ЛЕКЦИИ 8А—9А

Пространство $\mathcal{D}'$, продолжение

5. Линейная замена переменной

Для введения операции линейной (точнее, аффинной) замены переменной, как и прежде, воспользуемся принципом продолжения с множества регулярных обобщённых функций с бесконечно гладким представителем.

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — регулярная обобщённая функция с представителем $f_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда при всяком $a > 0$ имеем для $g(x) = f_0(ax+b)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\int_{\mathbb{R}^1} g(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(ax+b)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,dt = \frac{1}{a}\left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle,$$

а при всяком $a < 0$

$$\int_{\mathbb{R}^1} g(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(ax+b)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f_0(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,dt = \frac{1}{|a|}\left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle.$$

Итак, при всех $a \neq 0$ для указанного типа регулярных обобщённых функций имеет место равенство

$$\langle g(x), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle.$$

Это позволяет ввести

Определение 3. Пусть $f \equiv f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, $a \neq 0$. Тогда символом $f(ax+b)$ обозначим обобщённую функцию, действующую по правилу

$$\langle f(ax+b), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle.$$

Именно в этом смысле и следует понимать «аргумент» обобщённой функции.

Замечание 1. Тривиальную проверку того факта, что данное определение вводит функцию из $\mathcal{D}'$, оставляем слушателям.

1. Легко видеть, что при $a \neq 0$ имеем $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

В самом деле, согласно определению 3 имеем

$$\langle \delta(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle = \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

2. Упростим выражение $\langle \theta(ax), \varphi(x)\rangle$. Имеем при $a > 0$

$$\langle \theta(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \theta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \langle \theta(x), \varphi(x)\rangle,$$

при $a < 0$

$$\langle \theta(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \theta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle = \frac{1}{-a}\int_0^{-\infty} \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(-t)\,dt = \langle \theta(x), \varphi(-x)\rangle.$$

Итак, $\langle\theta(ax),\varphi(x)\rangle=\langle\theta(x),\varphi(x\operatorname{sgn}a)\rangle$.

В случае пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ при произвольном N имеем (A — матрица, x, y, b — столбцы)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(Ax+b)\varphi(x)\,dx_1\dots dx_N=\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))\left|\frac{D(x_1,\dots,x_N)}{y_1,\dots,y_N}\right|\,dy_1\dots dy_N=$$
$$=|\det A^{-1}|\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))dy_1\dots dy_N=\frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))dy_1\dots dy_N,$$

что мотивирует

Определение 3′. Пусть $f\equiv f(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, A — невырожденная матрица размера $N\times N$. Тогда символом $f(Ax+b)$ обозначим обобщённую функцию, действующую по правилу

$$\langle f(Ax+b),\varphi(x)\rangle=\frac{1}{|\det A|}\left\langle f(x),\varphi(A^{-1}(x-b))\right\rangle.$$

6. Сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$

Определение 4. Пусть $f_n, f\in\mathcal{D}'$. Тогда говорят, что $f_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}f$ при $n\to\infty$, если для любой основной функции $\varphi\in\mathcal{D}$ имеет место предельное соотношение

$$\langle f_n,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle,\quad n\to\infty.$$

Таким образом, речь идёт о $*$-слабой сходимости.

Аналогично говорят, что $f_\varepsilon\xrightarrow{\mathcal{D}'}f$ при $\varepsilon\to+0$, если если для любой основной функции $\varphi\in\mathcal{D}$ верно $\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ при $\varepsilon\to+0$.

