ЛЕКЦИЯ 6А

Пространства Лебега, продолжение

1. Неравенства Кларксона и равномерная выпуклость пространств Лебега

Неравенства Кларксона для функций $f, g \in L^p(X)$ имеют вид (с $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p, \quad p \in [2;+\infty),$$
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}, \quad p \in (1;2].$$

Мы приведём полный вывод первого неравенства.

0. Заметим, что для любых $a, b \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ верны неравенства

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r+b^r), \tag{0a; 0b}$$

откуда для $s \leqslant 1$

$$a^s + b^s \geqslant (a+b)^s. \tag{1}$$

Для доказательства неравенств $(0a)$ и $(0b)$ мы воспользуемся их однородностью и разделим все три выражения на a^r. (Случай $a=0$ тривиален.) Отношение $\frac{b}{a}$ снова обозначим символом b. С учётом этих рассуждений нам остаётся доказать неравенства

$$1 + b^r \leqslant (1+b)^r \leqslant 2^{r-1}(1+b^r). \tag{0a'; 0b'}$$

Очевидно, что неравенство $(0a')$ обращается в равенство при $b=0$ (найти эту точку можно, например, с помощью дифференцирования). Возьмём производные от левой и правой частей этого неравенства:

$$\frac{d}{db}(1+b^r) = rb^{r-1}, \quad \frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}.$$

Очевидно, что при $b \geqslant 0$, $r-1 \geqslant 0$ имеет место следующее неравенство, связывающее указанные производные:

$$rb^{r-1} \leqslant r(1+b)^{r-1}. \tag{2}$$

Поскольку при $b=0$ в $(0a')$ достигается равенство, то из (2) получаем неравенство $(0a')$ при всех $b \geqslant 0$.

Чтобы теперь доказать $(0b')$, заметим, что это неравенство обращается в равенство при $b=1$. Далее,

$$\frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}, \quad \frac{d}{db}2^{r-1}(1+b^r) = 2^{r-1}rb^{r-1}.$$

Достаточно показать, что

$$r(1+b)^{r-1} \geqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad r(1+b)^{r-1} \leqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1,$$

или
$$(1+b)^{r-1} \geqslant 2^{r-1}b^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad (1+b)^{r-1} \leqslant 2^{r-1}b^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1.$$
Но это следует из очевидных неравенств
$$1+b \geqslant 2b \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad 1+b \leqslant 2b \quad \text{при} \quad b \geqslant 1$$
в силу $r-1 \geqslant 0$. Таким образом, неравенства $(0a; 0b)$ полностью доказаны.

Далее, неравенство (1) следует из $(0a)$, если в последнем в качестве a, b, r взять соответственно a^s, b^s, $\frac{1}{s}$.

1. Теперь докажем, что для всех комплексных α, β и всех $p \geqslant 2$ верно неравенство
$$(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$
Это имеет место в силу легко проверяемого равенства параллелограмма
$$\left(|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
и неравенства
$$(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p)^{\frac{2}{p}} \leqslant |\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2,$$
которое получается, если положить в (1) $a = |\alpha+\beta|^p$, $b = |\alpha-\beta|^p$, $s = \frac{2}{p}$.

2. Возводя (3) в положительную степень p и пользуясь далее (0b) с $r = \frac{p}{2} \geqslant 1$, имеем:
$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant 2^{\frac{p}{2}} \cdot 2^{\frac{p}{2}-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right) = 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right),$$
откуда следует
$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right), \tag{4}$$
где, напоминаем, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $p \geqslant 2$.

3. Переписав теперь только что полученное числовое неравенство (4) в виде
$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p, \tag{5}$$
положив при каждом $x \in X$ $\alpha = f(x)$, $\beta = g(x)$ и проинтегрировав по области X, получим первое неравенство Кларксона.

Для вывода второго неравенства Кларксона используется обратное неравенство Минковского (см., напр.: С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988, с. 17) и следующее числовое неравенство, доказательство которого мы здесь не приводим:
$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^q + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^q \leqslant \left(\frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{6}$$
где по-прежнему $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, но теперь $p \in (1; 2]$.

В целях удобства записи будем пользоваться стандартным обозначением

$$\|f\|_u \equiv \left(\int_X |f(x)|^u \, d\mu\right)^{\frac{1}{u}}$$

даже при $u \in (0;1)$, хотя в последнем случае эта величина, конечно, нормой не является (см. обратное неравенство Минковского). Тогда для любой функции $h \in L^p(X)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\||h|^q\|_{p-1} = \left(\int_X |f(x)|^{q(p-1)} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int_X |h(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{q}{p}} = \|h\|_p^q. \tag{7}$$

В силу (7), обратного неравенства Минковского и (6) получим:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q = \left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_X \left[\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right]^{p-1} d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_X \left[\frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p\right] d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{2}\|f\|^p + \frac{1}{2}\|g\|^p\right)^{q-1},$$

что и доказывает второе неравенство Кларксона.

