# ЛЕКЦИЯ 7А

## Векторные топологические пространства

### 1. Выпуклые множества

Докажем некоторые свойства выпуклых множеств, непосредственно следующее из их определения.

1) Пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество. Действительно, либо $E = \cap_{\alpha\in A} E_\alpha$ пусто (и, тем самым, выпукло), либо непусто. В последнем случае рассмотрим произвольные точки $x, y \in E$ (не обязательно различные). Тогда получим:

$$x, y \in E \Rightarrow \forall \alpha \in A\ x, y \in E_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in A, \forall \lambda \in [0;1]\ \lambda x + (1-\lambda)y \in E_\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \lambda \in [0;1]\ \lambda x + (1-\lambda)y \in E.$$

С другой стороны, объединение выпуклых множеств, вообще говоря, таковым не является (достаточно взять два непересекающихся непустых множества или «собрать» из прямоугольников «уголок»).

2) Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0, \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1, \end{cases} \tag{1}$$

а $x_1, \ldots, x_n$ суть некоторые элементы выпуклого множества $E$. Тогда $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in E$.

Докажем это по индукции. Её база — $n = 2$ — есть непосредственно определение выпуклого множества. Далее, выведем справедливость утверждения для $n+1$ из его справедливости для $n$. Пусть для чисел $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ выполнены условия, аналогичные (1). Тогда положим

$$\gamma = \beta_1 + \ldots + \beta_n, \quad \alpha_i = \frac{\beta_i}{\gamma}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Легко видеть, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

Тогда если $x_1, \ldots, x_{n+1} \in E$, то по предположению индукции $x \equiv \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in E$. Далее, поскольку $\gamma + \beta_{n+1} = (\beta_1 + \ldots + \beta_n) + \beta_{n+1} = 1$, имеем по определению выпуклого множества $\gamma x + \beta_{n+1} x_{n+1} \in E$. Поскольку $\gamma x + \beta_{n+1} x_{n+1} \equiv \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_{n+1} x_{n+1}$, требуемое утверждение доказано.

### 2. Непосредственные следствия аксиом. Некоторые ограничения на топологию

Требование непрерывности операции сложения приводит к инвариантности топологии относительно переносов. Именно, каковы бы ни были открытое множество $O \subset X$ и элемент $x \in X$, множество $O + x \equiv \{z = y + x \mid y \in O\}$ тоже открыто.

В самом деле, докажем, что из непрерывности по совокупности переменных следует непрерывность по отдельным переменным. Именно, по определению непрерывности сложения имеем

$$\forall x_0, y_0 \in X, \forall O_{x_0+y_0} \in \tau_{x_0+y_0}\ \exists O_{x_0} \in \tau_{x_0}, O_{y_0} \in \tau_{y_0}\ \forall x \in O_{x_0}, y \in O_{y_0}\ x + y \in O_{x_0+y_0}. \tag{2}$$

Поскольку при любом выборе $O_{y_0} \in \tau_{y_0}$ имеем $y_0 \in O_{y_0}$, из (2) следует, что при указанном выборе $O_{x_0} \in \tau_{x_0}$ верно $x + y_0 \in O_{x_0+y_0}$, т. е. сложение непрерывно и по отдельным переменным. Но тогда можно воспользоваться эквивалентным определением непрерывности в топологическом пространстве («прообраз открытого открыт») и заметить, что $O + x$ есть прообраз открытого множества $O$ при отображении $y \mapsto y - x \equiv y + (-x)$. (Очевидно, аналогичным образом можно установить и непрерывность умножения отдельно по числовой и векторной переменной.)

Из только что доказанного вытекает важное следствие: **топология в векторном топологическом пространстве полностью определяется окрестностями нуля**. Действительно, каково бы ни было $O \in \tau$, для любой точки $x \in O$ множество $O - x$ будет окрестностью нуля. Обратно, каковы бы ни были окрестность нуля $U_\theta$ и элемент $x \in X$, имеем $U_\theta + x \in \tau$. Поэтому в дальнейшем удобно следить именно за окрестностями нуля.

Также из инвариантности топологии относительно переносов следует, что если $A \in \tau$, $B$ — произвольное множество, то $A + B \equiv \{x + y \mid x \in A, y \in B\} \in \tau$. Действительно, формула $A + B = \cup_{y \in B}(A + y)$ есть не что иное, как представление множества $A + B$ в виде объединения открытых множеств $A + y$.

