходимостью $k_2 \geqslant k_1$. В самом деле, в случае $k_2 < k_1$ получили бы, что k_1, найденное на первом шаге, не является минимальное возможным, ведь для $C_2 \subset A_1 \subset A_0$ имеем $\Phi(C_2) \geqslant \frac{1}{k_2}$.

Продолжим эту процедуру, если понадобится, до бесконечности. Чтобы корректно воспользоваться этим построением в дальнейшей части доказательства, опишем её более подробно.

Итак, *перед* каждым шагом с номером l имеем: $\Phi(A_{l-1}) < 0$, но A_{l-1} не является отрицательным множеством. Поэтому существует такое k_l — наименьшее из натуральных чисел k, для которых найдётся $C \subset A_{l-1}$ с $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. (Отсюда следует, что

$$\text{все подмножества } D \subset A_{l-1} \text{ таковы, что } \Phi(D) < \tfrac{1}{m} \text{ при всех } m < k_l.) \tag{2}$$

Выберем для этого k_l такое $C \subset A_{l-1}$, $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$, и зафиксируем его, обозначив через C_l. Далее, $k_l \geqslant k_{l-1}$, иначе множество C_l и число k_l были бы уже выбраны на $(l-1)$-м шаге. (Проверьте, что в случае $n = 1$ мы приходим к описанию первого шага, с которого начали изложение процедуры.)

Полагаем теперь

$$A_l = A_{l-1} \setminus C_l. \tag{3}$$

Заметим, что $\Phi(A_l) = \Phi(A_{l-1}) - \Phi(C_l) < 0$. Следовательно, A_l непусто. Если A_l — отрицательное множество, утверждение доказано. Если A_l не является отрицательным множеством, переходим к шагу $l+1$.

В результате мы либо за конечное число шагов придём к отрицательному множеству, либо построим бесконечную последовательность пар $\{(k_l, C_l)\}_{l=1}^{\infty}$. Легко видеть, что множества C_l попарно не пересекаются, поскольку при $p < q$ имеем: $C_q \subset A_{q-1} \subset \ldots \subset C_p$, $C_p \cap A_p = \varnothing$ в силу (3). Далее, легко видеть, что $k_l \to +\infty$. В противном случае имели бы:

$$\exists M > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists l > N \;\; k_l \leqslant M,$$

т. е. в последовательности $\{k_l\}$ имеется подпоследовательность $\{k_{l_N}\}$ с $k_{l_N} \leqslant M$, или $\Phi(C_{l_N}) \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{M} > 0$. Но тогда, поскольку множества C_k попарно не пересекаются, имели бы

$$\varphi\left(\sqcup_{N\in\mathbb{N}} C_{l_N}\right) = \sum_{N\in\mathbb{N}} \Phi(C_{l_N}) = +\infty,$$

что исключается условием конечности заряда Φ на всех множествах из $\mathcal{A}$.

Рассмотрим теперь множество

$$A_\infty \equiv A_0 \setminus \sqcup_{l\in\mathbb{N}} C_l.$$

Поскольку $\Phi(A_0) < 0$, $\Phi\left(\sqcup_{l\in\mathbb{N}} C_l\right) > 0$, то A_∞ имеет строго отрицательный заряд и поэтому непусто. Докажем, что A_∞ — отрицательное множество. Предположим противное: пусть существует $D \subset A_\infty$ такое, что $\Phi(D) > 0$. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого $\Phi(D) \geqslant \frac{1}{m}$. Поскольку, как ранее показано, $k_l \to +\infty$, то найдётся такое наименьшее n, что $k_n > m$:

$$n = \min\{n \in \mathbb{N} \mid k_n > m\}.$$

Тогда в силу (2) имеем для k_n: все $C \subset A_{n-1}$ таковы, что $\Phi(C) < \frac{1}{m}$. Но это противоречит условию выбора m: $\Phi(D) \geqslant \frac{1}{m}$, поскольку по предположению $D \subset A_\infty \subset A_{n-1}$.

Лемма доказана.

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. Если Φ — конечный заряд, определённый на X, то существует такое измеримое множество $A^- \subset X$, что A^- отрицательно относительно Φ, а $A^+ = X \setminus A^-$ положительно относительно Φ.

Доказательство. Тривиальный случай заряда, положительного на всяком измеримом множестве (т. е. являющегося мерой), можно не рассматривать: в этом случае достаточно положить $A^- = \varnothing$.

Положим

$$a = \inf \Phi(A),$$

где точная нижняя грань берётся по всем отрицательным измеримым множествам (семейство таких подмножеств непусто в силу леммы 2). Пусть последовательность $\{A_n\}$ отрицательных измеримых множеств такова, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Такая последовательность существует в силу определения точной нижней грани. Положим теперь

$$A^- = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Заметим, что A^- измеримо (т. к. заряд определён на σ-алгебре) и $\Phi(A^-) = a$ (см. задачу 3). Отсюда, в частности, следует, что $a > -\infty$, иначе заряд принимал бы бесконечные значения. Кроме того, можно утверждать, что A^- — отрицательное множество (см. задачу 4).

