ЛЕКЦИЯ 5А

Пространства Лебега

1. Полнота пространств Лебега

Мы рассматриваем пространства $L^p(\Omega)$, где Ω есть некоторое измеримое пространство (конечной или бесконечной, но σ-конечной меры), $p \in [1; +\infty]$.

Теорема. Пространства $L^p(\Omega)$ полны.

Доказательство.

Пусть дана последовательность $\{f_n\}$, фундаментальная по норме пространства $L^p(\Omega)$. Мы докажем, что существует элемент $f \in L^p(\Omega)$ такой, что $f_n \to f$ в $L^p(\Omega)$.

I. $p = 1$. Прежде всего нам следует начать с выбора представителей элементов f_n. Сделаем этот выбор произвольным образом. Из дальнейшего будет ясно, что результат не зависит от конкретного выбора. Теперь будем считать, что $f_n(x)$ суть не что иное, как выбранные представители элементов f_n. По определению фундаментальной последовательности имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \ \ \|f_n(x) - f_m(x))\|_1 < \varepsilon. \tag{1}$$

Положим $N_0 = 0$. Далее при каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $N_k = N\left(\frac{1}{2^k}\right)$ в смысле (1). Нетрудно видеть, что при каждом $k \in \mathbb{N}$

$$f_{N_k} = f_{N_0} + (f_{N_1} - f_{N_0}) + \ldots + \left(f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right). \tag{2}$$

С другой стороны, в силу выбора N_k имеем при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\|f_{N_0}\|_1 + \|f_{N_1} - f_{N_0}\|_1 + \ldots + \left\|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right\|_1 \leqslant \|f_{N_0}\|_1 + \|f_{N_1} - f_{N_0}\|_1 + 1,$$

откуда

$$\int_\Omega \left|f_{N_0} + (f_{N_1} - f_{N_0}) + \ldots + \left(f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right)\right| d\mu < C.$$

Тогда по теореме Беппо Леви ряд

$$|f_{N_0}| + |f_{N_1} - f_{N_0}| + \ldots + \left|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right| + \ldots$$

сходится почти всюду на Ω к некоторой функции $\tilde{f}(x)$, причём $\int_\Omega \tilde{f}(x)\, d\mu \leqslant C$. Следовательно, то же верно для ряда

$$f_{N_0} + (f_{N_1} - f_{N_0}) + \ldots + \left(f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right) + \ldots. \tag{3}$$

Обозначив сумму последнего через $f(x)$, с учётом (2) мы можем написать, что

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{N_k}(x), \tag{4}$$

где предел существует почти всюду. (В остальных точках доопределим функцию $f(x)$ нулём.) При этом в силу очевидной оценки $|f(x)| \leqslant \tilde{f}(x)$ и свойств интеграла Лебега получаем, что $\int_\Omega |f(x)|\, d\mu \leqslant C$ и, тем самым, $f(x) \in L^1(\Omega)$.

Итак, мы построили подпоследовательность $\{f_{N_k}\}$ исходной последовательности $\{f_n\}$, сходящуюся почти всюду к некоторой функции $f(x) \in L^1(\Omega)$. Теперь наша задача показать, что $f_n \to f$ по норме пространства $L^1(\Omega)$. Очевидно, достаточно доказать лишь, что $f_{N_k} \to f$ в $L^1(\Omega)$, поскольку для фундаментальной последовательности сходимость некоторой её подпоследовательности гарантирует сходимость всех последовательности к тому же пределу.

Заметим, что в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$, а следовательно, и её подпоследовательности $\{f_{N_k}\}$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall m, n \geqslant K(\varepsilon)\ \int_\Omega |f_{N_m} - f_{N_l}|\, d\mu < \varepsilon. \tag{5}$$

Воспользовавшись теоремой Фату, перейдём в (5) к пределу при $l \to \infty$. Тогда получим, что при всех $m > K(\varepsilon)$ в смысле (5)

$$\int_\Omega |f_{N_m} - f|\, d\mu \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

А это означает не что иное, как сходимость $f_{N_k} \to f$ в $L^1(\Omega)$.

Теперь ясно, что исходный выбор представителей не мог повлиять на сходимость почти всюду ряда (3); соотношение (4) также выполнялось бы почти всюду; наконец, в соотношениях (5) и (6) также ничего бы не поменялось, кроме значений подынтегральных функций на множествах меры нуль.

Итак, для случая $p = 1$ теорема доказана.

Замечания. 1. В данной ситуации нам было безразлично, конечна или бесконечна мера множества Ω. 2. Попутно мы доказали, что из последовательности, фундаментальной по норме $L^1(\Omega)$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω.

