ЛЕКЦИЯ 5А

Топологические пространства

0. Открытые множества и окрестности

Установим сначала одно простое, но важное утверждение, демонстрирующее то общее, что есть у понятия открытого множества в топологическом пространстве и его частного случая — открытого множества в метрическом пространстве. Напомним только прежде, что **в топологическом пространстве открытыми называются в точности те множества, которые входят в топологию**.

Теорема 0. Для того чтобы множество A в топологическом пространстве было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало окрестность каждой своей точки.

Доказательство. Необходимость очевидна: открытое множество само является окрестностью любой своей точки и содержит самого себя как подмножество. Достаточность тоже доказывается просто: если множество A вместе с любой своей точкой содержит некоторую её окрестность, то оно является объединением этих окрестностей, а поскольку они суть открытые множества, то и множество A открыто.

Теорема доказана.

Замечание. Иногда применяется несколько другая терминология, а именно окрестностью точки x называется любое множество A, содержащее некоторое открытое множество O, содержащее точку x. Наша же окрестность в этом случае называется открытой окрестностью. (Будьте внимательны при чтении книг!) Мы этой терминологией, по крайней мере в данном семинаре, пользоваться не будем.

1. База топологии

Напомним, что такое база топологии.

Определение 1. Пусть $T \equiv (X, \tau)$ — некоторое топологическое пространство. Семейство его подмножеств $\mathfrak{B}$ называется *базой* топологии τ, если:
1) $\mathfrak{B} \subset \tau$, т. е. база состоит только из открытых множеств;
2) любое открытое множество представимо в виде объединения некоторой подсистемы множеств из $\mathfrak{B}$.

Отметим сразу, что поскольку топология (т. е. система подмножеств τ множества X) замкнута относительно произвольных объединений, то можно утверждать, что *любое* объединение множеств из базы является открытым (входит в топологию).

1. В метрическом пространстве с естественной топологией (т. е. топологией, состоящей в точности из всех открытых в смысле метрического пространства множеств) в качестве базы можно выбрать все шары (произвольного радиуса).

Мы не будем доказывать этот факт непосредственно, потому что он будет следовать из общего критерия того, является ли данное семейство множеств базой данной топологии. Этот критерий будет установлен в теореме 2. Прежде мы установим условие, необходимое и достаточное для того, чтобы рассматриваемое семейство множеств вообще могло быть базой (некоторой, не обязательно исходной) топологии.

Теорема 1. Рассмотрим непустое семейство $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ подмножеств непустого множества X. Оно является базой некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:
1) для любой точки $x \in X$ найдётся $G \in \mathcal{G}$ такое, что $x \in G$;
2) для любых двух множеств $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ и любой точки $x \in G_1 \cap G_2$ найдётся множество $G_3 \in \mathcal{G}$ такое, что $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Доказательство. Установим сначала необходимость сформулированных условий. В самом деле, условие 1) означает тот факт, что всё множество-носитель X, будучи открытым множеством в T, представимо в виде объединения некоторых множеств из базы. Для доказательства 2) заметим, что любое множество из базы само открыто, а поэтому пересечение двух таких множеств снова открыто и должно быть представимо в виде объединения некоторых множеств из базы. Среди этих последних и найдётся то, которое содержит точку x (и при этом, конечно, содержится в $G_1 \cap G_2$).

Теперь установим достаточность. Именно, докажем, что класс $\tau(\mathcal{G})$ всевозможных объединений множеств из семейства $\mathcal{G}$ удовлетворяют условиям, предъявляемым к топологии. В самом деле, всё X содержится в $\tau(\mathcal{G})$ в силу условия 1). Пустое множество тоже (как объединение пустого семейства множеств из $\mathcal{G}$). Далее, объединение некоторого семейства объединений множеств из $\mathcal{G}$ снова будет объединением некоторого семейства множеств из $\mathcal{G}$. Чуть сложнее с конечным пересечением. Достаточно проверить для пересечения двух множеств. Пусть $A = \cup_\alpha G_\alpha$, $B = \cup_\alpha G_\alpha$. Тогда $A \cap B = \cup_{\alpha,\beta}(G_\alpha \cap G_\beta)$ (проверьте!). Но из условия 2) следует, что каждое $G_\alpha \cap G_\beta$ содержится в $\tau(G)$ (проверьте!). Осталось лишь снова перейти к объединению.

