ЛЕКЦИЯ 4А

Метрические пространства

1. Простейшие (и важнейшие) свойства метрических пространств

1) *Непрерывность расстояния.* Легко видеть, что функция «расстояние» $\rho(x, y)$ непрерывна по каждому из аргументов. Действительно, из неравенства треугольника при $x_n \to x$ (что по определению сходимости в метрическом пространстве означает не что иное, как $\rho(x_n, x) \to 0$) имеем

$$\rho(x_n, y) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, y),$$
$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y),$$

откуда с учётом $\rho(x_n, x) \to 0$ по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) \leqslant \rho(x, y),$$
$$\rho(x, y) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y)$$

или $\rho(x, y) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) \leqslant \rho(x, y)$. В силу тождества $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для второго аргумента нет необходимости проводить доказательство.

2) *Единственность предела.* Легко видеть, что у последовательности в метрическом пространстве может быть не более одного предела. В самом деле, наличие двух пределов x, x' у последовательности $\{x_n\}$ в силу неравенства треугольника и только что доказанной непрерывности расстояния означало бы, что $0 \leqslant \rho(x, x') \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_n, x') \to 0$, или $0 \leqslant \rho(x.x') \leqslant 0$, откуда $\rho(x, x') = 0$ и по определению расстояния $x = x'$. Однако, имея в виду изучение в скором времени топологических пространств и их свойств, полезно провести доказательство таким образом: в случае наличия двух пределов x, x' можно было бы взять их непересекающиеся окрестности, и тогда вся последовательность $\{x_n\}$, кроме некоторых начальных отрезков, должна была бы находиться в каждой из этих окрестностей, что, очевидно, невозможно. (*Задание.* Доказать, что при $\varepsilon = \rho(x, x')$ $\varepsilon/3$-окрестности точек x и x' действительно не пересекаются.)

3) Наметим наиболее часто встречающуюся *конструкцию пополнения* метрического пространства. Для этого прежде всего введём понятие изометрического вложения метрических пространств. Будем называть отображение $I : M_1 \to M_2$ *изометрическим вложением* пространства M_1 в пространство M_2, если:
1) $D(I) = M_1$;
2) $\forall x', x \in M_1$ верно $\rho(Ix, Ix') = \rho(x, x')$.
(Здесь метрика в обоих пространствах обозначена одним и тем же символом ρ.) Отметим, что из второго условия в силу свойств расстояния автоматически получается взаимная однозначность отображения I. Однако оно может не являться биекцией, т. к., вообще говоря, $IM_1 \subsetneq M_2$.

Будем теперь говорить, что пространство M' есть пополнение пространства M, если существует такое изометрическое вложение $I : M \to M'$, что IM всюду плотно в M'. (Всем известный пример: пополнение множество рациональных чисел до множества действительных чисел.)

Распространённая конструкция пополнения состоит в том, чтобы по данному пространству M построить пространство классов эквивалентности фундаментальных последовательностей элементов M'. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ будем считать эквивалентными, если $\rho(x_n, x'_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Легко видеть, что это условие действительно разбивает все фундаментальные последовательности на непересекающиеся классы. Определим расстояние между двумя классами эквивалентности X, X' формулой $\rho(X, X') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n)$, где $\{x_n\} \in X$, $\{x'_n\} \in X'$ — некоторые последовательности — представители классов. (Понятно, что нужно доказать независимость такого определения от выбора представителей.) Далее, легко видеть, что каждому элементу $x \in M$ можно поставить в соответствие класс $X \in M'$, содержащий стационарную последовательность $\{x, x, \ldots\}$. Поэтому условие 1) выполнено. Условие 2) тоже, потому что при определении расстояний между Ix и Ix' можно в качестве представителей классов выбрать именно стационарные последовательности. Осталось лишь доказать, что IM действительно плотно в M'.

После этого можно «заменить» все те элементы $X \in M'$, которые имеют прообразы в M, на эти самые прообразы, с сохранением прежних расстояний. Тогда пространство M' будет состоять из всех элементов $x \in M$, а также «недостающих» классов эквивалентностей, которые можно рассматривать как новые элементы, являющиеся пределами тех фундаментальных последовательностей в M, которые в M пределов не имели.

