ЛЕКЦИЯ 3А

Типы сходимости. Интеграл Лебега. Пространства Лебега

1. Типы сходимости функциональных последовательностей

На лекции было отмечено, что имеются следующие виды сходимости функциональных последовательностей: равномерная, поточечная, почти всюду, по мере. При этом каждая последующая из указанных следует из предыдущей. Обратные следствия места не имеют, но верны некоторые их «ослабленные» варианты. Так, для пространства конечной меры верна теорема Егорова, утверждающая, что как только на пространстве X имеет место поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ (или даже почти всюду), то из X можно выбросить такое множество B сколь угодно малой наперёд заданной меры, что на $X \setminus B$ имеет место равномерная сходимость f_n к f. Далее, можно утверждать, что любая последовательность, сходящаяся по мере, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Покажем на примере, что на большее надеяться нельзя. Для этого рассмотрим последовательность кусочно постоянных функций, заданных на отрезке $[0;1]$, которую будем для себя называть «бегущий столб». Построим её следующим образом. Сначала введём на отрезке $[0;1]$ функции f_{nk}, где $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, 2^n}$:

$$f_{nk} = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right]; \\ 0, & x \notin \left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Теперь занумеруем построенные функции в «словарном порядке», начиная с f_{11}: за f_{nk} следует $f_{n,k+1}$, если $k < 2^n$, и $f_{n+1,1}$ в противном случае.

Замечание. Рекомендуется построить графики первых 7 функций. В других примерах также рекомендуется строить графики нескольких первых функций каждой последовательности.

Теперь ясно, что рассматриваемая последовательность не сходится ни в одной точке, поскольку при любом $x \in [0;1]$ последовательность значений $f_l(x)$ представляет собой последовательность нулей и единиц, причём как нули, так и единицы встречаются среди членов со сколь угодно большими номерами (почему?). Такая последовательность не может сходиться ни поточечно, ни почти всюду. Однако она сходится по мере к $f(x) \equiv 0$. В самом деле, мера множества, где функция $f_l(x)$ отлична от 0, стремится к нулю при $l \to \infty$. Однако легко построить подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду: для этого достаточно взять $\{f_{n1}\}$.

2. Теоремы о сходимости и контрпримеры

Рассмотрим теоремы Лебега, Беппо Леви и Фату. Проиллюстрируем на некоторых примерах существенность их условий.

В теореме Лебега (которую иногда также называют теоремой об *ограниченной сходимости*) наименее очевидно, что существенно условие $|f_n| \leqslant \varphi$ (где φ интегрируема). Однако нетрудно привести пример, показывающий, что нарушение этого условия приводит к невыполнению заключения теоремы: положим на $x \in [0;1]$

$$f_n = \begin{cases} n^2, & x \in \left(0; \frac{1}{n}\right]; \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Легко видеть, что $f_n(x) \to 0$ (поточечно, всюду), однако $\int_{[0;1]} f_n(x) d\mu \to +\infty$ (и вообще, подходящим образом выбирая ненулевые значения функций, можно добиться, чтобы этот предел был равен любой заданной величине). Можно привести и другой пример, на этот раз — на множестве $[0;+\infty)$ бесконечной меры. Положим

$$f_n = \begin{cases} 1, & x \in [0;n]; \\ 0, & x > n. \end{cases}$$

Здесь $f_n(x)$ равномерно ограничены функцией $\varphi(x) = 1$, но она не является интегрируемой на $[0;+\infty)$, и условия теоремы Лебега снова не выполнены. Поэтому неудивительно, что $f_n(x) \to 1$, т. е. последовательность сходится к неинтегрируемой на $[0;+\infty)$ функции.

В теореме Беппо Леви, пожалуй, все условия кажутся естественными: первое гарантирует существование поточечного предела (конечного или бесконечного), второе обеспечивает конечность этого предела почти всюду, а без последнего вообще нельзя было бы говорить об интегралах. Поэтому перейдём к теореме Фату и покажем, что существенно условие $f_n(x) \geqslant 0$ (о котором нередко забывают). Для этого положим на $[0;1]$

$$f_n = \begin{cases} -n, & x \in \left(0; \frac{1}{n}\right]; \\ \frac{1}{1-\frac{1}{n}}, & x \notin \left(0; \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Легко видеть, что при всех $n \in \mathbb{N}$ $\int_{[0;1]} f_n(x) d\mu = 0 \leqslant 0$, всюду на $[0;1]$ $f_n(x) \to 1$ и, таким образом, $\int_{[0;1]} f_n(x) d\mu = 1 > 0$.