Отметим теперь, какие ограничения на топологию накладывает требование непрерывности умножения. Каковы бы ни были окрестность нуля $U_\theta$ и число $\lambda \neq 0$, $\lambda U_\theta$ также есть окрестность нуля. В самом деле, $\lambda U_\theta$ есть прообраз $U_\theta$ при умножении на $\lambda^{-1}$ и $\lambda U_\theta \ni \theta$. Однако не все топологии, удовлетворяющие этому условию, могут быть топологиями в ВТП. Например, дискретная топология (все множества открыты) не подходит. Показательно, что она удовлетворяет условию непрерывности сложения, но «навязанная извне» метрическая топология числовых полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ «мешает». В самом деле, нужно, чтобы выполнялось требование

$$\forall x_0 \in X, \forall \lambda_0, \forall O_{\lambda_0 x_0} \in \tau_{\lambda_0 x_0}\ \exists O_{x_0} \in \tau_{x_0}, \delta > 0\ \forall x \in O_{x_0}, \forall \lambda, |\lambda - \lambda_0| < \delta\ \lambda x \in O_{\lambda_0 x_0}. \tag{3}$$

Но это требование не может быть выполнено в дискретной топологии, например, для $\lambda = 1$. Выберем произвольный элемент $x_0 \neq \theta$ и возьмём в качестве $O_{1 \cdot x_0}$ одноточечное множество $\{x_0\}$. Тогда, какую бы мы ни выбрали $O_{x_0}$, в ней обязательно будет содержаться $x_0$ (по определению окрестности), а сколь бы малое мы ни взяли $\delta$, в шаре $\{\lambda \mid |\lambda - 1| < \delta\}$ найдутся $\lambda \neq 1$, а для них $\lambda x_0 \neq x_0$.

По аналогичным причинам топология в векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ не может быть задана фундаментальной системой окрестностей вида горизонтальных интервалов $((x_1, y); (x_2, y))$, хотя такие окрестности удовлетворяют всем условиям относительно ФСО топологического пространства (не ВТП!).

Предыдущие контрпримеры обладают общим свойством: в них существуют точки $x_0$ и окрестности нуля $U_\theta$ такие, что

$$\text{ни при каких } t > 0 \text{ не выполняется } x_0 \in tU_\theta. \tag{4}$$

Заметим, что для ВТП выполняется свойство, даже более сильное, чем отрицание (4), а именно, для любых $x_0 \in X$ и любой $U_\theta \in \tau_\theta$ найдётся такое $s > 0$, что

$$\text{при всех } t > s \text{ выполняется } x_0 \in tU_\theta. \tag{5}$$

(Заметим, что (5) есть не что иное, как утверждение о том, что любое одноточечное множество — а следовательно, и любое конечное — является в ВТП ограниченным. Этот факт был использован в лекции при построении слабых топологий.) Для доказательства (5) достаточно воспользоваться условием непрерывности умножения (3), из которого следует, что

$$\forall x_0 \in X, \forall O_{0\cdot x_0=\theta} \in \tau_\theta \ \exists \delta > 0 \ \forall \lambda, |\lambda| < \delta \ \lambda x_0 \in O_\theta,$$

поскольку точка $x_0$ автоматически входит в любую свою окрестность. Таким образом, при всех $t > \frac{1}{\delta}$ выполнено $x_0 \in tU_\theta$, что и требовалось.

### 3. Полунормы. Примеры

Рассмотрим простые примеры полунорм в известных пространствах.

1. На $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ можно положить $p_1(z) = |\operatorname{Re} z|$. Легко видеть, что система, состоящая из одной такой полунормы, не будет разделяющей. Она станет таковой, если добавить полунорму $p_2(z) = |\operatorname{Im} z|$. Если вспомнить построение окрестностей нуля в виде конечных пересечений множеств вида $V(p,n) = \{x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n}\}$, то станет ясно, что система двух только что введённых полунорм на $\mathbb{C}$ порождает окрестности типа вертикальных $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{n}$ и горизонтальных $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{m}$ полос, а также прямоугольников $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{n}$, $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{m}$.

2. На линейном пространстве $l^p$ последовательностей $x = \{x_n\}$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, можно ввести как полунормы $p_n(x) = |x_n|$, образующие разделяющее семейство, если $n$ «пробегает» $\mathbb{N}$, так и полунорму (норму) $p(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, образующую разделяющее семейство.

3. На линейном пространстве $B[0;1]$ всех ограниченных на отрезке $[0;1]$ функций можно ввести разделяющее семейство полунорм $\{p_x(f)\}_{x\in[0;1]}$, $p_x(f) = |f(x)|$. На его подпространстве $C[0;1]$ для построения разделяющей системы можно обойтись его счётным подсемейством $\{p_r(x)\}_{r\in[0;1]\cap\mathbb{Q}}$.

4. На линейном пространстве целых комплексных функций можно ввести счётное разделяющее семейство полунорм $p_n(f) = |f^{(n)}(0)|$ (где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Действительно, целые функции на всей комплексной плоскости представляются рядом Маклорена, коэффициенты которого с точностью до константы равны введённым полунормам.