2. Некоторые свойства полных метрических пространств

1) *Теорема о вложенных шарах.* Обсудим некоторые условия этой теоремы и их существенность. Понятно, что замкнутость шаров, как и полнота пространства, существенны. В самом деле, открытые шары в $\mathbb{R}$ радиуса $\frac{1}{2n}$ с центрами в точках $x_n = \frac{1}{2n}$, т. е. интервалы $\left(0; \frac{1}{n}\right)$, образуют систему вложенных *открытых* шаров, радиусы которых стремятся к нулю, с пустым пересечением. Можно рассмотреть и аналогичный пример на плоскости (получатся открытые круги, касающиеся внутренним образом). Полнота пространства также существенна: достаточно рассмотреть в $\mathbb{R}$ замкнутые шары (отрезки) с центрами в q_n радиусов $\pi - q_n$, где $q_n \to \pi - 0$, $q_n \in \mathbb{Q}$. Гораздо менее ожидаемо, что нельзя обойтись без условия стремления радиусов шаров к нулю. Приведём соответствующий пример. Рассмотрим метрическое пространство, носителем которого является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, а расстояние между числами введено как

$$\rho^*(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n, \\ 0, & m = n. \end{cases}$$

Выполнение аксиом расстояния проверяется непосредственно. Далее, легко установить полноту пространства: поскольку в нём расстояние между любыми различными точками больше 1, фундаментальными являются лишь финально постоянные (постоянные начиная с некоторого номера) последовательности. Каждая такая последовательность, очевидно, имеет предел. Рассмотрим теперь шары $B_n \equiv \{m \in \mathbb{N} \mid \rho^*(m,n) \leqslant 1 + \frac{1}{2n}\}$. Эти шары замкнуты, т. к. заданы нестрогим неравенством. Далее, условие $\rho^*(m,n) \leqslant 1+\frac{1}{2n}$ равносильно $m \geqslant n$. При $m = n$ (когда формула $\rho(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n}$ не работает) расстояние равно 0. Поэтому $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Тогда очевидно, что $B_{n+1} \subset B_n$, но пересечение всех шаров пусто. Таким образом, имеем последовательность вложенных замкнутых шаров, *радиусы которых не стремятся к* 0, с пустым пересечением.

Ещё проще привести пример последовательности замкнутых вложенных неограниченных множеств в полном пространстве, пересечение которых пусто. Годится система $[n; +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Однако можно снять требование, чтобы рассматриваемые в теореме множества были именно шарами. Достаточно потребовать лишь, чтобы они были ограниченными замкнутыми множествами A_n, диаметры которых стремятся к 0. В самом деле, тогда, взяв произвольным образом в каждом n-ом множестве точку x_n, получим последовательность $\{x_n\}$. Она обладает тем свойством, что $x_n \in A_m$ при всех $n \geqslant m$ (в силу цепочки $x_n \in A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_m$). Поэтому $\{x_n\}$ фундаментальна («хвосты» лежат в стягивающихся множествах). Её предел принадлежит любому из множеств A_n, потому что, опять-таки, все члены последовательности, начиная с n-го, лежат в A_n, которое, как замкнутое, обязано содержат предел последовательности своих элементов $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Единственность же общей точки по-прежнему следует из неограниченного уменьшения диаметров множеств.

2) *Теорема о неподвижной точке, или принцип сжимающих отображений.* Напомним, что отображение f *всего* метрического пространства в себя называется сжимающим, если

$$\exists q < 1 \, \forall x, x' \in M_1 \, \rho(f(x), f(x')) \leqslant q\rho(x, x'). \tag{1}$$

Даже столь несложное утверждение играет существенную роль при обосновании разрешимости некоторых уравнений. Простейший пример — классическая теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для ОДУ с ограниченной, непрерывной по совокупности переменных и Липшиц-непрерывной по функциональной переменной правой частью (см. лекции по ОДУ, 4 семестр). Этот же принцип используется для существенно более сложных уравнений.

Отметим, что условие (1) нельзя заменить на

$$\forall x \neq x' \in M_1 \, \rho(f(x), f(x')) < \rho(x, x'),$$

как показывает пример $y(x) = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. (Исследовать подробно!)

3) *Гомеоморфизм полного и неполного метрических пространств.* Будем называть биекцию между двумя метрическими пространствами гомеоморфизмом, если она непрерывна в обе стороны. Оказывается, полное метрическое пространство может быть гомеоморфно неполному. Пример: $\mathbb{R}$ и $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, гомеоморфизм между которыми осуществляет функция $y = \operatorname{tg} x$.