II. $p = \infty$. По-прежнему начнём с выбора функций $f_n(x)$ — представителей элементов $f_n \in L^\infty(\Omega)$. Далее, вспомним, что если $g \in L^\infty(\Omega)$, то

$$\mu\left(\{x \in \Omega \mid |g(x)| > \|g\|_\infty\}\right) = 0.$$

С учётом этого можно утверждать, что $\mu(\Omega_{nm}) = 0$, где

$$\Omega_{nm} = \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Положим теперь $\Omega^* = \Omega \setminus \cup_{n,m=1}^\infty \Omega_{nm}$. Очевидно, что $\mu\left(\cup_{n,m=1}^\infty \Omega_{nm}\right) = 0$ и что на множестве Ω^* последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon), \forall x \in \Omega^*\ \ |f_n(x) - f_m(x))| < \varepsilon. \tag{7}$$

Но из (7) следует равномерная сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ на Ω^*, причём для предельной функции $f(x)$ верно: $\sup_{x\in\Omega^*}|f(x)| \leqslant \sup_{n\in N}\|f_n\|_\infty$, поэтому $f(x) \in L^\infty(\Omega)$. Далее, переходя в (7) к пределу при $n \to \infty$ при фиксированном n, получим:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\;\;\forall n > N(\varepsilon), \forall x \in \Omega^*\;\;|f_n(x) - f(x))| \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Поскольку после доопределения функции $f(x)$ на $\Omega \setminus \Omega^*$ произвольным образом условие (8) не нарушается, мы получаем, что $f_n \to f$ в $L^\infty(\Omega)$.

Осталось лишь заметить, что любой другой выбор представителей не повлияет на результат.

Теперь теорема доказана и для случая $p = \infty$.

III. $p \in (1; +\infty)$. В этой случае, в отличие от предыдущих, придётся рассмотреть отдельно множества Ω конечной и бесконечной меры.

А. $\mu(\Omega) < +\infty$. Тогда для всех $g \in L^p(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_\Omega |g|\,d\mu = \int_\Omega |g|\cdot 1\,d\mu \leqslant \|g\|_p \cdot \left(\int_\Omega 1\,d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_p \cdot (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p'}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Следовательно, все элементы $f_n \in L^p(\Omega)$ принадлежат также пространству $L^1(\Omega)$ и, более того, из фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ по норме пространства $L^p(\Omega)$ следует её фундаментельность по норме $L^1(\Omega)$. Поэтому (как и прежде, начав с выбора представителей), в силу доказанного в I мы получим функцию $f(x) \in L^1(\Omega)$ такую, что $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Заметим теперь, что полученная функция принадлежит также пространству $L^p(\Omega)$. Действительно, поскольку фундаментальная последовательность ограничена, то для $C \equiv \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|^p \geqslant 0$ имеем

$$\int_\Omega |f_{N_k}|^p\,d\mu \leqslant C,$$

где $\{f_{N_k}\}$ — почти всюду сходящаяся к f подпоследовательность, выбранная из $\{f_n\}$ согласно I. Но тогда по теореме Фату получаем $\int_\Omega |f|^p\,d\mu \leqslant C$, т. е. $f \in L^p(\Omega)$. Осталось лишь доказать, что $\|f_n - f\|_p \to 0$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу фундаментельности последовательности $\{f_{N_k}\}$ получаем, что

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists K(\varepsilon) > 0\;\;\forall l, m > K(\varepsilon)\;\int_\Omega |f_{N_l} - f_{N_m}|^p\,d\mu < \varepsilon.$$

Устремляя m к бесконечности, по теореме Фату получаем, что при тех же $l > K(\varepsilon)$ верно неравенство $\int_\Omega |f_{N_l} - f|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon$. Поскольку это рассуждение можно провести для произвольного $\varepsilon > 0$, получаем

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists K(\varepsilon) > 0\,\forall l > K(\varepsilon)\;\int_\Omega |f_{N_l} - f|^p\,d\mu < \varepsilon,$$

т. е. $\|f_{N_k} - f\|_p \to 0$. Очевидно, вся исходная последовательность также стремится к f в $L^p(\Omega)$.