3. Очевидно, с учётом определения 3 в силу финитности основных функций имеем

$$\delta(x-n)\to 0.$$

4. Рассмотрим так называемые *δ-образные семейства* (смысл названия скоро будет ясен)

$$\begin{gathered}1)\ f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, & |x|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon,\end{cases}\quad 2)\ f_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)},\quad 3)\ f_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}},\\ 4)\ f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon},\quad 5)\ f_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}.\end{gathered}\tag{1}$$

Во всех случаях имеем $f_\varepsilon\xrightarrow{\mathcal{D}'}\delta(x)$ при $\varepsilon\to+0$. Докажем это для примера 1). Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем для произвольной функции $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[\varphi(0)+\varphi'(x^*(x))x]\,dx=\frac{1}{2\varepsilon}\cdot 2\varepsilon\varphi(0)+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi'(x^*(x))x\,dx.$$

Таким образом,

$$|\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle-\varphi(0)|=\frac{1}{2\varepsilon}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi'(x^*(x))x\,dx\right|\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi'(x)|\cdot\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\,dx\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi'(x)|\cdot\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}\to 0,\quad\varepsilon\to+0.$$

Имеет смысл доказать более общее утверждение.

Лемма. Пусть:

1) функция $f(x)$ кусочно непрерывна на $\mathbb{R}^1$,

2) $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^1$,

3) $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,dx = 1$,

4) $f_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Тогда для регулярных обобщённых функций f_ε, задаваемых функциями $f_\varepsilon(x)$, верно предельное соотношение

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(x), \quad \varepsilon \to +0.$$

Замечание 2. Легко видеть, что лемма применима ко всем семействам (1), кроме 4). При этом в семействе 3) роль ε играет $\sqrt{\varepsilon}$.

Прежде чем перейти к доказательству леммы, опишем «на пальцах» его идею. Она состоит в том, что:

1) для каждой конкретной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ найдётся окрестность ω нуля, в которой её значение мало отличается от значения в нуле;

2) с другой стороны, найдётся такое ε_0, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ функции f_ε «сосредоточены» в выбранной окрестности нуля, т. е. их интеграл по этой окрестности «почти равен» единице, а интеграл по оставшемуся множеству «пренебрежимо мал», поэтому в сумме

$$\int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int_\omega f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^1\setminus\omega} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx$$

первое слагаемое мало отличается от $\varphi(0)$, а второе мало́.

Доказательство леммы. Сформулируем на языке «ε-δ», что, собственно, нужно доказать:

$$\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1),\ \forall\zeta > 0\ \ \exists\varepsilon_0(\varphi,\zeta) > 0\ \ \forall\varepsilon \in (0;\varepsilon_0(\varphi,\zeta))\quad \left|\int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \zeta. \qquad (2)$$

Заметим прежде всего, что при всех a, b верно равенство

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \qquad (3)$$

и, в частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = 1. \qquad (4)$$

Заметим теперь, что в силу равенства $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,dx = 1$

$$\forall\gamma \in (0;1)\ \ \exists R(\gamma) > 0\ \ \forall R' \geqslant R(\gamma)\ \ \int_{-R'}^{R'} f(x)\,dx \geqslant 1 - \gamma. \qquad (5)$$

Следовательно, при тех же R' в силу (3) верно

$$\int_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1 - \gamma. \qquad (6)$$

Пусть теперь нам заданы конкретные $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\zeta > 0$ и требуется построить $\varepsilon_0(\varphi, \zeta)$ (см. (2)).

Заметим, что в силу непрерывности основной функции $\varphi(x)$

$$\forall \eta > 0 \ \ \exists r(\varphi, \eta) > 0 \ \ \forall x \in [-r(\varphi, \eta); r(\varphi, \eta)] \ \ |\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \eta. \tag{7}$$

Положим $C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi(x)|$.