Докажем теперь, что $A^+ = X \setminus A^-$ — положительное множество. Предположим противное (см. лемму 1): пусть A^+ содержит измеримое подмножество A_0 такое, что $\Phi(A_0) < 0$. В силу леммы 2 найдётся отрицательное подмножество $A \subset A_0$. Но тогда $A \subset A^+$, откуда $A \cap A^- = \varnothing$, и $\Phi(A^- \sqcup A) = \Phi(A^-) + \Phi(A) < a$. Но по построению числа a отрицательных множеств заряда меньше a нет. Полученное противоречие доказывает, что множество A^+ является положительным относительно заряда Φ.

Теорема доказана.

Определение. Разбиение пространства X на положительное и отрицательное множества называется *разложением Хана* пространства X *относительно заряда* Φ.

Легко видеть, что разложение Хана, вообще говоря, не единственно (почему?). Однако можно утверждать, что если

$$X = A_1^- \sqcup A_1^+, \quad X = A_2^- \sqcup A_2^+$$

суть два таких разложения, то для любого измеримого множества E

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-), \quad \Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+).$$

Действительно, положим

$$A_{12}^+ = A_1^+ \cap A_2^+, \quad A_1^+ = A_{12}^+ \sqcup \tilde{A}_1^+, \quad A_2^+ = A_{12}^+ \sqcup \tilde{A}_2^+.$$

Тогда

$$\Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_{12}^+) + \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+),$$
$$\Phi(E \cap A_2^+) = \Phi(E \cap A_{12}^+) + \Phi(E \cap \tilde{A}_2^+).$$

Но

$$\tilde{A}_1^+ \subset A_2^- \Rightarrow \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) \leqslant 0,$$
$$\tilde{A}_1^+ \subset A_1^+ \Rightarrow \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) \geqslant 0.$$

Следовательно, $\Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) = 0$. Аналогично $\Phi(E \cap \tilde{A}_2^+) = 0$. Таким образом,

$$\Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+) = \Phi(E \cap A_{12}^+).$$

Аналогично

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-),$$

что и требовалось.

Таким образом, заряд Φ однозначно определяет на σ-алгебре $\mathcal{A}$ две неотрицательные функции множества

$$\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+),$$
$$\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-),$$

называемые соответственно *верхней и нижней вариациями заряда* Φ. При этом:
1) $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ (для каждого измеримого множества);
2) Φ^+, Φ^- суть неотрицательные σ-аддитивные функции множества (см. задачу 6), т. е. меры. Поэтому функция $|\Phi| \equiv \Phi^+ + \Phi^-$ (*полная вариация заряда* Φ) тоже будет мерой.

Определение. Представление заряда Φ в виде разности его верхней и нижней вариаций $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ называется *разложением Жордана заряда* Φ.

Замечание. В этом определении существенно, что Φ^- и Φ^+ суть нижняя и верхняя вариации заряда Φ (определённые выше). Это гарантирует единственность разложения Жордана. Очевидно, что в общем случае представление заряда в виде разности двух мер не единственно (привести пример).

3. Типы зарядов

Пусть μ — некоторая σ-аддитивная мера, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X. Множества, входящие в $\mathcal{A}$, будем называть измеримыми. Пусть на той же σ-алгебре $\mathcal{A}$ определён заряд Φ.

Определение. Говорят, что заряд Φ *сосредоточен* на множестве $A_0 \in \mathcal{A}$, если

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; A \subset X \setminus A_0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

Множество A_0 в этом случае называется *носителем* заряда Φ.

Определение. Заряд Φ называется *непрерывным*, если $\Phi(E) = 0$ для любого одноточечного множества E.

Определение. Заряд Φ называется *дискретным*, он сосредоточен на конечном или счётном множестве. Это равносильно утверждению $\exists \{c_n\}$ ($n = \overline{1, N}$ или $n \in \mathbb{N}$) такое, что $\forall E \subset X$

$$\Phi(E) = \sum_{k: c_k \in E} \Phi(\{c_k\}).$$

Определение. Заряд Φ называется *абсолютно непрерывным относительно меры* μ, если

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mu(A) = 0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

Определение. Заряд Φ называется *сингулярным относительно меры* μ, если он сосредоточен на некотором множестве A с $\mu(A) = 0$.

Заметим, что интеграл Лебега (1) от фиксированной интегрируемой по Лебегу функции является абсолютно непрерывным (относительно меры Лебега μ, фигурирующей в этом интеграле) зарядом. Оказывается, этим примером все абсолютно непрерывные заряды исчерпываются.

