

**ЛЕКЦИЯ 12А**  
**Пространства С. Л. Соболева**

**0. Неравенство Фридрикса**

**Лемма.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  — ограниченная область. Тогда существует такая константа  $C_\Omega$ , что для всех  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  верно *неравенство Фридрикса*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1)$$

*Доказательство.*

1. Докажем сначала это неравенство для бесконечно гладких функций  $u$  с носителем, вложенным в область  $\Omega$ . Очевидно, продолжив любую из таких функций нулём всюду вне  $\Omega$ , получим бесконечно гладкую функцию на всём  $\mathbb{R}^N$ . Пусть  $a = \inf\{x_N \mid x \equiv (x_1, \dots, x_N) \in \Omega\}$ ,  $b = \sup\{x_N \mid x \in \Omega\}$ . Тогда, очевидно, для каждой из рассматриваемых функций и любой точки  $x \equiv (x_1, \dots, x_N)$  верно (с учётом неравенства Коши — Буняковского)

$$\begin{aligned} |u(x_1, \dots, x_N)|^2 &= \left| \int_a^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, t) dt \right|^2 \leq \int_a^{x_N} 1^2 dt \cdot \int_a^{x_N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, t) \right|^2 dt \leq \\ &\leq d(\Omega) \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, t) \right|^2 dt \leq d(\Omega) \int_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

где  $d(\Omega)$  — диаметр области  $\Omega$ . Интегрируя по области  $\Omega$ , имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq d(\Omega) \int_a^b dx_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \left( \int_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 dt \right) = \\ &= d(\Omega) \int_a^b dx_N \left( \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \int_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 dt \right) \leq d^2(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Итак, для бесконечно гладких функций с носителем внутри  $\Omega$  выполняется (1) с  $C_\Omega = d(\Omega)$ .

2. Рассмотрим общий случай произвольной функции  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . По самому определению пространства  $W_0^{1,2}(\Omega)$  функции, рассмотренные в п. 1 доказательства, плотны в нём. Поэтому существует последовательность  $\{u_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  такая, что

$$\|u - u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Легко видеть, что и левая, и правая части неравенства Фридрикса мажорируются нормой в  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , поэтому в силу (2) и неравенства треугольника имеем  $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ . А поскольку (1) с общей константой  $C_\Omega$  выполнено для всех  $u_k$ , то это неравенство выполнено и для  $u$  с той же константой.

*Лемма доказана.*

*Следствие.* Неравенство Фридрихса позволяет ввести на пространстве  $W_0^{1,2}(\Omega)$  (где  $\Omega$  — ограниченная область) эквивалентную норму

$$\|u\|'_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \equiv \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx},$$

что удобно в тех задачах математической физики, где старшая часть эллиптического дифференциального оператора представляет собой оператор Лапласа. (См. § 4 настоящей лекции и: Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.)

## 1. Ортогональные дополнения в соболевских пространствах

Ниже обозначения  $H^1$ ,  $W^{1,2}$  будут использоваться как синонимы.

1. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству

$$L = \left\{ y \in H^1[a; b], \int_a^b y(x) dx = 0 \right\}.$$

1) Заметим прежде всего, что  $L$  — замкнутое подпространство в  $H^1[a; b]$ . Действительно, если  $\|y_n - y\|_{H^1[a; b]} \rightarrow 0$ , то с помощью неравенства Коши—Буняковского получаем

$$\left| \int_a^b (y_n - y) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (y_n - y)^2 dx} \cdot \sqrt{b - a} \leq \|y_n - y\|_{H^1[a; b]} \sqrt{b - a} \rightarrow 0.$$

2) Построим ортогональное дополнение в  $H^1[a; b]$  к подпространству  $L$ . Для этого заметим, что оператор

$$Q : z(x) \mapsto z(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b z(x) dx$$

является ортопроектором на  $L$ . В самом деле, очевидно, что  $Q$  — проектор (т. е.  $Q^2 = Q$ ) и что его образ совпадает с  $L$ . ( $\text{Im } Q \subset L$ , как можно проверить;  $\text{Im } Q \supset L$ , поскольку функции из  $L$  оператор  $Q$  оставляет без изменений.) Осталось доказать, что  $Q$  — самосопряжённый оператор. Имеем при произвольных  $z(x), w(x) \in H^1[a; b]$ :