Найдём $\mu > 0$ такое, что

$$\mu|\varphi(0)| < \frac{\zeta}{4}.$$

(Если $\varphi(0) = 0$, то можно взять любое положительно число, в противном же случае достаточно положить $0 < \mu < \frac{\zeta}{4|\varphi(0)|}$.) Далее, положим (см. (5))

$$R = R\left(\gamma = \min\left\{\mu, \frac{\zeta}{2C}\right\}\right).$$

Тогда при всех $\varepsilon > 0$ и всех $R' \geqslant R$ имеем

$$\int_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1 - \mu, \quad \int_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1 - \frac{\zeta}{2C},$$

или, с учётом (4),

$$\int_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1 - \mu, \quad \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R'\varepsilon; R'\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \frac{\zeta}{2C}. \tag{8}$$

Далее, выберем (см. (7)) $r = r\left(\eta = \frac{\zeta}{4}\right)$ такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \frac{\zeta}{4} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant r, \tag{9}$$

и положим $\varepsilon_0(\varphi, \zeta) = \frac{r}{R}$. Тогда *при всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ будем иметь с учётом (8), (9)

$$\begin{aligned}
&|f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)| = \left|\int_{[-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int_{[-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)[\varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0))]\,dx + \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int_{[-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(0)\,dx - \varphi(0)\right| + \left|\int_{[-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx\right| + \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-R\varepsilon; R\varepsilon]} |f_\varepsilon(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi(x)| \leqslant \\
&\leqslant |\varphi(0)| \cdot |(1 - \mu) - 1| + \sup_{x \in [-R\varepsilon; R\varepsilon]} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int_{[-R\varepsilon; R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\,dx + C \cdot \frac{\zeta}{2C} \leqslant \\
&\leqslant |\varphi(0)|\mu + \frac{\zeta}{4} \cdot 1 + \frac{\zeta}{2} \leqslant \frac{\zeta}{4} + \frac{\zeta}{4} + \frac{\zeta}{2} = \zeta.
\end{aligned}$$

Это и доказывает требуемый результат (2).

Лемма доказана.

Замечание 3. Мы пользовались условием неотрицательности функции $f_\varepsilon(x)$ в оценках типа

$$\int_{A\subset\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\,dx, \quad \int_{A\subset\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \leqslant \int_{A\subset\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\sup_{x\in A}|\varphi(x)|\,dx.$$

Поэтому для рассмотрения примера 4) требуется либо сформулировать более общее утверждение, либо провести доказательство в частном случае непосредственно для $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}$.

Замечание 4. Удивительный факт состоит в том, что результат леммы имеет место, в частности, в том случае, когда $f(0) = 0$ и даже $\operatorname{supp} f \not\ni 0$, например, для $f(x) = 0{,}1\chi_{[90;100]}(x)$. Конечно, этим мы всецело обязаны свойству непрерывности основных функций (см. (7)).

5. $\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ при $k\to\infty$, где

$$\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \quad \left\langle \mathcal{P}\frac{\cos kx}{x},\varphi(x)\right\rangle \equiv \text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx.$$

Действительно, пусть фиксирована некоторая произвольная основная функция $\varphi(x)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset[-R;R]$. Имеем

$$\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx = \text{v. p.}\int_{-R}^{R}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx =$$
$$= \text{v. p.}\int_{-R}^{R}\frac{\cos kx}{x}\varphi(0)\,dx + \text{v. p.}\int_{-R}^{R}\cos kx\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Здесь первое слагаемое в правой части обращается в нуль как предел интегралов от нечётной функции по симметричному множеству. Насчёт второго слагаемого заметим прежде всего, что в силу свойств гладкости основной функции подынтегральная функция содержит устранимую особенность: множитель $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ имеет конечное предельное значение $\varphi'(0)$ при $x\to 0$, что вытекает из формулы конечной приращений Лагранжа и непрерывности производной основной функции. Далее, в силу вышесказанного получаем

$$\text{v. p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx = \int_{-R}^{R}\cos kx\,\psi(x)\,dx,$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & x\neq 0,\\ \varphi'(0), & x=0\end{cases}. \tag{10}$$

Но тогда в силу леммы Римана получаем требуемый результат. (Формулировка леммы: $\int_a^b f(x)\cos tx\,dx\to 0$, $\int_a^b f(x)\sin tx\,dx\to 0$ при $a,b=\text{const}$, $t\to+\infty$ для любой *кусочно непрерывной* функции $f(x)$, см., напр.: А. В. Щепетилов, Лекции по математическому анализу для экспериментального потока. Третий семестр, лемма 7.4.)