3. Основные свойства интеграла Лебега

Перечислим основные свойства интеграла Лебега и сравним их со свойствами интеграла Римана. Здесь и далее под $L(X)$ будем понимать функции, интегрируемые по Лебегу на пространстве X с введённой на нём мерой Лебега. В случае сравнения с интегралом Римана под X будем понимать измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, в частности промежуток.

0. Если $f(x)$ интегрируема по Риману *в собственном смысле*, то она интегрируема и по Лебегу. Обратное, как показывает хорошо известный пример функции Дирихле, неверно.

1. Линейность. (И для интеграла Римана.)

2. Аддитивность. (И для интеграла Римана.)
3. Монотонность (интеграл от неотрицательной функции неотрицателен). (И для интеграла Римана.)
4. $f \in L(X) \Leftrightarrow |f| \in L(X)$. (Легко видеть, что для интеграла Римана следствие имеет место лишь «слева направо».) При этом

$$\left| \int_X f(x)\, d\mu \right| \leqslant \int_X |f(x)| d\mu.$$

5. Если $f \geqslant 0$ и $\int_X f\, d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду. Аналогичное можно утверждать и для интеграла Римана.
6. Эквивалентные функции принадлежат или не принадлежат $L(X)$ одновременно, и их интегралы равны.
7. Если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ (всюду или почти всюду) на X и $g(x)$ интегрируема на X, то $f(x)$ интегрируема на X. (1) При этом в силу свойства 3 аналогичным неравенством связаны интегралы от этих функций. 2) В силу свойства 4 условие $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ можно заменить на $|f(x)| \leqslant g(x)$.)
8. Неравенство Чебышёва.
9. σ-аддитивность интеграла Лебега. (Поэтому интеграл от неотрицательной функции сам порождает меру.)
10. Абсолютная непрерывность. (Поэтому мера, о которой говорится в предыдущем пункте, абсолютно непрерывна относительно классической меры Лебега.)

Нашей ближайшей целью будет доказать свойство 0. Заметим прежде лишь, что слова «в собственном смысле» существенны: условно сходящийся (не сходящийся абсолютно) несобственной интеграл Римана не существует в смысле Лебега (см., например, свойство 4).

Итак, пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = I.$$

Докажем, что она интегрируема на $[a;b]$ и по Лебегу.

Известно, что необходимым и достаточным условием интегрируемости данной функции по Риману является стремление верхних и нижних сумм Дарбу к общему пределу I при стремлении диаметра разбиения к нулю. Мы воспользуемся этим условием как необходимым и построим определённую последовательность сумм. Для этого, как в примере из самого начала семинара, будем делить отрезок $[a;b]$ пополам, получившиеся отрезки — ещё раз пополам и т. д. На каждом n-ом шаге мы получим 2^n частичных отрезков $[a_{k-1}^n, a_k^n]$, где $k = \overline{1, 2^n}$. Определим теперь функции

$$\underline{f}_n(x) = \inf_{t \in [a_{k-1}^n; a_k^n] \ni x} f(t), \quad \overline{f}_n(x) = \sup_{t \in [a_{k-1}^n; a_k^n] \ni x} f(t),$$

т. е. на каждом n-ом разбиении берём точные нижние и верхние грани функции $f(x)$ и полагаем $\underline{f}_n$ и $\overline{f}_n$ на каждом из частичных отрезков равными соответственно точным нижней и верхней граням функции f по этому отрезку. Легко видеть, что построенные таким образом функции интегрируемы по Риману (как кусочно постоянные), по Лебегу (как простые функции), причём их интегралы равны соответственно нижней и верхней суммам Дарбу для рассматриваемого разбиения:

$$\int_a^b \underline{f}_n(x)\,dx = \int_{[a;b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu = s_n, \quad \int_a^b \overline{f}_n(x)\,dx = \int_{[a;b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu = S_n. \tag{1}$$

Поскольку нижние и верхние суммы Дарбу интегрируемой по Риману функции ограничены соответственно сверху и снизу её интегралом Римана, имеем

$$\int_{[a;b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu \leqslant I, \quad \int_{[a;b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu \geqslant I. \tag{2}$$

Заметим далее, что поточечно выполнены неравенства

$$\underline{f}_1 \leqslant \underline{f}_2 \leqslant \ldots, \quad \overline{f}_1 \geqslant \overline{f}_2 \geqslant \ldots. \tag{3}$$

В самом деле, при каждом последующем разбиении те множества, по которым берутся точные грани, разбиваются на подмножества, а $\sup A \leqslant \sup B$ при $A \subset B$ по очевидным причинам.