Б. Пусть $\mu(\Omega) = +\infty$ (но при этом мера на Ω σ-конечна). По определению σ-конечности меры на Ω получаем, что Ω может быть представлено в виде объединения измеримых подмножеств конечной меры:

$$\Omega = \sqcup_{q=1}^\infty \Omega_q, \quad \text{где} \quad \mu(\Omega_q) < +\infty, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, выберем представителей каждого элемента f_n и заметим к тому же, что сужения выбранных функций на каждое из Ω_q измеримы и принадлежат $L^p(\Omega_q)$. Более того, если $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\forall l, m > K(\varepsilon) \int_\Omega |f_l - f_m|^p \, d\mu < \varepsilon,$$

то очевидным образом при всех $l, m > K(\varepsilon)$ (где $K(\varepsilon)$ то же)

$$\forall l, m > K(\varepsilon) \int_{\Omega_q} |f_l - f_m|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

Поэтому согласно пункту A из $\{f_n(x)\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на Ω_1. Из неё можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на Ω_2. Продолжим этот процесс, а затем с помощью диагонального процесса выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду на всех Ω_q, т. е. сходящуюся почти всюду на Ω. Обозначим соответствующую предельную функцию через $f(x)$. Из пункта A следует, что $\|f_{n_k} - f\|_{L^p(\Omega_q)} \to 0$ при всех $q \in \mathbb{N}$. Тогда имеем при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega |f_{N_k}|^p \, d\mu \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|^p_{L^p(\Omega)},$$

откуда по теореме Фату

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|^p_{L^p(\Omega)},$$

т. е. $f \in L^p(\Omega)$.

Осталось доказать, что $\|f_{N_k} - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ (как и прежде, из этого будет следовать аналогичное утверждение для всей последовательности). Но это вытекает из теоремы Фату совершенно аналогично предыдущему случаю.

Замечание. Мы и для случая σ-конечной меры построили подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

Теорема доказана.

2. Неизоморфность пространств $(L^\infty)^*$ и L^1

Построим пример, показывающий, что в $(L^\infty(-1;1))^*$ есть элементы, не порождаемые ни одним элементом $L^1(-1;1)$. Для этого построим для $L^\infty(-1;1)$ некоторый аналог дельта-функции.

1) Очевидно, $C[-1;1] \subset L^\infty(-1;1)$. Уточним, что́ именно здесь можно утверждать. Нам важно, что если некоторый элемент $f \in L^\infty(-1;1)$ имеет непрерывный представитель $f_0(x) \in C[-1;1]$, то он не может иметь никакого другого непрерывного представителя. В самом деле, если бы существовал другой непрерывный представитель $f_1(x) \not\equiv f_0(x)$, то в силу теоремы об устойчивости знака непрерывной функции, применённой к $f_1(x) - f_0(x)$, мы бы получили, что $f_1(x)$ отличается от $f_0(x)$ на некотором интервале, т. е. множестве заведомо положительной меры. Следовательно, $f_0(x)$ и $f_1(x)$ не эквивалентны и поэтому не могут быть представителями одного элемента из $L^\infty(-1;1)$.

2) Из доказанного выше следует, что на подпространстве $C[-1;1] \subset L^\infty(-1;1)$ корректно определён функционал

$$\langle F, f\rangle = f_0(0),$$

где f_0 — непрерывный представитель элемента f. Очевидно, такой функционал является линейным и непрерывным на подпространстве $C[-1;1]$ (его норма равна единице). Следовательно, *в силу теоремы Хана—Банаха* он может быть продолжен на всё пространство $L^\infty(-1;1)$ с сохранением нормы.

3) Докажем, что не существует $g \in L^1(-1;1)$ такого, что

$$\forall f \in L^\infty(-1;1) \quad \langle F, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,d\mu.$$

Достаточно доказать, что такое представление функционала F невозможно даже на подпространстве $C[-1;1]$. Для доказательства от противного рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} nx+1, & x \in \left[-\frac{1}{n}; 0\right], \\ -nx+1, & x \in \left[0; \frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in [-1;1] \setminus \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_n \in C[-1;1]$ и что при всех n верно $\langle F, f_n\rangle = 1$. Заметим также, что при всех n имеют место неравенства $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$.

Тогда в силу свойств интеграла Лебега имеем

$$1 = |1| = \left|\int_{-1}^{1} f_n(x)g(x)\,d\mu\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)g(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)g(x)|\,d\mu \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |g(x)|\,d\mu \to 0,$$

где предельное соотношение вытекает из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Полученное противоречие доказывает невозможность существования $g(x) \in L^1(-1;1)$ с указанным свойством.