Теорема доказана.

Замечание. Настоятельно рекомендуется проиллюстрировать условия рисунком. То же относится к теоремам 2, 3, 3а.

Теорема 2. Для того чтобы система $\mathcal{G} \subset \tau$ была базой данной топологии τ, необходимо и достаточно выполнения условия
3) для каждого открытого множества G и каждой содержащейся в нём точки x найдётся множество $G_x \in \mathcal{G}$ такое, что $x \in G_x \subset G$.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{G} \subset \tau$ — база топологии τ, то открытое множество G представимо в виде объединения некоторых множеств из $\mathcal{G}$, откуда и следует 3). Обратно, если верно 3), то, очевидно, всякое множество из топологии представимо в виде объединения множеств из $\mathcal{G}$. С другой стороны, поскольку $\mathcal{G} \subset \tau$ и топология замкнута относительно произвольных объединений, «чужих» (не входящих в τ) множеств среди объединений множеств из $\mathcal{G}$ не будет.

Теорема доказана.

Замечание. Обратите внимание, что требовать выполнения условий 1), 2) не нужно: условия 3) при заданной топологии уже достаточно, чтобы система $\mathcal{G}$ была базой (причём именно заданной топологии). Напротив, теорема 1 не требует предварительного введения топологии и позволяет проверить, может ли система $\mathcal{G}$ позволить построить топологию, где $\mathcal{G}$ являлась бы базой. Таким образом, роль этих теорем несколько различна.

Теперь легко видеть, что открытые шары произвольных радиусов (или даже лишь открытые шары радиусов $1/n$, $n \in \mathbb{N}$), образуют базу в произвольном метрическом пространстве. При этом условие 3) применительно к метрическим пространствам в случае выбора базы всех открытых шаров есть не что иное, как *определение* открытого множества в метрическом пространстве. Таким образом, если бы мы хотели начать изложение теории топологических пространств в полной аналогии с теорией метрических, нам бы пришлось сначала задать базу, т. е. некоторое семейство подмножеств, удовлетворяющих условиям 1), 2), затем ввести понятие топологии как семейства всевозможных объединений множеств из базы, а лишь затем ввести критерий, сформулированный в теореме 2.

2. База, локальная база и фундаментальная система окрестностей

Давайте несколько «развернём» теорему о ФСО из лекции, сформулировав её в виде нескольких утверждений. Они будут полезны в качестве критериев того, может ли данная система множеств быть фундаментальной системой окрестностей и задавать топологию, что важно, т. к. часто топологию проще задать именно в терминах окрестностей (а не базы и тем более не всей топологии).

Теорема 3. Множество окрестностей τ_x каждой точки x топологического пространства $T = (T, \tau)$ обладает следующими свойствами:

1) τ_x непусто и если $U \in \tau_x$, то $x \in U$;

2) если $U, V \in \tau_x$, то существует некоторая окрестность $W \in \tau_x$ такая, что $W \subset U \cap V$;

3) если $U \in \tau_x$, то для каждого $y \in U$ найдётся $V \in \tau_y$ такое, что $V \subset U$.

Доказательство. Свойство 1) тривиально, т. к. $X \in \tau_x$, а любое множество из системы τ_x содержит точку x просто по определению τ_x. Свойство 2) доказать не менее просто: достаточно взять в качестве W само $U \cap V$: очевидно, что это множество открыто и содержит точку x и поэтому принадлежит τ_x. Наконец, в 3) в качестве V можно положить само U, ведь по условию U открыто и содержит точку y.

Теорема доказана.

Однако гораздо более существенно, что те же свойства выполняются не только для семейств всех окрестностей τ_x, но и для локальных баз ν_x.