$$\begin{aligned} (z, Qw)_{H^1[a; b]} &= \int_a^b [z(x) \cdot (Qw)(x) + z'(x) \cdot (Qw)'(x)] dx = \\ &= \int_a^b \left[ z(x) \left( w(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b w(t) dt \right) + z'(x) \left( w(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b w(t) dt \right)' \right] dx = \\ &= \int_a^b [z(x)w(x) + z'(x)w'(x)] dx - \frac{1}{b - a} \int_a^b w(t) dt \int_a^b z(x) dx; \\ (Qz, w)_{H^1[a; b]} &= \int_a^b [(Qz)(x) \cdot w(x) + (Qz)'(x) \cdot w'(x)] dx = \\ &= \int_a^b \left[ \left( z(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b z(t) dt \right) w(x) + \left( z(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b z(t) dt \right)' w'(x) \right] dx = \\ &= \int_a^b [z(x)w(x) + z'(x)w'(x)] dx - \frac{1}{b - a} \int_a^b z(t) dt \int_a^b w(x) dx. \end{aligned}$$

Итак,  $(z, Qw)_{H^1[a;b]} = (Qz, w)_{H^1[a;b]}$ . Но если  $Q$  — ортопроектор на  $L$ , то

$$L^\perp = \text{Im} (I - Q) = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b z(x) dx \mid z(x) \in H^1[a;b] \right\}.$$

Нетрудно видеть, что в  $L^\perp$  содержатся все константы и только они. Итак,  $L^\perp$  состоит в точности из всех элементов  $H^1[a;b]$ , имеющих представителя-константу.

2. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству

$$L = \{y \in H^1[a;b], y(a) = y(b) = 1\}.$$

Такое условие ставится корректно, поскольку, как следует из первой теоремы вложения (см. лекцию основного курса), каждая функция из  $H^1[a;b]$  имеют непрерывный представитель.

1) Заметим, что  $L$  — замкнутое подпространство в  $H^1[a;b]$ . Это верно в силу непрерывности вышеупомянутого вложения, т. е. оценки  $\|y(x)\|_{C[a;b]} \leq C \|y(x)\|_{H^1[a;b]}$  с некоторой константой  $C$ , общей для всех функций  $y \in H^1[a;b]$ . Действительно, из  $\|y_n - y\|_{H^1[a;b]} \rightarrow 0$  следует  $\|y_n - y\|_{C[a;b]} \rightarrow 0$ , а поэтому если  $y_n(a) = y_n(b) = 0$ , то  $y(a) = y(b) = 0$ .

2) Для построения ортогонального дополнения  $L^\perp$  подпространства  $L$  рассмотрим сначала достаточно гладкие функции (скажем,  $z \in C^2[a;b]$ ). Выбирая  $y$  равными всевозможным гладким функциям из  $L$ , имеем

$$0 = \int_a^b (yz + y'z') dx = \int_a^b (yz - yz'') dx + yz'|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (yz - yz'') dx, \quad (3)$$

где внеинтегральные члены при интегрировании по частям равны нулю в силу условия  $y(a) = y(b) = 0$ . В силу основной леммы вариационного исчисления из (3) имеем  $z - z'' = 0$ , или

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (4)$$

Итак, все  $C^2$ -гладкие функции из  $L^\perp$  образуют линейную оболочку функций  $e^x, e^{-x}$ . Остаётся вопрос, нет ли в  $L^\perp$  негладких функций, не входящих в (4). Интуитивно ясно, что таких функций нет в силу плотности множества бесконечно гладких функций в пространстве  $H^1[a;b]$ . Проведём это рассуждение строго. Именно, пусть  $w \in L^\perp \setminus \mathcal{L}(e^x, e^{-x})$ . Тогда существует последовательность  $\{w_n\} \subset C^\infty \cap L^\perp$  (и, тем самым,  $\{w_n\} \subset \mathcal{L}(e^x, e^{-x})$ ), сходящаяся к  $w$  в пространстве  $H^1[a;b]$ . Но всякое конечномерное линейное многообразие банахова пространства замкнуто (см. лекцию 12а I семестра, параграф 7), а поэтому  $w \in \mathcal{L}(e^x, e^{-x})$ , что противоречит предположению. Следовательно,  $L^\perp$  исчерпывается подпространством  $\mathcal{L}(e^x, e^{-x})$ .

Заметим, что мы только что описали отличие  $H_0^1(\Omega)$  от  $H^1(\Omega)$  в случае  $\Omega = (a;b)$ .

## 2. Пример неограниченной функции из $W^{1,2}(\Omega)$

Как было отмечено выше, из первой теоремы вложения следует, что при размерности пространства  $N = 1$  для функций из  $W_0^{1,2}(\Omega)$  гарантируется существование непрерывного представителя. В случае высших размерностей это уже не так, что нетрудно продемонстрировать на примере функции

$$u(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \varepsilon \in (0; 1), \quad \Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad (5)$$

которую нельзя сделать непрерывной никаким переопределением на множестве меры нуль. Докажем, что функция (5) принадлежит пространству  $W^{1,2}(\Omega)$ .