4. Теорема Радона—Никодима

Теорема 2 (Радона—Никодима). Пусть μ — конечная σ-аддитивная мера, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X; пусть Φ — заряд, определённый на $\mathcal{A}$ и абсолютно непрерывный относительно μ. Тогда существует такая интегрируемая (по Лебегу) по мере μ функция $f(x)$, определённая на X, что

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu.$$

Эта функция (называемая *производной заряда* Φ *по мере* μ) определена с точностью до μ-эквивалентности.

Прежде чем перейти к доказательству, заметим, что простейшими примерами производной заряда по мере являются плотность (массы), плотность электрического заряда.

Доказательство. Поскольку каждый заряд есть разность двух неотрицательных зарядов и при этом абсолютно непрерывный заряд представляется в виде разности двух абсолютно непрерывных (см. задачу 7), то доказательство достаточно провести для неотрицательных зарядов, т. е. мер. Итак, пусть Φ — мера, абсолютно непрерывная относительно меры μ.

Лемма 3. Пусть мера Φ абсолютно непрерывна относительно меры μ и $\Phi \not\equiv 0$. Тогда существуют такие натуральное n и $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(B) > 0$ и B положительно относительно заряда $\Phi - \frac{1}{n}\mu$.

Доказательство леммы. Пусть $X = A_n^- \sqcup A_n^+$ — разложения Хана пространства X относительно зарядов $\Phi - \frac{1}{n}\mu$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть

$$A^- = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \quad A^+ = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^+.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Phi(A^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A^-)$, поэтому $\Phi(A^-) = 0$. Следовательно, $\Phi(A^+) > 0$ (почему?). Но тогда в силу абсолютно непрерывности меры Φ относительно меры μ имеем $\mu(A^+) > 0$. Поэтому существует такое m, что $\mu(A_m^+) > 0$: иначе $\mu(A^+) = 0$ в силу σ-аддитивности меры. Тогда множество $B = A_m$ и число $n = m$ удовлетворяют условиям леммы.

Лемма доказана.

Пусть теперь K — множество функций φ на X, удовлетворяющих условиям:

1) $\varphi \geqslant 0$,
2) φ измеримы и интегрируемы по μ на X,
3) $\forall A \in \mathcal{A}\ \int_A \varphi(x)\, d\mu \leqslant \Phi(A)$.

Пусть

$$M = \sup_{\varphi \in K} \int_X \varphi(x)\, d\mu.$$

(M конечно в силу конечности меры Φ и определения множества K.) В силу определения точной верхней грани существует такая последовательность $\{f_n\} \subset K$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = M.$$

Положим при каждом $x \in X$

$$g_n(x) = \max(f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

(Докажите, что эти функции измеримы и интегрируемы на X, см. задачу 7.)

Покажем, что $g_n \in K$, т. е. что для всех $E \in \mathcal{A}$ верно

$$\int_E g_n(x)\, d\mu \leqslant \Phi(E).$$

Действительно, E можно представить в виде $E = \sqcup_{k=1}^n E_k$, где $g_n(x) = f_k(x)$ при всех $x \in E_k$ (почему, вообще говоря, нельзя написать $E_k = \{x \in X \mid g_n(x) = f_k(x)\}$?). Поэтому

$$\int_E g_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_k(x)\, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^n \Phi(E_k) = \Phi(E).$$

Заметим, что последовательность функций $g_n(x)$ обладает следующими свойствами:

1) она монотонно не убывает в каждой точке;
2) все g_n измеримы и интегрируемы по мере μ;
3) $\forall E \in \mathcal{A}\ \int_E g_n(x)\, d\mu \leqslant \Phi(E)$ и, в частности,
3′) $\int_X g_n(x)\, d\mu \leqslant \Phi(X)$.

Тогда из 1), 2), 3′) по теореме Беппо Леви следует существование почти всюду на X конечного предела

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x),$$

а также существование интеграла $\int_X f(x)\, d\mu$ и равенство

$$\int_X f(x)\, d\mu = \Phi(X).$$

Более того, применяя теорему Беппо Леви к любому множеству из $\mathcal{A}$, получаем из 1), 2), 3):

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \int_E f(x)\, d\mu \leqslant \Phi(E), \tag{4}$$

т. е. $f(x) \in K$.