Мы вернёмся к этому примеру в дальнейшем, когда будем обсуждать понятие компактности в метрических и топологических пространствах.

3. Свойства открытых и замкнутых множеств

Введём прежде всего следующие понятия:
1) точка x называется *предельной точкой* множества A, если любая окрестность точки x содержит точки множества A, отличные от x (можно сказать так: любая *проколотая* окрестность точки x имеет непустое пересечение с множеством A);
2) точка x называется *граничной точкой* множества A, если любая окрестность точки x содержит как точки множества A, так и точки его дополнения;
3) точка x называется *точкой касания* (точкой прикосновения) множества A, если любая окрестность точки x содержит точки множества A (в частности, так будет при $x \in A$ — обратите внимание на отличие от предельной точки!);
4) точка x называется *внутренней точкой* множества A, если некоторая окрестность точки x целиком содержится в множестве A;
5) точка x называется *изолированной точкой* множества A, если $x \in A$, но некоторая проколотая окрестность не содержит точек множества A (можно сказать и так: некоторая окрестность точки x не содержит точек из A, кроме самой точки x).

Здесь важно отметить следующую языковую неточность. Во всех пяти определениях фигурируют слова «точка множества A». Однако только в последних двух речь действительно с необходимостью идёт о принадлежности $x \in A$. Точки первых трёх типов могут как принадлежать, так и не принадлежать A, и слова «точка множества A» в определениях 1)—3) говорят лишь об отношении, в котором точка x находится именно с множеством A, — отношении, не связанном непосредственно с отношением «принадлежать».

После сделанного замечания приведём некоторые примеры.

1. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0; 1) \cup 2$. Тогда:
1) $[0; 1]$ суть предельные точки A;
2) 0, 1 и 2 суть граничные точки A;
3) $[0; 1]$ и 2 суть точки касания A;
4) $(0; 1)$ суть внутренние точки A;
5) 2 — изолированная точка A.

2. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leqslant x < 11\} \cup \{(100, 100)\}$. Тогда:
1) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\}$ суть предельные точки A;
2) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\} \cup \{(100, 100)\}$ суть граничные точки A;
3) точки касания A — те же, что и предельные, и $(100, 100)$;
4) $\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ суть внутренние точки A;
5) $(100, 100)$ — изолированная точка A.

3. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = [0;1) \cap \mathbb{Q}$. Тогда:
1) $[0;1]$ суть предельные точки A;
2) $[0;1]$ суть граничные точки A (почему?);
3) $[0;1]$ суть точки касания A;
4) внутренних точек у A нет;
5) изолированных точек у A нет.

4. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда:
1) 0 — предельная точки A;
2) $0 \cup A$ суть граничные точки A;
3) $0 \cup A$ суть точки касания A;
4) внутренних точек у A нет;
5) множество изолированных точек A совпадает с A.

5. Пусть $M = \mathbb{R}$, $A = (0;1)$. Тогда:
1) $[0;1]$ суть предельные точки A;
2) 0 и 1 суть граничные точки A;
3) $[0;1]$ суть точки касания A;
4) $(0;1)$ суть внутренние точки A;
5) изолированных точек у A нет.

Если вы разобрались с помощью предложенных примеров в типах точек по отношению к заданному множеству в метрическом пространстве, то поняли, в частности, что:
1) точки, *принадлежащие* данному множеству, делятся на внутренние и граничные, в число которых входят изолированные;
2) точки касания делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (среди них могут быть внутренние), так и не принадлежать;
3) граничные точки делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (но не быть внутренними), так и не принадлежать;
4) все изолированные точки множества входят в его границу (т. е. являются граничными), но могут не исчерпывать её;
5) открытое множество целиком состоит из своих внутренних точек (следовательно, не имеет изолированных), а его граничные точки ему не принадлежат
и т. д.

Обсудим теперь возможные (равносильные!) определения замкнутого множества в метрическом пространстве:
1) его дополнение открыто;
2) его замыкание совпадает с ним самим (о замыкании см. ниже);
3) оно содержит все свои граничные точки;

4) оно содержит все свои предельные точки;

5) оно содержит все свои точки касания;

6) для любой последовательности $x_n \to x$, где $x_n \in A$ (A — рассматриваемое множество), $x \in M$, верно $x \in A$.

(Из сделанного выше замечания следует, что слово «свои» здесь не означает a priori принадлежность множеству A).

Нетрудно (хотя и несколько кропотливо) доказать их равносильность.

