ЛЕКЦИЯ 7А

Слабая сходимость, дальнейшие факты

1. Примеры и контрпримеры

Определение. Множество M в банаховом пространстве B называется *слабо замкнутым*, если из $x_n \rightharpoonup x$, $\{x_n\} \subset M$ следует $x \in M$. (Иными словами, речь идёт о замкнутости в смысле слабой сходимости.)

Обсудим связь между замкнутостью множества в банаховом пространстве и его слабой замкнутостью.

1. Всякое слабо замкнутое множество замкнуто. Действительно, пусть M — слабо замкнутое множество в банаховом пространстве и $x_n \to x$. Тогда имеем $x_n \rightharpoonup x$, отсюда в силу условия слабой замкнутости $x \in M$, т. е. M — замкнутое множество.

2. Обратное неверно: не всякое замкнутое множество слабо замкнуто. Действительно, сфера $S_1 = \{x \mid \|x\| = 1\}$ в гильбертовом пространстве замкнута как прообраз замкнутого множества $\{1\}$ на числовой оси при отображении, осуществляемой непрерывной функцией «норма». Однако S_1 не является слабо замкнутым множеством, поскольку, как известно, $e_n \rightharpoonup \theta$ (здесь и далее, если речь идёт о гильбертовом пространстве, e_n — элементы ортонормированного базиса), но $\theta \notin S_1$.

3. Замкнутое подпространство является слабо замкнутым. В самом деле, пусть L — (замкнутое) подпространство банахова пространства B, $\{x_n\} \subset L$, $x_n \rightharpoonup x$. Докажем, что $x \in L$. Действительно, в противном случае по одному из следствий из теоремы Хана—Банаха существовал бы функционал $f \in L^*$, для которого $\|f\|_* = 1$, $f|_L = 0$, $\langle f, x \rangle = \|x\| \neq 0$. Тогда в силу слабой сходимости имели бы $0 = \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \neq 0$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Обсудим теперь некоторые случаи, которые могут возникнуть, когда не выполнено то или иное условие критерия сильной сходимости в равномерно выпуклых банаховых пространствах.

Например, может случиться так, что $u_n \rightharpoonup u$, $\|u_n\| \to C \neq \|u\|$.

4. Так будет при $u_n = e_n$ в гильбертовом пространстве: $u_n \rightharpoonup \theta$, $\|u_n\| \to 1 \neq \|\theta\|$.

5. Можно привести другой пример: пусть $B = L^2(\mathbb{R})$, $u_n = \chi_{[n;n+1]}(x)$. Тогда, очевидно, $\|u_n\| = 1$. При этом $u_n \rightharpoonup 0$. В самом деле, в силу изоморфизма L^2 и $(L^2)^*$ достаточно показать, что при всех $v \in L^2(\mathbb{R})$ верно $(v, u_n) \to 0$. Имеем

$$\begin{gathered}(v, u_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) u_n(x)\, dx = \int_n^{n+1} v(x) u_n(x)\, dx \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int_n^{n+1} |u_n(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx} \cdot 1 = \sqrt{\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx}.\end{gathered} \tag{1}$$

Поскольку

$$\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx,$$

в силу необходимого условия сходимости рядов имеем $\int_n^{n+1} |v(x)|^2\,dx \to 0$, откуда в силу (1) заключаем, что $u_n \rightharpoonup 0$.

6. Заменив в каждом из предыдущих примеров u_{2k} на $\frac{1}{2}u_{2k}$, получим: $u_n \rightharpoonup \theta$, $\{\|u_n\|\}$ не имеет предела.

7. Можно привести и обратный пример: $\|u_n\| \to C$, но при этом $\{u_n\}$ не является слабо сходящейся последовательностью. Пусть, например, $x_0 \in H$ — некоторый ненулевой элемент гильбертова пространства H. Положим $u_n = (-1)^n(x_0 + e_n)$. Тогда, очевидно, $u_{2k} \rightharpoonup x_0$, $u_{2k+1} \rightharpoonup -x_0$, что исключает возможность сходимости всякой числовой последовательности $\{\langle f, u_n\rangle\}$, если только $\langle f, x_0\rangle \neq 0$. Что же касается сходимости норм, имеем

$$\|u_n\|^2 = \|x_0\|^2 + \|e_n\|^2 + 2(x_0, e_n) = \|x_0\|^2 + 1 + 2(x_0, e_n) \to \|x_0\|^2 + 1.$$

Замечание. Мы говорим «не является слабо сходящейся», а не «не имеет слабого предела», потому что одним из возможных определений слабой сходимости является просто требование существования предела числовой последовательности $\{\langle f, u_n\rangle\}$ для всякого $f \in B^*$. Это, вообще говоря, ещё не гарантирует существования такого элемента u, что $\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$ при всех $f \in B^*$. (См. Иосида. Функциональный анализ. Глава V.)