Теорема 3а. Локальная база окрестностей ν_x каждой точки x топологического пространства $T = (T, \tau)$ обладает следующими свойствами:

1) ν_x непусто и если $U \in \nu_x$, то $x \in U$;

2) если $U, V \in \nu_x$, то существует некоторая окрестность $W \in \nu_x$ такая, что $W \subset U \cap V$;
3) если $U \in \nu_x$, то для каждого $y \in U$ найдётся $V \in \nu_y$ такое, что $V \subset U$.

Доказательство. Утверждение $x \in U$ по-прежнему тривиально. Далее, чтобы доказать непустоту ν_x, возьмём сначала $X \in \tau_x$, а тогда по определению ν_x найдётся некоторое $V \in \nu_x$ ($V \subset X$). Свойство 2) не менее просто: $U \cap V \in \tau_x$, и снова по определению локальной базы найдётся содержащаяся в $U \cap V$ окрестность W из локальной базы. Та же идея работает в 3): в прошлом доказательстве уже заметили, что $U \in \tau_y$, но тогда найдётся окрестность $V \in \nu_y$ точки y, содержащаяся в U.

Теорема доказана.

Наконец, верна следующая важная

Теорема 4. Если в каждой точке $x \in X$ задан класс ν_x подмножеств множества X и семейство $\{\nu_x \mid x \in X\}$ удовлетворяет свойствам 1)—3) из теоремы 3а, то на X существует единственная топология τ, в которой классы ν_x являются локальными базами. При этом совокупность $\cup_{\{x \in X\}} \nu_x$ является базой этой топологии.

Теорема фактически доказана на лекции. Рекомендуется её «передоказать» с использованием теорем 1, 2.

Теперь мы можем задавать топологию в пространстве с помощью ФСО, т. е. фактически просто задав базы окрестностей для каждой точки пространства. Надо лишь проверить, что эти базы удовлетворяют условиям теоремы 4 (т. е. выполнены свойства 1)—3) из теоремы 3).

3. Относительная (индуцированная) топология. Первая аксиома счётности. Контрпример

Теорема 5. Пусть $T = (X, \tau)$ — топологическое пространство. Пусть A — произвольное непустое его подмножество. Положим

$$\tau_A = \{V \cap A \mid V \in \tau\}.$$

Тогда (A, τ_A) — топологическое пространство.

(Проверить самостоятельно, что для τ_A выполнены аксиомы топологии.)

2. Несколько модифицируем пример, рассмотренный на лекции. Именно, пусть $B(X)$ — пространство всех *ограниченных* функций на метрическом пространстве X, где, например, $X = [0; 1]$. Проверим, что окрестности, описанные в примере 4 лекции, действительно удовлетворяют условиям 1)—3).

Условие 1) проверяется тривиально. Условие 2) — тоже просто, потому что можно взять

$$V_{x,t_1,\dots,t_n,\widetilde{t_1},\dots,\widetilde{t_m},\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \subset V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon_1} \cap V_{x,\widetilde{t_1},\dots,\widetilde{t_m},\varepsilon_2}$$

(проверить указанное вложение!). Наконец, если $y \in V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon}$, то

$$V_{y,t_1,\dots,t_n,\delta} \subset V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon}$$

при $\delta = \varepsilon - \max_{i=\overline{1,n}} |y(t_i) - x(t_i)|$.

Заметим кстати, что такое пространство не удовлетворяет первой аксиоме счётности (а следовательно, и второй).

В самом деле, если нам удалось представить базу окрестностей некоторой функции $x(t)$ в виде последовательности, то мы получим не более чем счётное множество T (как объединение счётного семейства конечных множеств) точек t_i, входящих в определения этих окрестностей. Возьмём теперь некоторое $\tilde{t} \in [0;1]$, не входящее в T. Построим окрестность

$$\widetilde{V} \equiv V_{x,\tilde{t},1}$$

и убедимся, что нет ни одной окрестности из нашей последовательности, вложенной в $\widetilde{V}$. В самом деле, какова бы ни была окрестность

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}, \tag{1}$$

найдётся функция $y(t) \in B(X)$, отличающаяся от $x(t)$ в точке t_1 более чем на ε и поэтому не попадающая в (1), но совпадающая с $x(t)$ в точке $\tilde{t}$ и поэтому попадающая в $\widetilde{V}$. Таким образом,

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} \not\subset \widetilde{V}.$$

Замечание. Видно, что существенно использовалась несчётность области определения функций. Наше рассуждение не прошло бы, если бы X было не более чем счётно.