6. *Формула Сохоцкого.* $\frac{1}{x\pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$, где $\frac{1}{x\pm i0} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}$ в смысле обобщённых функций.

Имеем

$$\left\langle \frac{1}{x-i\varepsilon}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\, dx = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)(x+i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\, dx + i\int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\, dx.$$

Сходимость второго слагаемого в правой части к $i\pi\delta(x)$ следует из предыдущего пример (семейство 2)). Рассмотрим первое слагаемое. Как обычно, фиксируем произвольную основную функцию $\varphi(x)$ и выбираем R так, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R;R]$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{x(\varphi(x)-\varphi(0))}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}, \tag{11}$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались нечётностью функции $\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$, а в последнем перешли к функции $\psi(x)$, определённой формулой (10). С другой стороны,

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx = \int_{-R}^{R} \psi(x)\, dx, \tag{12}$$

где мы снова воспользовались соображениями нечётности, а также сняли знак главного значения, поскольку, как и в предыдущем примере, в подынтегральном выражении теперь функция с устранимой особенностью. Сравним теперь правые части (11) и (12):

$$\left| \int_{-R}^{R} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2} - \int_{-R}^{R} \psi(x)\, dx \right| \leqslant \sup_{x\in[-R;R]} |\psi(x)| \int_{-R}^{R} \frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\, dx = C\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-R}^{R} \leqslant C\varepsilon\pi \to 0, \ \ \varepsilon \to +0.$$

7. Вычислить предел в смысле обобщённых функций при $t \to +\infty$ от выражения $\frac{e^{ixt}}{x-i0}$.

Имеем при произвольном фиксированном $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ с $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R;R]$ с учётом предыдущего примера

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{e^{ixt}}{x-i0}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0} \int \frac{\varphi(x)e^{ixt}}{x-i\varepsilon}\, dx = \{\varphi(x)e^{ixt} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)\} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{x-i\varepsilon}\varphi(x)e^{ixt} = \\
&= \left\langle \frac{1}{x-i0}, \varphi(x)e^{ixt} \right\rangle = \left\langle i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)e^{ixt} \right\rangle = \\
&= i\pi\varphi(0) + \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)e^{ixt} \right\rangle = i\pi\varphi(0) + \text{v. p.} \int \frac{\varphi(x)(\cos xt + i\sin xt)}{x}\, dx = \\
&= i\pi\varphi(0) + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}(\cos xt + i\sin xt)\, dx + \text{v. p.} \frac{\varphi(0)}{\cos xt + i\sin xt}\, dx \to \\
&\to i\pi\varphi(0) + 0 + 0 + \lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{i\varphi(0)\sin xt}{x}\, dx = i\pi\varphi(0) + i\pi\varphi(0) = \langle 2i\pi\delta(x), \varphi(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Здесь в одном из последних переходов мы воспользовались равенством

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{\sin xt}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\sin y}{y}\, dy = \pi,$$

верном при всех $t > 0$. Этот результат можно получить с помощью дифференцирования или предельного перехода по параметру (см. материал 3-го семестра по математическому анализу).