С помощью частного признака сравнения несобственных интегралов легко видеть, что эта функция принадлежит  $L^2(\Omega)$ , т. к.  $\varepsilon < 1 < 2$ . Осталось доказать, что её частные производные по переменным  $x, y$

1) принадлежат  $L^2(\Omega)$ ;

2) действительно являются её обобщёнными производными.

Первый факт доказывается просто. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \left| \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \right| = \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^{2+\varepsilon}} \leq \frac{1}{\rho^{1+\varepsilon}},$$

где мы воспользовались полярными координатами. В силу  $1 + \varepsilon < 2$  полученная оценка показывает, что производная  $u_x$  принадлежит  $L^2(\Omega)$ . Аналогичная оценка имеет место и для  $u_y$ . Второй факт рекомендуется доказать самостоятельно (см. задачу 3), используя технику «вырезания особенности», подобно тому, как это было сделано при рассмотрении фундаментального решения в лекции 11а.

## 3. Пространства Соболева с отрицательными индексами

Напомним, что пространства с отрицательными индексами определяются как сопряжённые к соответствующим «обычным» пространствам:

$$W^{-k,p'}(\Omega) = \left( W_0^{k,p}(\Omega) \right)^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Введя эти пространства, можно рассматривать дифференциальные операторы, определённые на всём исходном пространстве Соболева. Для примера рассмотрим пространство  $H_0^1[a; b]$  с «усечённым» скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1[a; b]} = \int_a^b u'(x)w'(x) dx \quad (6)$$

и пространство

$$H^{-1}[a; b] = \left( H_0^1[a; b] \right)^*.$$

Это позволяет определить оператор второй производной

$$D^2 : H_0^1[a; b] \rightarrow H^{-1}[a; b]$$

следующим образом: пусть при каждом  $u \in H_0^1[a; b]$  элемент  $w \equiv D^2u \in (H_0^1[a; b])^*$  есть линейный ограниченный функционал, действующий по правилу

$$\langle w, v \rangle = - \int_a^b u'(x)v'(x) dx, \quad (7)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скобки двойственности между  $H_0^1[a; b]$  и  $H^{-1}[a; b]$ . Легко видеть, что правая часть соотношения (7) действительно задаёт ограниченный линейный функционал на  $H_0^1[a; b]$ , поэтому такое определение корректно. Его мотивировка также понятна: если  $u \in C^2[a; b]$ , то из (7) с помощью интегрирования по частям с учётом граничных условий получаем:

$$\langle w, v \rangle = - \int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b u''(x)v(x) dx,$$

то есть для  $u \in C^2[a; b]$  функционал  $w$  представляется в виде

$$\langle w, v \rangle = \int_a^b U(x)v(x) dx,$$

где  $U(x) = u''(x)$ , причём функция  $U(x)$  не может быть равна никакой другой непрерывной функции (почему?).

Вычислим теперь норму  $w$  как элемента  $H^{-1}[a; b]$ . По определению нормы функционала с учётом выбранного в  $H_0^1[a; b]$  скалярного произведения (6) имеем

$$\|w\| = \sup_{v \neq \theta} \frac{\left| \int_a^b u'v' dx \right|}{\|v\|_{H^1[a; b]}} \leq \sup_{v \neq \theta} \frac{\sqrt{\int_a^b (u')^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (v')^2 dx}}{\sqrt{\int_a^b (v')^2 dx}} = \|u\|_{H^1[a; b]},$$

причём, как показывает выбор  $v = u$ , равенство достигается. Итак,

$$\|D^2u\|_{H^{-1}[a; b]} = \|u\|_{H^1[a; b]},$$

и на первый взгляд трудно вычисляемая норма в «странном» пространстве оказывается очевидной в том случае, где она естественным образом возникает. (Пример подобной трактовки производных см., напр.: Корпусов М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: Либроком, 2010. С. 173–190, особ. замечание 1 на с. 177.)