2. Связь сильной и слабой сходимости: частный случай теоремы Мазура

8. Пусть $x_n \rightharpoonup x$ — слабо сходящаяся последовательность элементов гильбертова пространства H. Докажем, что из неё можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой

$$\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right) \to x \quad \text{при } k \to \infty.$$

Рассмотрим сначала случай $x = \theta$. Положим $n_1 = 1$. Поскольку в силу условия слабой сходимости данной последовательности имеем $(x_n, x_{n_1}) \to 0$, то найдётся такое $n_2 > n_1$, что $|(x_{n_2}, x_{n_1})| \leqslant 1$. Далее, по аналогичной причине существует такое $n_3 > n_2$, что $|(x_{n_3}, x_{n_1})| \leqslant \frac{1}{2}$, $|(x_{n_3}, x_{n_2})| \leqslant \frac{1}{2}$. Продолжая эту процедуру далее, на каждом k-ом шаге построим такое $n_{k+1} > n_k$, что

$$|(x_{n_{k+1}}, x_{n_1})| \leqslant \frac{1}{k}, \ldots, |(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Заметим также, что в силу слабой сходимости последовательности $\{x_n\}$ можно утверждать её ограниченность: $\|x_n\| < C$. Имеем теперь

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right)\right\|^2 &= \frac{1}{k^2}\left[\sum_{i=1}^{k}\|x_{n_i}\|^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}(x_{n_s}, x_{n_i})\right] \leqslant \\
&\leqslant \left[kC^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}\frac{1}{s-1}\right] = \left[kC^2 + 2\sum_{s=2}^{k}\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{s-1}\right] = \\
&= \frac{1}{k^2}\left[kC^2 + 2\sum_{s=2}^{k}\frac{s-1}{s-1}\right] \leqslant \frac{C^2+2}{k} \to 0,
\end{aligned}$$

где в первом неравенстве мы учли оценку (2), а затем поменяли порядок суммирования в двойной сумме (рекомендуется сделать рисунок, поясняющий это изменение порядка). Таким образом,

$$\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right) \to 0.$$

Для рассмотрения общего случая следует применить только что доказанный результат к последовательности $\{y_n\} \equiv \{x_n - x\}$.

Утверждение доказано.

Замечание. Это утверждения является частным случаем теоремы Мазура: если $x_n \rightharpoonup x$ в банаховом пространстве B, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такая их выпуклая комбинация

$$y_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1,$$

что $\|x - y_k\| \leqslant \varepsilon$. (См. Иосида. Функциональный анализ. Глава V.)

Это утверждение представляет интерес с точки зрения задач математической физики. В самом деле, если удаётся установить ограниченность последовательности $\{v_n\}$ приближённых решений (например, полученных по методу Галёркина), то в силу соответствующих теорем для сепарабельного или рефлексивного пространства устанавливается существование её слабо сходящейся подпоследовательности $v_{n_k} \rightharpoonup v$, а в силу упомянутого факта можно построить последовательность выпуклых комбинаций элементов $\{v_{n_k}\}$, сильно сходящуюся к тому же пределу v. Это полезно, в частности, тем, что свойства элементов последовательности $\{v_{n_k}\}$, инвариантные относительно образования выпуклой комбинации и предельного перехода (например, свойства гладкости или знакоопределённости), окажутся доказанными и для v, которое в типичной ситуации и будет точным решением.

3. Пространство l^1. Свойство Шура

Как мы помним, $(l^1)^* = m \equiv l^\infty$.

9. Докажем, что в l^1 покоординатная сходимость слабее слабой сходимости. Для этого приведём пример последовательности $x^{(k)}$, не являющейся слабо сходящейся, но обладающей свойством покоординатной сходимости. (Здесь и далее по тексту верхний индекс будет означать номер элемента пространства, нижний — номер элемента числовой последовательности, образующей элемент пространства).

Положим

$$x^{(k)} = \Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{k}, 0, 0, \ldots\Big).$$

Очевидно:

1) при всех $k \in \mathbb{N}$ $\|x^{(k)}\| = 1$,

2) имеем место *покоординатная* сходимость последовательности $\{x^{(k)}\}$ к нулевому элементу.

Покажем, что $\{x^{(k)}\}$ не сходится даже слабо (не говоря уже о сильной сходимости).

В самом деле, предположим противное: пусть $x^{(k)} \rightharpoonup x$. Тогда, положив

$$f_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots) \in l^\infty$$

(заметим, что эти элементы нельзя называть базисными: в l^∞ не может существовать счётного базиса!), получим, что x заведомо является покоординатным пределом последовательности $\{x^{(k)}\}$. Таким образом, с необходимостью $x = \theta$. Далее, положим $f = (1, 1, \ldots) \in l^\infty$. Легко видеть, что $\langle f, x^{(k)} \rangle = 1 \to 1 \neq \langle f, \theta \rangle$, т. е. наше предположение о слабой сходимости привело к противоречию.

10. Пространство l^1 интересно так называемым *свойством Шура* — в нём сильная и слабая сходимость равносильны. (Таким образом, *не только конечномерные* пространства могут обладать свойством Шура.) Докажем это интересное свойство методом «от противного».