4. Теперь убедимся в том, что из неравенств Кларксона следует равномерная выпуклость пространств $L^p(X)$ при $p > 1$.

Вначале напомним определение равномерной выпуклости. Банахово пространство B называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ и $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{8}$$

Легко видеть, что что при $p \geqslant 2$ из первого неравенства Кларксона, записанного в виде

$$\|f+g\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) - \|f-g\|_p^p,$$

при $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_p \leqslant 1$, $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$ имеем

$$\|f+g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2(1 - \delta_1(\varepsilon))$$

при $\delta_1(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} > 0$, т. е. (8). Далее, при $p \leqslant 2$ из второго неравенства получаем при $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_p \leqslant 1$, $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$

$$\|f+g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} = 2(1 - \delta_2(\varepsilon))$$

с $\delta_2(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} > 0$, т. е. (8).

2. Элементы нелинейного анализа в пространствах Лебега: нелинейный сжимающий оператор

Рассмотрим в области Ω с $\mu(\Omega) < +\infty$ интегральное уравнение вида

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int_\Omega K(x,s) \frac{|u(s)|}{1+|u(s)|}\, ds, \tag{9}$$

где $K(x,s)$ ограничена в $\Omega \times \Omega$ и измерима по s при всех $x \in \Omega$, $u_0(x) \in L^1(\Omega)$.

Существование и единственность его решения в $L^1(\Omega)$ «при малых» λ легко доказать, воспользовавшись принципом сжимающих отображений. Действительно, если

$$(Au)(x) \equiv u_0(x) + \lambda \int_\Omega K(x,s) \frac{|u(s)|}{1+|u(s)|}\, ds,$$

то при $z_i(x) = (Au_i)(x)$, $i = 1, 2$, $K_0 = \sup_{\Omega\times\Omega} |K(x,s)|$ имеем

$$\begin{aligned}
\|z_1 - z_2\|_1 &= \int_\Omega dx \left| \lambda \int_\Omega K(x,s) \frac{|u_1(s)|}{1+|u_1(s)|}\, ds - \lambda \int_\Omega K(x,s) \frac{|u_2(s)|}{1+|u_2(s)|}\, ds \right| = \\
&= |\lambda| \int_\Omega dx \left| \int_\Omega K(x,s) \left(\frac{|u_1(s)|}{1+|u_1(s)|} - \frac{|u_2(s)|}{1+|u_2(s)|} \right) ds \right| \leqslant \\
&\leqslant |\lambda| \int_\Omega dx \int_\Omega |K(x,s)| \left| \frac{|u_1(s)|}{1+|u_1(s)|} - \frac{|u_2(s)|}{1+|u_2(s)|} \right| ds \leqslant \\
&\leqslant |\lambda| K_0 \int_\Omega dx \int_\Omega |u_1(s) - u_2(s)|\, ds = |\lambda| K_0 \|u_1 - u_2\|_1 \mu(\Omega).
\end{aligned}$$

Мы использовали здесь легко проверяемое непосредственно неравенство

$$\left| \frac{|a|}{1+|a|} - \frac{|b|}{1+|b|} \right| \leqslant |a-b|.$$

Очевидно, при $|\lambda| < \frac{1}{K_0 \mu(\Omega)}$ отображение A является сжимающим, что гарантирует существование и единственность решения $u(x) \in L^1(\Omega)$ уравнения (9) при каждом из указанных λ.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать (на контрпримерах), что пространства $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ не являются строго выпуклыми (и тем более равномерно выпуклыми). Вычислить для функций f, g, использованных в ваших примерах, величины $\|f+g\|_2$, $\|f-g\|_2$, $\|f\|_2$, $\|g\|_2$.

2. Сформулировать и доказать утверждения о разрешимости уравнения (9) в $L^\infty(\Omega)$ и $C(\Omega)$.

3. 1) Сформулировать и доказать какие-либо условия разрешимости для уравнения типа Вольтерра

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) \frac{|u(s)|}{1+|u(s)|}\, ds.$$

2*) В каком случае оно будет эквивалентно задаче Коши для дифференциального уравнения (понимаемого в классическом смысле)?