3. Некоторые примеры

1. Хорошо известно, что при $\mu(\Omega) < +\infty$ для $p > q$ имеет место вложение $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Следовательно, при $\mu(\Omega) < +\infty$ для каждой конкретной измеримой функции $f(x)$ множества

$$P_1 = \{p \in [1;+\infty] \mid f(x) \in L^p(\Omega)\}, \quad P_2 = \{p \in [1;+\infty] \mid f(x) \notin L^p(\Omega)\},$$

если они оба не пусты, «следуют» одно за другим на числовой оси, и граница между ними состоит из одной точки α. Покажем, что возможно как $\alpha \in P_1$, так и $\alpha \in P_2$.

Положим $\Omega = \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $\alpha > 1$. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}} \ln^{\frac{2}{\alpha}} x}.$$

Очевидно, что $f_1 \in L^p\left(0;\frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in [1;\alpha)$, $f_1 \notin L^p\left(0;\frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in [\alpha;+\infty]$. Несложно показать, что $f_2 \in L^p\left(0;\frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in [1;\alpha]$, $f_2 \notin L^p\left(0;\frac{1}{2}\right)$ при всех $p \in (\alpha;+\infty]$. (При $p=\alpha$ делаем замену переменных в интеграле, а при остальных p пользуемся тем фактом, что $\lim_{x\to+0} x^\varepsilon |\ln x|^\gamma = 0$ при всех $\varepsilon, \gamma > 0$, и признаком сравнения несобственных интегралов.)

2. Покажем, что, вообще говоря,

$$L^\infty(\Omega) \neq \cap_{p\geqslant 1} L^p(\Omega)$$

даже при $\mu(\Omega) < +\infty$.

Действительно, $\ln x \in L^p(0;1)$ при всех $p \geqslant 1$ (поскольку $|\ln x|$ растёт медленнее любой степени), но $\ln x \notin L^\infty(0;1)$, поскольку данная функция не может быть сделана ограниченной на $(0;1)$ переопределением на множестве меры ноль.

3. Если $f(x) \in L^p(a;b)$, где $p > 1$, то $F(x) \equiv \int_a^x f(t)\,d\mu$ — гёльдерова функция.

В самом деле,

$$\begin{aligned}|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,d\mu\right| \leqslant \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,d\mu \leqslant \\ \leqslant \left(\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} |x_2 - x_1|^{\frac{1}{p'}} \leqslant \|f\|_{L^p(a;b)} |x_2 - x_1|^{\frac{1}{p'}},\end{aligned}$$

где, как обычно, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Итак, F гёльдерова с показателем $0 < \frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p} < 1$ и константой $\|f\|_{L^p(a;b)}$.

Замечание. Полезно соотнести с этим примером наблюдение, сделанное в конце лекции 2а: не всякая абсолютно непрерывная функция гёльдерова. С другой стороны, не всякая L^1-функция f принадлежит L^p с $p > 1$. Поэтому неудивительно, что первообразная L^1-функции «всего лишь» абсолютно непрерывна (см. лекцию 2), а первообразная L^p-функции «уже» гёльдерова, что (см. лекцию 2а) является более сильным условием.

4. Элементы нелинейного анализа в пространствах Лебега: оператор Немыцкого

1. Пусть $\mu(\Omega) < +\infty$. Пусть функция $f(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:
1) при μ-почти всех фиксированных $x \in \Omega$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}$;
2) при всех фиксированных $s \in \mathbb{R}$ измерима по x на Ω.
(Такие функции называются *функциями Каратеодори.*)

Определим (нелинейный) оператор N_f, ставящий в соответствие каждой функции $u(x)$, определённой на Ω, функцию $F(x) \equiv f(x, u(x))$. Такой оператор называется *оператором Немыцкого.* Можно показать, что при сформулированных условиях на функцию $f(x,s)$ оператор Немыцкого переводит измеримую функцию в измеримую. (Это непросто; см.: Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов.) Мы будем считать этот результат известным и рассмотрим ситуацию, когда на функцию $f(x,s)$ наложены следующие условия роста:

$$|f(x,s)| \leqslant a(x) + c|s|^{\frac{p}{q}}, \tag{9}$$

где $a(x) \geqslant 0$, $a(x) \in L^q(\Omega)$, $p, q \geqslant 1$, но никакой связи между p, q не предполагается.