7. Прямое (тензорное) произведение обобщённых функций из $\mathcal{D}'$

Пусть $x \in \mathbb{R}^M$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{M+N})$, $f(x) \in C(\mathbb{R}^M)$, $g(y) \in C(\mathbb{R}^N)$. Тогда верна формула сведения повторного интеграла к двойному (в более общем случае — теорема Фубини)

$$\int_{\mathbb{R}^{M+N}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^M} dx \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(y)\varphi(x,y)\,dy \right) dx,$$

что позволяет сформулировать

Определение 5. Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^M)$, $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Тогда *прямым (тензорным) произведением функций* $f(x)$ *и* $g(y)$ называется функция $h(x,y) \equiv f(x) \cdot g(y)$, действующая по правилу

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^{M+N}} = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^N} \rangle_{\mathbb{R}^M}.$$

Проверка корректности определения остаётся для самостоятельной работы слушателей, равно как и доказательство следующих свойств введённой операции:

1) коммутативность,

2) непрерывность по каждому из сомножителей (в смысле предельного перехода, определённого выше),

3) ассоциативность,

4) для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ верно $D_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)] = [D_x^\alpha f(x)] \cdot g(y)$,

5) для любой $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ верно $(a(x)f(x)) \cdot g(y) = a(x)(f(x) \cdot g(y))$,

6) $\left\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x,y)\,dy \right\rangle_{\mathbb{R}^M} = \int_{\mathbb{R}^N} \langle f(x), \varphi(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^M}\,dy$,

7) $\operatorname{supp}[f(x) \cdot g(y)] = \operatorname{supp} f(x) \times \operatorname{supp} g(y)$.

Для формулировки последнего свойства требуется ввести понятие носителя обобщённой функции. Сделаем это.

Определение 6. Говорят, что обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{D}'$ *обращается в ноль в области* G, если для любой основной функции $\varphi(x)$ с $\operatorname{supp}\varphi \subset G$ верно $\langle f(x), \varphi(x) \rangle = 0$.

Определение 7. Объединение всех областей, в которых обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{D}'$ обращается в ноль, называется *нулевым множеством* этой функции, а дополнение к нулевому множеству — её *носителем*. Обобщённые функции с компактным носителем называются *финитными*.

Например, $\operatorname{supp}\delta(x) = \{0\}$, $\operatorname{supp}\theta(x) = \{x \mid x \geqslant 0\}$ (докажите это непосредственно!), поэтому функция Дирака финитна, а функция Хевисайда — нет.

Введём теперь обобщённую функцию

$$\delta(at - |x|) \equiv \theta(t) \cdot \delta(at + x) + \theta(t) \cdot \delta(at - x). \tag{13}$$

Здесь в правой части использованы тензорные произведения функции Хевисайда по переменной t на дельта-функции, в которых осуществлена линейная замена переменной $x \mapsto at \pm x$, при которой t рассматривается как параметр.

8. Преобразуем тензорные произведения в правой части (13). Имеем

$$\langle\theta(t)\cdot\delta(at+x),\varphi(t,x)\rangle=\langle\theta(t),\langle\delta(at+x),\varphi(t,x)\rangle\rangle=\left\langle\theta(t),\left\langle\delta(x),\varphi\left(t,\frac{x-at}{1}\right)\right\rangle\right\rangle=$$

$$=\langle\theta(t)\,\varphi(t,-at)\rangle=\int_0^{+\infty}\varphi(t,-at)\,dt.$$

Аналогично получаем

$$\langle\theta(t)\cdot\delta(at-x),\varphi(t,x)\rangle=\int_0^{+\infty}\varphi(t,at)\,dt.$$

9. Положим

$$\theta(at-|x|)=\begin{cases}1, & at-|x|\geqslant 0,\\ 0, & at-|x|<0\end{cases}.$$

Требуется вычислить $\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|)$, где производная пониматеся в смысле обобщённых функций.