Теперь заметим, что в нашем примере $C[0;1] \subset B[0;1]$, поэтому, пользуясь понятием относительной топологии, мы «бесплатно» получаем, что введённая с помощью указанных окрестностей топология может быть сужена на пространство непрерывных функций. Таким образом, для случая компактного X мы автоматически доказали, что приведённый в лекции пример окрестностей действительно задаёт топологию. Впрочем, выполненную нами для $B(X)$ проверку можно было столь же непосредственно провести и для $C(X)$.

4. Замыкание и внутренность

3. Приведём один из большого количества «странных» примеров, показывающих, насколько осторожно следует обращаться с понятиями замыкания, внутренности, границы и т. п. даже в метрическом пространстве. Пусть рассматривается пространство $M = [0;1]$ со стандартной метрикой, $A = [0;1] \setminus \mathbb{Q}$. Тогда A является собственным подмножеством своей границы, т. е. $\mathrm{b}(A) \supsetneq A$!

5. Пересечение топологий

Пусть X — некоторое пространство-носитель. Предположим, на нём задано некоторое семейство топологий $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Легко видеть, что пересечение любого семейства топологий

$$\tau = \bigcap_{\alpha \in A'} \tau_\alpha, \quad A' \subset A,$$

тоже является топологией (возможно, антидискретной). В самом деле, пустое множество и всё X входят во все пересекаемые топологии, а поэтому и в τ. Далее, если семейство множеств $\{G_\beta \mid \beta \in B\}$ входит в τ, то оно — по определению пересечения — обязано входить в каждую из топологий τ_α, $\alpha \in A'$. Но поскольку любая топология замкнута относительно произвольных объединений и конечных пересечений, то все τ_α, $\alpha \in A'$, а с ними и их пересечение τ, содержат $\cup_{\beta\in B} G_\beta$, причём если B — конечное множество индексов, то то же верно и для пересечения $\cap_{\beta\in B} G_\beta$.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы по ходу текста.

1. Пусть $X = \{0; 1\}$, $\tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}$. Проверить, что (X, τ) — топологическое пространство. Выполнена ли в нём аксиома отделимости Хаусдорфа?

2. Пусть X — некоторое несчётное множество, например $X = [0; 1]$. Объявим в нём открытыми:

а) все не более чем счётные множества и само X;

б) пустое множество и множества, дополнения которых не более чем счётны.

Будут ли такие определения корректными (удовлетворяющими аксиомам топологии)? Если да, то выяснить, удовлетворяют ли такие пространства аксиоме отделимости Хаусдорфа.

3. Пусть $T_1 = (X, \tau_1)$, $T_2 = (X, \tau_2)$ — два топологических пространства с общим носителем X, причём топология τ_2 сильнее (тоньше) топологии τ_1. Какое из вложений в этом случае непрерывно: T_1 в T_2 или наоборот?

4. Проверить, что пересечение прообразов есть прообраз пересечения, и то же для объединений. Именно, пусть $f : X \to Y$ — отображение с областью определения X и множеством значений Y (не обязательно взаимно однозначное). Прообразом $f^{-1}(A)$ множества $A \subset Y$ в этом случае называется множество *всех* тех $x \in X$, для которых $f(x) \in A$. Тогда

$$f^{-1}\left(\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \cup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(A_\gamma), \quad f^{-1}\left(\cap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \cap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(A_\gamma).$$

5. (Продолжение.) Назовём прообразом системы σ подмножеств множества Y совокупность всех прообразов множеств из системы σ: $f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma\}$. Проверить, что прообраз топологии на Y есть топология на X (конечно, не обязательно исходная, если на X уже была введена топология).