Таким образом, функции $\underline{f}_n$ и $-\overline{f}_n$ удовлетворяют условиям теоремы Беппо Леви. Следовательно,
1) существуют такие функции $\underline{f}$ и $\overline{f}$, что почти всюду

$$\underline{f}_n \to \underline{f}, \quad \overline{f}_n \to \overline{f}, \tag{4}$$

2) и при этом

$$s_n = \int_{[a;b]} \underline{f}_n\,d\mu \to \int_{[a;b]} \underline{f}\,d\mu, \tag{5}$$

$$S_n = \int_{[a;b]} \overline{f}_n\,d\mu \to \int_{[a;b]} \overline{f}\,d\mu. \tag{6}$$

С другой стороны, по необходимому условию интегрируемости по Риману имеем $s_n \to I$, $S_n \to I$, а тогда из (5)—(6) следует, что

$$\int_{[a;b]} \underline{f}\,d\mu = \int_{[a;b]} \overline{f}\,d\mu = I. \tag{7}$$

Теперь заметим, что по построению при всех $x \in [a;b]$ выполняются неравенства

$$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x). \tag{8}$$

Значит (по теореме о предельном переходе в числовом неравенстве), то же почти всюду выполняется для их пределов $\underline{f}$ и $\overline{f}$:

$$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x). \tag{9}$$

Следовательно, почти всюду

$$\underline{f}(x) \leqslant \overline{f}(x). \tag{10}$$

Отсюда и из (7) в силу 5-го свойства интеграла получаем, что почти всюду $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$. Но тогда из (9) имеем

$$\underline{f} = f = \overline{f} \quad \text{почти всюду}. \tag{11}$$

Поскольку уже доказано, что $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ интегрируемы по Лебегу и их интеграл равен I, то же получаем и для эквивалентной им в силу (11) функции $f(x)$.

Утверждение доказано.

Замечание. Может показаться, что факт интегрируемости по Лебегу функции, интегрируемой по Риману, «можно» установить гораздо проще. Рассмотрим, скажем неотрицательную функцию $f(x)$. Тогда её интеграл Римана может быть записан в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{g_{I(\{a_n\})}(x)} \int_a^b g(x)\,dx, \tag{12}$$

где $g_n(x) = \inf_{[a_{k-1},a_k]\ni x} f(t)$ (ступенчатая функция), т. е. как точная верхняя грань нижних сумм Дарбу. А интеграл Лебега — в виде

$$\int_{[a;b]} f(x)\,d\mu = \sup_{h\leqslant f} \int_{[a;b]} h(x)\,d\mu, \tag{13}$$

где $h(x)$ — всевозможные простые функции, поточечно не превышающие f. Но дело в том, что класс функций $h(x)$ во втором случае значительно шире класса функций $g(x)$ в первом. Поэтому из существования точной верхней грани (12) ни существование точной верхней грани (13), ни, тем более, их равенство не следуют.

4. Основные свойства пространств Лебега

Предварительное замечание. При применении интегральных неравенств (вроде неравенств Гёльдера и Минковского) важно понимать, что интегрируемость функции в «меньшей» части неравенства следует из свойства 7 интеграла Лебега (упоминание об этом часто опускают), а уж потом можно «перейти к интегралу» в неравенстве.

На лекции было сформулировано без доказательства неравенство Гёльдера для показателей 1 и ∞: при $f \in L^1(X)$, $g \in L^\infty(X)$

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty. \tag{14}$$

Оно доказывается ещё проще, чем «обычное» неравенство Гёльдера. В самом деле,

$$\|g\|_\infty = \inf\{c \mid \mu\{x \mid |g(x)| \geqslant c\} = 0\},$$

поэтому для любого $\varepsilon > 0$ имеем почти всюду на X $|g(x)| < \|g\|_\infty + \varepsilon$, $|f(x)g(x)| < |f(x)| \left(\|g\|_\infty + \varepsilon\right)$. Следовательно, $fg \in L^1(X)$ (этот шаг обычно пропускают — см. замечание в начале раздела) и

$$\|fg\|_1 \equiv \int_X |f(x)g(x)| d\mu \leqslant \int_X |f(x)| \left(\|g\|_\infty + \varepsilon\right) d\mu = \left(\|g\|_\infty + \varepsilon\right) \int_X |f(x)| d\mu,$$

откуда в силу произвольности ε получаем (14).