Имеем с учётом предыдущего примера

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|),\varphi(t,x)\right\rangle=-\left\langle\theta(at-|x|),\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\right\rangle=-\int_{\{(t,x)|t\geqslant\frac{|x|}{a}\}}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dt\,dx=$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^1}dx\int_{t=\frac{|x|}{a}}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dt=\int_{\mathbb{R}^1}dx\,\varphi\left(\frac{|x|}{a}\right)=\int_{-\infty}^{0}\varphi\left(-\frac{x}{a},x\right)\,dx+\int_0^{(}+\infty)\varphi\left(\frac{x}{a},x\right)\,dx=$$

$$=a\int_0^{+\infty}\varphi(t,-at)dt+a\int_0^{+\infty}\varphi(t,at)=a\delta(at-|x|).$$

10. Доказать, что

$$\left\langle\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\theta(at-|x|),\varphi(t,x)\right\rangle=-\left\langle\theta(t)\cdot\delta(at+x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle+\left\langle\theta(t)\cdot\delta(at-x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle.$$

Имеем с учётом примера 8

$$\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at-|x|),\varphi(t,x)\right\rangle=\left\langle\theta(at-|x|),\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x)\right\rangle=\int_{\{(t,x)|t\geqslant\frac{|x|}{a}\}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dt\,dx=$$

$$=\int_0^{+\infty}dt\int_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}dt\,\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,at)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,-at)\right)=$$

$$=-\left\langle\theta(t)\cdot\delta(at+x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle+\left\langle\theta(t)\cdot\delta(at-x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle.$$

8. Свёртка обобщённых функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции. Тогда можно ввести в рассмотрение функцию

$$h(x)=\int_{\mathbb{R}^N}f(t)g(x-t)\,dt=\int_{\mathbb{R}^N}f(x-t)g(x)\,dt$$

при условии, что эти интегралы сходятся. Далее, для любой функции $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ имеем

$$\langle h(x),\varphi(x)\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}dx\left(\int_{\mathbb{R}^N}f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi\right)\varphi(x)\,dx=\iint_{\mathbb{R}^{2N}}f(\xi)\cdot g(\eta)\varphi(\eta+\xi)\,d\eta\,d\xi.$$

Это позволяет ввести определение *свёртки* обобщённых функций.

Определение 8. *Свёрткой* $f(x)*g(x)$ обобщённых функций $f(x) \in \mathcal{D}'$, $g(x) \in \mathcal{D}'$ называется обобщённая функция, действующая по правилу

$$\langle f(x) * g(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(\xi) \cdot g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle. \tag{14}$$

Замечание 5. Здесь в правой части происходит не линейная замена переменной в аргументе основной функции, а применение тензорного произведения к сложной функции $\psi(\xi, \eta) \equiv \varphi(\xi+\eta)$.

Вообще говоря, формула (14) имеет смысл не для всех $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $g(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, поскольку $\varphi(\xi + \eta)$ может уже не быть финитной. Однако она заведомо имеет смысл, в частности, когда одна или обе обобщённые функции финитны или (при $N = 1$) когда носители функций f и g ограничены с одной стороны.

11. Упростим выражение $\theta(x) * \theta(x)$.

Имеем для всякой $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\begin{aligned} \langle \theta(x) * \theta(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \theta(\xi) \cdot \theta(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \theta(\xi)\theta(\eta)\, d\xi\, d\eta = \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(\xi + \eta)\, d\xi = \{\xi + \eta = \tau\} = \int_0^{+\infty} d\eta \int_\eta^{+\infty} \varphi(\tau)\, d\tau = \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^\tau d\eta\, \varphi(\tau) = \\ &= \int_0^{+\infty} \tau\varphi(\tau) = \langle x\theta(x), \varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

или $\theta(x) * \theta(x) = x\theta(x)$.

12. Упростим выражение $f(x) = x^2\theta(x) * \theta(x)\sin^2 x$.

Имеем для всякой $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\begin{aligned} \langle f(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \xi^2\theta(\xi) \cdot \theta(\eta)\sin^2\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = \\ &= \int_0^{+\infty} \xi^2 \sin^2\eta\varphi(\xi + \eta)\, d\xi = \{\xi + \eta = \tau\} = \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^\tau d\eta\, \varphi(\tau)(\tau - \eta)^2 \sin^2\eta = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau\varphi(\tau)(\tau - \eta)^2 \sin^2\eta\, d\eta = \int_0^{+\infty} d\tau\, \varphi(\tau) \left(\frac{\tau^3}{6} - \frac{\cos 2\tau}{4} - \frac{\sin 2\tau}{8} \right), \end{aligned}$$

или $x^2\theta(x) * \theta(x)\sin^2 x = \theta(x) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} \right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что функционал, задаваемый определением 3, действительно определён на всём $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ и является линейным и непрерывным.