6. (Продолжение.) Сформулировать условие непрерывности отображения $f : X \to Y$ (по Коши) в терминах сравнения топологий.

7*. Доказать, что в топологическом пространстве T со счётной базой из любого покрытия пространства можно извлечь не более чем счётное подпокрытие.

8. Придумать топологию τ на $\mathbb{R}$, для которой топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau)$ компактно.

9*. Придумать топологию на $\mathbb{R}$, в которой объединение любых открытых множеств замкнуто.

10. Привести пример топологического (возможно, метрического) пространства и множества A в нём такого, что A является собственным подмножеством внутренности своей границы!

11. Доказать, что пространство, не удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа, не является метризуемым.

12. Доказать, что пространство, не удовлетворяющее I аксиоме счётности, не является метризуемым.

13. Привести пример метрического пространства, не удовлетворяющего II аксиоме счётности.

14*. Нам известны следующие свойства замыкания (теперь не только в метрическом, но и в произвольном топологическом пространстве):
1) $A \subset \overline{A}$;
2) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$;
3) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
Доказать, что можно определить топологию исходя из операции замыкания. Именно, если для непустого множества X дано отображение $\overline{} : 2^X \to 2^X$ (словами: операция из семейства всех подмножеств множества A в это же семейство подмножеств) и оно удовлетворяет условиям 1)—4), то можно объявить замкнутыми все множества $A \subset X$, для которых $\overline{A} = A$, их дополнения — открытыми, и тогда для семейства открытых множеств будут выполнены все аксиомы топологии. (*Предостережение.* Не забудьте проверить наличие в топологии всего X и пустого множества.)
Таким образом, мы получили ещё один (помимо базы и ФСО) «косвенный» способ задания топологии в пространстве.

15*. (Продолжение.) Показать, что от условия 3) нельзя отказаться (не все аксиомы топологии будут выполнены).

16. Доказать, что при выполнении аксиомы отделимости Хаусдорфа выполняется и более слабое условие отделимости (назовём его T_1): любые 2 различные точки пространства имеют окрестности, не содержащие вторую точку из пары.

17*. Доказать, что условие T_1 в точности равносильно условию замкнутости всех конечных подмножеств X.

18*. Доказать, что в пространстве, удовлетворяющем условию T_1 (в частности, в пространстве, удовлетворяющем аксиоме отделимости Хаусдорфа), точка x является предельной для множества M тогда и только тогда, когда любая окрестность содержит бесконечно много точек из M.

19. Доказать, что в пространстве, удовлетворяющем I аксиоме счётности, можно выбрать счётную локальную базу $\{O_{x,n}\}$ каждой точки x так, что $O_{x,1} \supset O_{x,2} \supset \ldots$.

20*. (Продолжение.) Доказать, что в пространстве, удовлетворяющем I аксиоме счётности (а следовательно, в любом метрическом пространстве), точка x является предельной для множества M тогда и только тогда, когда существует последовательность точек из M, отличных от x, сходящаяся к x.

21. Подобно тому как замыкание произвольного множества A в метрическом или топологическом пространстве можно определить как наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее A, т. е. попросту *пересечение* всех замкнутых множеств, содержащих A (хотя бы одно такое множество — X — существует), подобно тому как для произвольной системы σ подмножеств данного множества можно определить наименьшее кольцо множеств, содержащее все множества системы σ (см. семинар 2 и задачи к нему), можно построить и наименьшую топологию, содержащую совершенно произвольную систему подмножеств σ непустого множества X. Провести соответствующее рассуждение. (*Предостережение.* Не забудьте проверить непустоту того класса топологий, который возникнет в доказательстве.)

22*. Пусть A, B — некоторые подмножества топологического пространства T. Пусть пересечение $A \cap B$ непусто.

1) Можно ли утверждать, что объединение $A \cup B$ связно?

2) Какое условие надо добавить, чтобы это объединение было связно?

(Множество C в топологическом пространстве называется связным, если оно связно как топологическое пространство в относительной топологии τ_C, т. е. если τ_C не содержит других открыто-замкнутых множеств, кроме $\varnothing$ и C.)