В данном случае мы привели пример элемента  $w \in H^{-1}[a; b]$  как результата применения дифференциального оператора. Оказывается, все элементы пространств с отрицательными индексами носят подобный характер. Именно, верна

**Теорема.** (См.: Свешников А. Г., Корпусов М. О. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Т. 1. Геометрические и топологические свойства

линейных пространств. М: Красанд, 2011. С. 324, теорема 34.) Всякий элемент  $f^* \in W^{-k,p'}(\Omega)$  может быть представлен в виде

$$f^* = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_\alpha(x), \quad \text{где } g_\alpha(x) \in L^{p'}(\Omega).$$

Рекомендуется сравнить этот результат с теоремой о представлении обобщённых функций из  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

#### 4. Применение пространств Соболева в линейных задачах математической физики

Рассмотрим на примере простой ситуации, как можно провести исследование линейной задачи математической физики с использованием несколько другого подхода, чем изложен в предыдущем параграфе. Он не требует введения пространств отрицательного индекса, но существенно опирается на факты из теории гильбертовых пространств.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & f \in L^2(\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

с числовым параметром  $\lambda \in \mathbb{C}$  в ограниченной области  $\Omega$ . Известно, что существование классического решения этой задачи, вообще говоря, нельзя гарантировать без требования гёльдеровости правой части  $f$  и некоторых условий гладкости на границу области. (См., напр.: Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка.) Однако можно ослабить требования и искать обобщённое решение в смысле Соболева, т. е. элемент  $u \in H_0^1(\Omega)$ , удовлетворяющий задаче (8) в некотором обобщённом смысле. Чтобы обеспечить «обратную совместимость», т. е. гарантировать, что классическое решение (если оно существует) удовлетворяет обобщённой задаче, поступим при построении последней следующим образом. Умножим уравнение из (8) на  $\bar{w}$ , где  $w$  — произвольная функция из  $C_0^2(\Omega)$ , черта означает комплексное сопряжение. После интегрирования по частям получим:

$$(u, w)_{H^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)},$$

где учтены граничные условия  $w \in C_0^2(\Omega)$  и выбор «усечённого» скалярного произведения в  $H_0^1(\Omega)$ . (В данном параграфе мы используем комплексные пространства; при этом скалярные произведения выбираем линейными по первому аргументу и сопряжённо-линейными по второму.) Заметим теперь, что в силу плотности множества  $C_0^2(\Omega)$  (и даже  $C_0^\infty(\Omega)$ ) в пространстве  $H_0^1(\Omega)$  можно заменить  $w \in C_0^2(\Omega)$  на  $w \in H_0^1(\Omega)$  (проведите эти рассуждения самостоятельно; аналогичное уже было сделано выше). В итоге получаем задачу

$$\begin{cases} (u, w)_{H^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)} & \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (9)$$

где условие  $u \in H_0^1(\Omega)$  задаёт не только функциональное пространство, в котором ищется решение, но и граничные условия. Как мы покажем, результаты относительно разрешимости задачи (9) непосредственно следуют из теории вполне непрерывных линейных операторов.

Для этого перепишем задачу (9) в операторном виде. Заметим, что при  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $w \in H_0^1(\Omega)$  выражения

$$(f, w)_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{и} \quad (u, w)_{L^2(\Omega)}$$

задают соответственно сопряжённо-линейный функционал и полуторалинейную форму в  $H_0^1(\Omega)$  (проверьте это, пользуясь нашим определением скалярного произведения в  $H_0^1(\Omega)$  и информацией из параграфа 0). Поэтому в силу теорем Рисса—Фреше (о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве) и Лакса—Мильграма (о представлении полуторалинейной формы) для случая комплексного гильбертова пространства можно утверждать, что существуют такие функция  $F \in H_0^1(\Omega)$  и линейный ограниченный оператор  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ , что

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega) \quad (v, w)_{L^2(\Omega)} = (Av, w)_{H_0^1(\Omega)}, \quad (f, w)_{L^2(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}. \quad (10)$$

Тогда (9) можно переписать в виде

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(Au, w)_{H_0^1(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

В силу произвольности  $w \in H_0^1(\Omega)$  и свойств скалярного произведения последнее равенство эквивалентно задаче

$$(E + \lambda A)u = F, \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (11)$$

Из (11) сразу видно, что при  $\lambda = 0$  (уравнение Пуассона) решение существует и единственно,  $u = F$ . (Конечно, не стоит удивляться «лёгкости» получения этого результата: во-первых, мы использовали мощные результаты теории гильбертовых и соболевских пространств, а во-вторых, мы рассматриваем обобщённые, «ослабленные» решения.) Рассмотрим случай  $\lambda \neq 0$ .