При сформулированных условиях оператор Немыцкого N_f переводит каждую функцию $u(x) \in L^p(\Omega)$ в функцию $F(x) \in L^q(\Omega)$. Для доказательства выпишем следующую цепочку:

$$\left(\int_\Omega |F(x)|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega |f(x, u(x))|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_\Omega \left|a(x) + c|u(x)|^{\frac{p}{q}}\right|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega a(x)^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega c^q |u(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|a\|_q + c\|u\|_p^{\frac{p}{q}},$$

где мы воспользовались неравенством Минковского. Заметим, что попутно доказано следующее: если семейство функций $\{u(x)\}$ ограничено в $L^p(\Omega)$, то семейство их образов $\{N_f(u)(x)\}$ ограничено в $L^q(\Omega)$, т. е. оператор N_f ограничен. Однако, поскольку это нелинейный оператор, отсюда вовсе не следует его непрерывность, т. е. импликация

$$\|u_n - u\|_p \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \|N_f(u_n) - N_f(u)\|_q \to 0. \tag{10}$$

(На самом деле (10) верно, но это нужно доказывать отдельно.)

2. Рассмотрим оператор Немыцкого, порождённый функцией $f_1(x, s) = f(x, s)s$. Пусть $a(x) \in$ $\in L^t(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$ — произвольное, $p > 1$, $f(x, s)$ удовлетворяет условию роста (9). Подберём такие $t, r > 1$, что $F_1(x) \equiv N_{f_1}(u)(x) \in L^r(\Omega)$.

Имеем

$$\left(\int_\Omega |F_1(x)|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_\Omega \left|au + c|u|^{\frac{p+q}{q}} \, d\mu\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_\Omega |au|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} + c\left(\int_\Omega |u|^{\frac{p+q}{q}r} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_t \|u\|_p + c\left(\int_\Omega |u|^{\frac{p+q}{q}r} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Здесь мы сначала воспользовались неравенством Минковского, а затем — обобщённым неравенством Гёльдера, в котором

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t} + \frac{1}{p}.$$

Это было сделано с целью получить оценку первого слагаемого через $\|u\|_p$. Чтобы получить оценку второго слагаемого через эту же норму, можно, например, положить $r = \frac{pq}{p+q}$, тогда под интегралом во втором слагаемом будет не что иное, как $|u|^p$. Но тогда $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, а следовательно, $t = q$. Окончательно имеем тогда:

$$\left(\int_\Omega |F_1(x)|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \|a\|_q \|u\|_p + c\|u\|_p^{\frac{p+q}{q}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях $p \in [1; +\infty]$ функция $\frac{\sin x}{x}$ принадлежит пространству $L^p(1; +\infty)$?
2. При каких значениях $p \in [1; +\infty]$ функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ принадлежит пространству $L^p(0; 1)$?

3. Пусть $1 < \alpha < +\infty$. Привести пример функции, принадлежащей $L^p(0;+\infty)$ только при $p = \alpha$.

4. Пусть $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$. Построить функцию, принадлежащую $L^p(0;+\infty)$ в точности при $p \in (s;r)$.

5. Пусть $f(x) \in L^p(\Omega)$, $g(x) \in L^q(\Omega)$. Что можно сказать о принадлежности fg пространствам Лебега? Тот же вопрос для $f + g$. (Рассмотреть все случаи.)

6. Построить такую последовательность $\{f_n(x)\}$ ограниченных на $(0;1)$ функций, что $f_n(x) \to$ $\to 0$ поточечно, но $\|f_n\|_1 \to +\infty$.

7. 1) Пусть $p \in [1;+\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f_n \in L^p(\Omega)$, $\|f_n - f\|_p \to 0$, $g \in L^q(\Omega)$. Доказать, что $\|f_n g - fg\|_1 \to 0$.
2) Пусть $p \in [1;+\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f_n \in L^p(\Omega)$, $\|f_n - f\|_p \to 0$, $g_n \in L^q(\Omega)$, $\|g_n - g\|_q \to 0$. Доказать, что $\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0$.

8*. Доказать сепарабельность 1) $L^p(a;b)$; 2) $L^p(\mathbb{R})$ $(p < +\infty)$.

9. Пусть $f_n \to f$ в $L^\infty(\Omega)$. Верно ли, что:
1) $f_n \to f$ в $L^1(\Omega)$?
2) $f_n \to f$ почти всюду на Ω?
3) $f_n \to f$ по мере на Ω?

10. В каком месте не проходит рассуждение п. 2 для пространств $L^p(-1;1)$ с $p < +\infty$?

11. Верно ли, что если $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$, где $p > 1$, то $F(x) \equiv \int_0^x f(t)\,d\mu$ — гёльдерова функция на $\mathbb{R}$?

12*. Доказать, что оператор Немыцкого, порождённый функцией Каратеодори, переводит последовательность, сходящуюся по мере, в последовательность, сходящуюся по мере. (Кратко: оператор Немыцкого непрерывен относительно сходимости по мере.)