Итак, пусть $x^{(n)} \rightharpoonup x$. Аналогично п. 8 заменяя при необходимости $x^{(n)}$ на $x^{(n)} - x$, можно ограничиться рассмотрением случая $x = \theta$. В этом случае, как показано в предыдущем примере, последовательность $\{x^{(n)}\}$ заведомо обладает свойством покоординатной сходимости к нулю. Предположим теперь, что $x^{(n)} \not\to \theta$. В таком случае имеется подпоследовательность $x^{(n_\alpha)}$, отграниченная от нуля, т. е. существует такое $M > 0$, что при всех $\alpha \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\|x^{(n_\alpha)}\| \geqslant M. \tag{3}$$

С другой стороны, естественно,

$$\|x^{(n_\alpha)}\| < +\infty, \tag{4}$$

поскольку $x^{(n_\alpha)} \in l^1$. Теперь наша цель состоит в том, чтобы извлечь из $x^{(n_\alpha)}$ подпоследовательность $x^{(n_{\alpha_k})}$, не обладающую свойством слабой сходимости к θ.

Положим $\alpha_1 = 1$ и заметим, что в силу (3) и (4) найдётся такое m_1, что

$$\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_1})}| < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_1})}| \geqslant \frac{4}{5} M.$$

Однако в силу свойства покоординатной сходимости к нулю имеем $x_i^{(n_\alpha)} \to 0$ при $\alpha \to \infty$ для всех i (напоминаем, i — номер «координаты» элемента), поэтому найдётся такое $\alpha_2 > \alpha_1$, что $\sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}$. (Здесь m_1 ранее зафиксировано!) Тогда $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| > \frac{9}{10} M$ и найдётся такое $m_2 > m_1$, что

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| \geqslant \frac{4}{5} M, \quad \sum_{i=m_2+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}.$$

Продолжая эту процедуру аналогичным образом, построим строго возрастающие последовательности $\{m_k\}$ (где $m_0 = 0$), $\{\alpha_k\}$, для которых верно:

$$\sum_{i=1}^{m_{k-1}} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| \geqslant \frac{4}{5} M, \quad \sum_{m_k+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| < \frac{M}{10}. \tag{5}$$

Введём теперь в рассмотрение функционал $f = (c_1, c_2, \ldots)$, где c_j выберем по следующему принципу. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдём такое k, что $m_{k-1} \leqslant j \leqslant m_k$ (оно существует, поскольку в силу нашего построения целые неотрицательные числа m_k образуют возрастающую последовательность) и положим

$$c_j = \operatorname{sgn} x_j^{(n_{\alpha_k})}. \tag{6}$$

Очевидно, $f \in l^\infty$. Имеем теперь с учётом (5), (6)

$$\begin{aligned}\langle f, x^{(n_{\alpha_k})}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} \geqslant \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} \left|x_i^{(n_{\alpha_k})}\right| - \sum_{i=m_k+1}^{\infty} \left|x_i^{(n_{\alpha_k})}\right| \geqslant \\ \geqslant \frac{4}{5}M - \frac{M}{10} - \frac{M}{10} = \frac{3}{5}M,\end{aligned}$$

т. е. $\langle f, x^{(n_{\alpha_k})}\rangle \not\to 0$ и $x^{(n_{\alpha_k})} \not\rightharpoonup \theta$, а следовательно, и $x^{(n)} \not\rightharpoonup \theta$.

Утверждение доказано.

Рекомендуется сделать рисунок, иллюстрирующий выбор подпоследовательностей и оценки отрезков сумм.

Замечание. Может показаться, что мы вывели сильную сходимость из покоординатной, что было бы очень странно с учётом предыдущего примера. На самом деле, конечно, это не так: мы существенно использовали специально построенный функционал f, отличный от «координатных» функционалов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Возможно ли существование последовательности $\{u_n\}$, для которой $u_n \rightharpoonup \theta$, $\|u_n\| \to \infty$?

2. Доказать, что последовательность в банаховом пространстве может иметь не более одного слабого предела.

3. Пусть $A \in \mathfrak{L}(B_1, B_2)$ (ограниченный линейный оператор, определённый на всём B_1), где B_1, B_2 — банаховы пространства. Доказать, что A непрерывен и в смысле слабой сходимости, т. е. если $x_n \rightharpoonup x$ в B_1, то $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в B_2.

4. Пусть $A \in \mathfrak{L}(B_1, B_2)$ и замыкание образа единичного шара $\{x \in B_1 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ компактно в B_2. (Такие линейные операторы называются *вполне непрерывными.*) Доказать, что A преобразует слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, т. е. если $x_n \rightharpoonup x$ в B_1, то $Ax_n \to Ax$ в B_2.

5. Доказать, что всякое выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве слабо замкнуто. (Заметим, что отсюда сразу же следует слабая замкнутость (замкнутого) подпространства, которую мы установили непосредственно.)

6*. Пусть X — сепарабельное линейное нормированное пространство. Доказать, что в X^* существует счётное множество, всюду плотное в смысле $*$-слабой сходимости.