Докажем, что оператор  $A$  является вполне непрерывным. Для этого докажем, что он переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. (Тот факт, что этого достаточно для полной непрерывности оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, — а пространства Соболева сепарабельны — будет доказан в задаче 4). Итак, пусть  $v_n \rightharpoonup v$  в  $H_0^1(\Omega)$ . Тогда, во-первых,  $v_n \rightarrow v$  в  $L^2(\Omega)$  в силу теорем о компактных вложениях, а во-вторых,  $Av_n \rightharpoonup Av$  в  $H_0^1(\Omega)$ , поскольку (см. задачу 3 к лекции 7а) непрерывный оператор непрерывен и в смысле слабой сходимости. Снова используя теорему о компактном вложении, получаем  $Av_n \rightarrow Av$  в  $L^2(\Omega)$ . Далее, с учётом определения оператора  $A$  (см. (10)) имеем

$$\begin{aligned} (Av_n - Av, Av_n - Av)_{H_0^1(\Omega)} &= (v_n - v, Av_n - Av)_{L^2(\Omega)} = \\ &= (v_n, Av_n)_{L^2(\Omega)} - (v_n, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av_n)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} \rightarrow \\ &\rightarrow (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

где мы использовали непрерывность скалярного произведения по отдельным аргументам и по их совокупности. Итак,  $Av_n \rightarrow Av$  в  $H_0^1(\Omega)$ , что и требовалось.

Установим также, что оператор  $A$  самосопряжён. Имеем

$$(Av, w)_{H_0^1(\Omega)} = (v, w)_{L^2(\Omega)} = \overline{(w, v)_{L^2(\Omega)}} = \overline{(Aw, v)_{H_0^1(\Omega)}} = (v, Aw)_{H_0^1(\Omega)}.$$

Теперь дальнейшие результаты следуют из теории вполне непрерывных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. (См., напр.: Волков В. Т., Ягола А. Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций.) Мы получаем:

- 1) существует не более чем счётное число значений  $\lambda = \lambda_k$  с единственной предельной точкой  $\lambda = \infty$ , для которых задача (11) имеет нетривиальное решение при  $f \equiv 0$ ;
- 2) все такие значения (которыми мы будем называть *собственными значениями задачи Дирихле для оператора Лапласа в области  $\Omega$* ) действительны;
- 3) при  $\lambda \neq \lambda_k$  задача (11) имеет единственное решение.

Можно рассмотреть и случай более общего эллиптического оператора. Если он будет содержать и производные первого порядка, то оператор, роль которого в нашем рассуждении играет  $A$ , окажется, вообще говоря, несамосопряжённым (см., например, упомянутую выше книгу Ладыженской О. А.) и придётся использовать более общую теорию вполне непрерывных (компактных) операторов (см., напр.: Арсеньев А. А. Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. М.—Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2011).

### Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы по тексту.

1\*. Улучшить константу в неравенстве Фридрикса, используя (с обоснованием!) экстремальное свойство первой собственной функции задачи Дирихле для оператора Лапласа. Показать на примере, что новая оценка действительно лучше (а по её смыслу, очевидно, является неулучшаемой).

2\*. Доказать неравенство Фридрикса для неограниченных областей  $\Omega$ , «вложенных в слой», т. е. таких, что для некоторой координаты  $x_k$  существуют такие  $d_1$  и  $d_2$ , что  $d_1 \leq x_k \leq d_2$ .

3. Завершить рассмотрение примера с  $u(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^{\varepsilon/2}$ , доказав, что частные производные этой функции, существующие почти всюду в единичном круге, являются обобщёнными производными этой функции в смысле Соболева. (Указание: необходимую для этого формулу «интегрирования по частям» можно получить из формулы Остроградского — Гаусса, применяя последнюю к вектор-функции  $\{u(x)\varphi(x); 0; 0\}$ .) Привести пример из лекции основного курса, показывающий, что это не всегда так: существование классической производной почти всюду не влечёт существование обобщённой производной из  $L^2(\Omega)$ .



4. Доказать, что если  $A : H_1 \rightarrow H_2$ , где  $H_1, H_2$  — сепарабельные гильбертовы пространства, то из того факта, что для любой слабо сходящейся последовательности  $\{v_n\} \subset H_1$  последовательность  $\{Av_n\}$  сильно сходится в  $H_2$ , следует, что  $A$  — вполне непрерывный оператор. (Ср. с задачей 4 к лекции 7а.)

5. Ослабить требования на правую часть  $f$  в задаче (8) так, чтобы ещё можно было провести рассуждения § 4.

6. Перенести рассуждения § 4 на случай более общего эллиптического оператора

$$Du = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

сформулировав некоторые условия на коэффициенты  $a_{ij}, b_i, c$ .

7\*. Доказать, что семейство собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа всегда счётно (тогда как общая теория вполне непрерывных самосопряжённых операторов гарантирует лишь не более чем счётное количество характеристических чисел).