Напомним:

1) пустое множество и всё пространство являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами;

2) произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств — открытое множество;

3) дополнение открытого множества замкнуто, замкнутого — открыто;

4) произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств — замкнутое множество.

Отметим также важнейшие свойства операции замыкания $A \mapsto \overline{A}$. Прежде всего, ей тоже можно дать несколько определений. Ограничимся следующими:

1) $\overline{A}$ есть множество A плюс все его предельные точки;

2) $\overline{A}$ есть множество всех точек касания множества A;

3) $\overline{A}$ есть множество A плюс все его граничные точки;

4) $\overline{A}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Отметим следующие свойства операции замыкания:

0) $\overline{A}$ — замкнутое множество;

1) $A \subset \overline{A}$, причём равенство имеет место для замкнутых множеств и только для них;

2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

3) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{A_1} \subset \overline{A_2}$;

4) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Обратим внимание, что *обобщение свойства 4) на счётные объединения неверно.* Неверно и обобщение этого свойства на пересечение. Пример к последнему привести совсем просто: $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \overline{\varnothing} = \varnothing$, но $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Однако можно утверждать, что $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Докажем это последнее утверждение. В самом деле, пусть $x \in \overline{A_1 \cap A_2}$. Это означает, что x — точка касания множества $A_1 \cap A_2$, т. е. в любой её ε-окрестности найдётся точка $y_\varepsilon \in A_1 \cap A_2$. Но тогда можно утверждать, что в любой окрестности точки x найдутся точки, принадлежащие как множеству A_1, так и A_2 (подойдёт то же самое y_ε). Таким образом, $x \in \overline{A_1}$ и $x \in \overline{A_2}$, т. е. $x \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

Отметим также следующий факт. Очевидно, что любое подмножество M_1 метрического пространства M само образует (с прежним расстоянием) метрическое пространство. Пусть M полно. Тогда M_1 полно тогда и только когда, когда множество M_1 замкнуто в M. Так, например, любой интервал — неполное метрическое пространство.

4. Некоторые метрические свойства пространств Лебега

Полнота. Доказана на лекции о пространствах Лебега.

Плотное вложение. На прошлом семинаре было отмечено, что для измеримого пространства X конечной меры имеет место вложение пространств Лебега $L_p \subset L_q$ при $1 \leqslant q < p \leqslant +\infty$. Докажем теперь, что это вложение является плотным, т. е. для любой функции $g \in L_q$ и для любого ε найдётся функция $h \in L_p$ такая, что $\|f - h\|_q < \varepsilon$.

Для доказательства заметим прежде всего, что в случае измеримого пространства X конечной меры любая ограниченная измеримая функция f принадлежит любому $L_p(X)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Таким образом, достаточно доказать, что **ограниченные измеримые функции плотны в L_q,** $1 \leqslant q < +\infty$ (напоминаем, что речь идёт о множествах конечной меры).

Итак, пусть $g \in L_q(X)$ и $\varepsilon > 0$. Наша задача — построить ограниченную измеримую функцию f такую, что $\|f - g\|_q < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$\int_X |f - g|^q d\mu < \varepsilon^q. \tag{2}$$

Наша идея состоит в том, что, во-первых, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега интеграл от любой интегрируемой на X по Лебегу функции по множеству достаточно малой меры достаточно мал, а во-вторых, в силу неравенства Чебышёва мера множества, где функция очень велика, очень мала. Поэтому если переопределить функцию g нулём там, где она слишком велика, то интеграл от её модуля (как ни странно!) мало изменится. (На самом деле совсем не странно: вспомните определение сходимости несобственного интеграла Римана второго рода). Приступим теперь к реализации намеченной программы.

Заметим прежде всего, что, положив

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & |g|^q < M, \\ 0, & |g|^q \geqslant M \end{cases} \tag{3}$$

(измеримости такой функции очевидно следует из измеримости g), получим

$$\int_X |f - g|^q d\mu = \int_{B \equiv \{x \in X \,|\, |g|^q \geqslant M\}} |g|^q d\mu. \tag{4}$$

Теперь, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, выберем такое δ, что для любого множества e с $\mu(e) < \delta$ верно неравенство

$$\int_e |g|^q d\mu < \varepsilon^q. \tag{5}$$

Далее, выберем $M > 0$ в (3) таким, чтобы выполнялось

$$\frac{\int_X |g|^q d\mu}{M} \equiv \frac{\|g\|_q^q}{M} < \delta. \tag{6}$$

Тогда в силу неравенства Чебышёва для неотрицательной функции $|g|^q$ имеем

$$\mu\{x \in X \mid |g|^q \geqslant M\} \leqslant \frac{\int_X |g|^q d\mu}{M} < \delta. \tag{7}$$

Но тогда в выражении (4) имеем $\mu(B) < \delta$, откуда в силу (5)

$$\int_X |f - g|^q d\mu = \int_B |g|^q d\mu < \varepsilon^q,$$

т. е. не что иное, как (2).