Покажем теперь, что для любого $E \in \mathcal{A}$

$$\Phi(E) - \int_E f(x)\,d\mu = 0.$$

Заметим, что функция множества

$$\lambda(E) \equiv \Phi(E) - \int_E f(x)\,d\mu$$

неотрицательна в силу (4) и обладает всеми свойствами меры. Далее, она абсолютно непрерывна относительно меры μ. Если $\lambda \not\equiv 0$, то в силу леммы 3 существует такое число $\varepsilon > 0$ и такое множество $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(B) > 0$ и для любого $E \in \mathcal{A}$ верно неравенство

$$\varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant \lambda(E \cap B).$$

Положим $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$, где $\chi_B(x)$ — индикаторная функция множества B. Тогда при всех $E \in \mathcal{A}$ с учётом $f(x) \in K$ получим

$$\begin{aligned}\int_E h(x)\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant \int_E f(x)\,d\mu + \lambda(E \cap B) = \\ = \int_E f(x)\,d\mu + \Phi(E \cap B) - \int_{E\cap B} f(x)\,d\mu = \int_{E\setminus B} f(x)\,d\mu + \Phi(E \cap B) \leqslant \\ \leqslant \Phi(E \setminus B) + \Phi(E \cap B) = \Phi(E).\end{aligned}$$

Это означает, что $h \in K$. Но, с другой стороны,

$$\int_X h(x)\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(B) > M,$$

что приводит нас к противоречию с определением M.

Следовательно, существование такой функции f, что $\Phi(A) = \int_A f(x)\,d\mu$ при всех $A \in \mathcal{A}$, доказано.

Докажем единственность (с точностью до μ-эквивалентности). Пусть при всех $A \in \mathcal{A}$

$$\Phi(A) = \int_A f_1(x)\,d\mu = \int_A f_2(x)\,d\mu.$$

Тогда для всех

$$A_n \equiv \left\{x \mid f_2(x) - f_1(x) > \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем в силу неравенства Чебышёва

$$\mu(A_n) \leqslant n\int_{A_n} (f_1(x) - f_2(x))\,d\mu = \int_{A_n} f_1(x)\,d\mu - \int_{A_n} f_2(x)\,d\mu = 0.$$

Аналогично, для $B_m = \left\{x \mid f_1(x) - f_2(x) > \frac{1}{m}\right\}$ имеем $\mu(B_m) = 0$. Следовательно,

$$\mu\{x \in X \mid f_1(x) \neq f_2(x)\} \equiv \mu\big((\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\cup_{m\in\mathbb{N}} B_m)\big) = 0,$$

т. е. $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду.

Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы по ходу текста.

1. Доказать, что из счётной аддитивности меры (заряда) следует конечная аддитивность. *Указание.* Докажите сначала, что пустое множество имеет нулевую меру (заряд).

2. Доказать лемму 1 на с. 2.

3. Показать, что в доказательстве теоремы 1 множество A^- измеримо и $\Phi(A^-) = a$.

4. Показать, что в доказательстве теоремы 1 A^- — отрицательное множество. *Предостережение.* Требуется показать существенно более сильное утверждение, чем $\Phi(A^-) < 0$.

5. Показать, что верхняя и нижняя вариации заряда суть σ-аддитивные функции множества.

6. Показать, что если заряд Φ абсолютно непрерывен относительно меры μ, то то же можно сказать о его верхней и нижней вариациях.

7. Доказать, что функции $g_n(x)$, использованные в доказательстве теоремы Радона—Никодима, измеримы и интегрируемы на X.

8. 1) Определяет ли функция Кантора на отрезке $[0;1]$ некоторую меру по формуле (1)?
2) Что можно сказать об этой мере по отношению к мере Лебега?

9*. Пусть $g(x)$ — произвольная монотонно неубывающая функция, определённая на отрезке $[0;1]$. Продолжим её константой $g(a)$ слева от a и константой $g(b)$ справа от b. Рассмотрим полукольцо (см. лекцию 2а предыдущего семестра) S всех промежутков, вложенных в отрезок $[0;1]$, и определим на этом полукольце меру m следующим образом (при всех $a, b \in [0;1]$, $b \geqslant a$):

$$m([a;b]) = g(b+0) - g(a-0);$$
$$m([a;b)) = g(b-0) - g(a-0);$$
$$m((a;b]) = g(b+0) - g(a+0);$$
$$m((a;b)) = g(b-0) - g(a+0).$$

1) Доказать, что m — действительно мера на S, т. е. неотрицательная σ-аддитивная функция промежутка. (Доказательство σ-аддитивности развивает идеи лекции 1 первого семестра).

Пользуясь продолжением меры с полукольца на σ-алгебру, можно получить меру μ_g, определенную на некоторой σ-алгебре. (Нам важен лишь этот факт; доказательство можно, но не обязательно для решения данной задачи, прочитать у Колмогорова, Фомина.)
2) Будет ли мера μ_g абсолютно непрерывной относительно классической меры Лебега?
3) Может ли при некоторой функции $g(x)$ мера μ_g быть сингулярной относительно классической меры Лебега? (см. определение выше)?
4) Можно ли, сняв требование монотонности функции g, построить аналогичным образом заряд Φ_g?