Заметим ещё, что *для пространств X конечной меры* имеет место вложение функциональных пространств

$$L_{p_1}(X) \subset L_{p_2}(X) \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant +\infty \tag{15}$$

(мнемоническое правило: знаки наоборот). Докажите это самостоятельно, пользуясь неравенством Гёльдера. Для этого воспользуйтесь тождеством $f(x) = 1 \cdot f(x)$. Более того, вы получите оценку для норм

$$\|f\|_{p_2} \leqslant (\mu(X))^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}} \|f\|_{p_1},$$

из которой, в частности, следует, что из сходимости некоторой последовательности по норме $L_{p_2}(X)$ вытекает её сходимость по норме $L_{p_1}(X)$. (Что совершенно естественно, неотрицательная измеримая функция $|f(x)|^p$, заданная на пространстве X конечной меры, заведомо интегрируема при любом p на подмножестве $\{x \in X \mid |f(x)| \leqslant 1\}$, а на его дополнении до X при уменьшении степени p значение $|f(x)|^p$ только уменьшается.)

Обратное же вложение, вообще говоря, неверно. В качестве примера можно взять функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Можно показать, что $f \in L_1([0; \frac{1}{2}])$, но $f \notin L_p([0; \frac{1}{2}])$ при любом $p > 1$. Действительно,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\ln 2},$$

но

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p \ln^{2p} x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \cdot x^{p-1} \ln^{2p} x} = \infty,$$

поскольку $x^{p-1} \ln^{2p} x \to 0$ при $x \to 0$ и, таким образом, подынтегральная функция растёт при $x \to +0$ быстрее, чем «эталонная» функция $\frac{1}{x}$.

Отметим также, что вложение (15) неверно для пространств X бесконечной меры, как показывает простой пример $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L_2(\mathbb{R})$, $f \notin L_1(\mathbb{R})$.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на все вопросы по ходу текста.

1. Доказать неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{16}$$

где $a, b \geqslant 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, найдя экстремум разности правой и левой части неравенства дифференцированием по одной из переменных a, b и исследовав поведение получившейся функции одной переменной при остальных значениях переменных.

2. Доказать, что при $a, b \geqslant 0$ верны неравенства

$$(a+b)^p \geqslant a^p + b^p \quad \text{при } p \geqslant 1, \tag{17}$$

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p \quad \text{при } p \leqslant 1. \tag{18}$$

3. Доказать с помощью неравенства Чебышёва, что сходимость в $L_p(X)$ влечёт сходимость по мере. Показать на примере (годится один из рассмотренных на семинаре), что поточечная (или почти всюду) сходимость из сходимости в $L_p(X)$ не следует.

4*. (Продолжение.) Доказать для случая пространства X конечной меры *теорему Рисса*: если $f_n \to f$ в $L_p(X)$, где f, f_n — конечные измеримые функции, то существует подпоследовательность f_{n_k}, сходящаяся к f почти всюду:
1) выбрать такую подпоследовательность, что

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$$

(почему это можно сделать?);
2) показать, что при этом для некоторой константы c

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \frac{c}{2^k};$$

3) пользуясь доказанным выше неравенством, образовать из этих разностей ряд, N-е частичные суммы которого равны $f_{n_{N+1}}$, и доказать, что он сходится почти всюду;
4) показать, что сумма построенного ряда почти всюду равна $f(x)$.

5*. Рассмотрим произвольное измеримое по Жордану множество A на плоскости. Легко видеть, что произведение длин отрезков, являющихся его проекциями на оси координат, не меньше площади множества A (потому что проекции определяют прямоугольник, описанный около A). Доказать подобное утверждение для множества в трёхмерном пространстве:

$$\big(V(A)\big)^2 \leqslant S(A_{xy})S(A_{yz})S(A_{xz}),$$

где A_{xy} и т. д. — проекции множества A на координатные плоскости.