Свойства метрических пространств, связанные с компактностью (полная ограниченность, сепарабельность, пространства непрерывных функций и теорема Арцела), будут рассмотрены в дальнейшем, при изучении общего понятия компактности для топологических пространств. То же относится к понятию базы и аксиомам счётности.

Задачи для самостоятельного решения

0. Убедиться в том, что следующие множества с указанной функцией $\rho(x, y)$ являются метрическими пространствами:
1) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}}(|x_i - y_i|)$;
2) $\mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
3) любое множество M с $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$, $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$.

1. Убедиться в том, что открытый шар открыт, а замкнутый шар замкнут (приняв любое определение замкнутости).

2. Пусть $\rho(x, y)$ — метрика в некотором метрическом пространстве. Доказать, что тогда

$$\rho'(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

— тоже метрика, причём класс сходящихся последовательностей при этих двух метриках один и тот же и предел у каждой сходящей последовательности не меняется.

3*. Провести более детально конструкцию пополнения, восполнив все детали рассуждения. В частности, надо доказать, что введённые нами отношение эквивалентности между фундаментальными последовательностями действительно удовлетворяет требованиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

4. На столе на кафедре лежит карта Москвы. Доказать, что её можно проткнуть иголкой так, что проткнутая точка на карте будет соответствовать (в смысле картографического изображения) проткнутой точке на столе.

5*. (Продолжение.) Тот же вопрос для карты, висящей на стене. (Здесь требуется придать соответствию точек более строгий смысл.)

6. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ пересечение вложенных непустых ограниченных замкнутых множеств всегда непусто (независимо от стремления их диаметров к нулю).

7. Объяснить подробно все примеры раздела 3.

8. Верны ли следующие утверждения для произвольного фиксированного множества:
1) каждая его предельная точка есть его точка касания;
2) каждая его внутренняя точка есть предельная точка;
3) каждая его точка касания — либо внутренняя точка, либо изолированная точка;
4) множество всех его граничных точек вместе с множеством всех его внутренних точек есть само множество A;
5) множество всех его внутренних точек вместе с множеством всех его изолированных точек есть само множество A?

9. Верны ли следующие утверждения:
1) замкнутое множество не имеет внутренних точек;
2) замкнутое множество не может состоять из одних только внутренних точек;
3) все точки открытого множества суть его точки касания?

10. Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замкнутого множества.

11 Доказать равносильность хотя бы некоторых (* — всех) определений замыкания.

12. Доказать хотя бы некоторые (* — все) свойства замыкания.

13. Решить задачу 8* из семинара 1.

14. Привести пример счётного пересечения открытых множеств, дающего замкнутое множество; привести пример счётного объединения замкнутых множеств, дающего открытое множество.

15. Привести пример метрического пространства, имеющего более 2-х открыто-замкнутых подмножеств.

16. Привести пример, показывающий, что свойство 4) операции замыкания не выполняется для счётных объединений. (*Указание.* Подходящий пример есть в тексте.)

17. Доказать утверждение, сформулированное в конце раздела 3.

18. Показать, что множество $C(M_1, M_2)$ непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в метрическое пространство M_2 и принимающих значения в некотором шаре $B \subset M_2$, само образует метрическое пространство. Как называется сходимость по метрике этого пространства?

19*. (Продолжение.) Доказать, что в случае полноты M_2 пространство $C(M_1, M_2)$ также полно. (Почему приём, используемый в доказательстве, называют $\frac{\varepsilon}{3}$ -приёмом?)

20*. Показать, что в пространстве $L^1(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, плотны даже непрерывные функции.

21. Являются ли замкнутыми подмножествами в $C[a; b]$:
1*) подмножество всех многочленов степени не выше n;
2) подмножество всех многочленов;
3) подмножество всех непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a; b]$?