2. 1) Показать, что

$$(D^\alpha f)(x + h) = D^\alpha[f(x + h)], \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \quad h \in \mathbb{R}^N.$$

2) Показать, что

$$(D^l f)(ax + b) = a^l D^l[f(ax + b)], \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1), \quad h \in \mathbb{R}^1, \quad a \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

3) Показать, что при всех $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{F}(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ верно $(af)(Ax+b) = a(Ax+b)f(Ax+b)$ $(\det A \neq 0)$.

4) Упросить выражение $\delta(ax)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$).

3. Найти носители обобщённых функций $\delta(x)$, $\theta(x)$, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

4. Описать преобразование носителя при линейной замене переменной.

5. Убедиться, что в примерах 4.1)—4.3), 4.5) можно применить лемму, сформулированную на с. 3.

6. 1) Обосновать требуемый результат для примера 4.4).

2*) Сформулировать и доказать общее утверждение, подходящее для этого случая.

7. Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — финитная обобщённая функция (не обязательно регулярная!). Показать, что если $\eta(x) \equiv 0$ в окрестности $\operatorname{supp} f$, то $\eta(x)f(x) = f(x)$.

8*. Найти предел $\lim_{t\to+\infty} t^m e^{ixt}$, где $m \in \mathbb{N}$ фиксировано.

9. Исследовать на сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \delta^{(n)}(x-n)$.

10*. Проверить корректность определения тензорного произведения обобщённых функций. (Что именно нужно проверить?)

11*. Проверить свойства тензорного произведения.

12. Показать, что

1) $\theta(x_1, x_2, \dots x_N) = \theta(x_1) \cdot \theta(x_2) \cdot \ldots \cdot \theta(x_N)$;

2) $\delta(x_1, x_2, \dots x_N) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \ldots \cdot \delta(x_N)$;

3) $\frac{\partial^n \theta(x_1, x_2, \dots x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} = \delta(x_1, x_2, \dots x_N)$.

13. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x}\theta(at - |x|) = \theta(t) \cdot \delta(at + x) - \theta(t) \cdot \delta(at - x);$$

$$2)\ \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(at - |x|), \varphi(t, x) \right\rangle = -a \left\langle \delta(at - |x|), \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right\rangle.$$

14. Изобразить на координатной плоскости носители следующих обобщённых функций:

$$1), \delta(x-a) \cdot \delta(y-b), \quad 2)\ \theta(x-a) \cdot \delta(y-b), \quad 3)\ \theta(x-a) \cdot \theta(y-b).$$

15. Упростить выражение $f(x) = x^2\theta(x) * \theta(x)\sin x$.

16. На примере обобщённых функций $\theta(x)$, $\delta(x)$, 1 показать, что *операция свёртки не ассоциативна.*

17*. Выяснить, какие (какая) из этих формул верны (верна):

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x), \quad g_\alpha(x) * g_\beta(x) = g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x),$$

где

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad \alpha > 0; \quad g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \exp\left(-\pi\frac{x^2}{\alpha^2}\right), \quad \alpha > 0.$$

18*. Показать, что в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ свёртка $x \cdot \theta(t) * t \cdot \theta(x)$ не имеет смысла.

19. Показать, что имеют место равенства:

1) $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$;

2) $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$;

3) $\big(\delta^{(l)}(x)\big) * f(x) = f^{(l)}(x)$, $l \in \mathbb{N}$.

20. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ свёртку $\theta(t-|x|) * \theta(t-|x|)$.