## 4. Полунормы и топология

Как мы знаем, топологию можно задать с помощью семейства полунорм $\{p\}$. Для этого сначала строят базу окрестностей нуля, состоящую из всех возможных *конечных* пересечений множеств вида

$$V(p,n) = \left\{ x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n} \right\}. \tag{6}$$

Легко видеть, что множества (6) абсолютно выпуклые и поглощающие (доказать!), но не обязательно ограниченные (см. полосы в примере 1 предыдущего параграфа). Убедимся, что топология, введённая с помощью такой базы окрестностей нуля, согласована с линейной структурой пространства. Надо проверить, что умножение на число и сложение непрерывны относительно построенной топологии.

Вначале убедимся, что выполнено требование (3). Прежде всего представим себе, что у нас имеется лишь одна полунорма. Тогда достаточно доказать, что, каковы бы ни были $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, найдутся такие $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, что при $p(x - x_0) < \frac{1}{m}$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ выполнено $p(\lambda x - \lambda_0 x_0) < \frac{1}{n}$. Для этого, пользуясь свойствами полунормы, запишем оценку

$$\begin{aligned} p(\lambda x - \lambda_0 x_0) &= p(\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0) \leqslant p(\lambda(x - x_0)) + p((\lambda - \lambda_0)x) \leqslant \\ &\leqslant |\lambda| p(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p(x) < (|\lambda_0| + \varepsilon) p(x - x_0) + \varepsilon(p(x_0) + p(x - x_0)) < \\ &< (|\lambda_0| + \varepsilon)\frac{1}{m} + \varepsilon(p(x_0) + \frac{1}{m}). \end{aligned} \tag{7}$$

Легко видеть, что достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ правая часть действительно достаточно мала.

Заметим, что окрестности точек $x \in X$ суть произвольные объединения конечных пересечений $V$ множеств вида $V(p,n) + y$ $(y \in X)$. Поэтому для доказательства (3) в общем случае можно для произвольной окрестности $O_{\lambda_0 x_0}$ взять некоторое из множеств $V$, составляющих $O_{\lambda_0 x_0}$, так, что $\lambda_0 x_0 \in V$. Тогда имеем

$$V = \bigcap_{i=\overline{1,l}} (V(p_i, n_i) + x_i) \tag{8}$$

для некоторых $x_1, \ldots, x_l \in X$, причём все множества, входящие в пересечение (8), содержат $\lambda_0 x_0$. Однако вовсе не факт, что $x_i = \lambda_0 x_0$. (Чтобы понять ситуацию, нетрудно заметить, что полоса $|\mathrm{Re}\,(z - 10)| < \frac{1}{2}$ будет, в частности, окрестностью точки $z = 10{,}1 + 5i$.) Однако (докажите сами!) нетрудно построить множество $\widetilde{V} \subset V$ вида

$$\widetilde{V} = \bigcap_{i=\overline{1,l}} (V(p_i, \tilde{n}_i) + \lambda_0 x_0). \tag{9}$$

Если теперь согласно рассуждению в самом начале доказательства найти такие $m_i$ и $\varepsilon_i$, что для каждого $i = \overline{1,l}$ из условий $p_i(x - x_0) < \frac{1}{m_i}$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_i$ будет вытекать $p_i(\lambda x - \lambda_0 x_0) < \frac{1}{\tilde{n}_i}$, а затем положить

$$\varepsilon = \min_{n=\overline{1,l}} \varepsilon_i, \quad O_{x_0} = \bigcap_{i=\overline{1,l}} V(p_i, m_i) + x_0,$$

то для всех $x \in O_{x_0}$, $\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ получим $\lambda x \in \widetilde{V} \subset V \subset O_{\lambda_0 x_0}$. Аналогичное рассуждение для непрерывности суммы в топологии, задаваемой произвольным семейством полунорм, рекомендуется провести самостоятельно.

### 5. Функционал Минковского. Примеры

Рассмотрим несколько примеров того, какие полунормы (и нормы) задаёт функционал Минковского конкретных множеств в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. (Мы рассматриваем плоскость для наглядности; а поскольку в $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ абсолютно выпуклыми поглощающими множествами являются лишь открытые и замкнутые круги с центром в начале координат — доказать! — то у нас нет выбора.)
1. Если $U$ есть круг радиуса 1 с центром в начале координат, то $p_U(\mathbf{x})$ есть обычная евклидова норма $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. Если $U$ есть горизонтально ориентированный эллипс с центром в начале координат и полуосями 2, 1, то $p_U(\mathbf{x})$ есть норма $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2}$.
3. Если $U$ есть квадрат со сторонами 2 и центром в начале координат, то $p_U(\mathbf{x})$ есть норма $\|\mathbf{x}\| = \max |x|, |y|$.
4. Если $U$ есть полоса $|y| < 1$, то $p_U(\mathbf{x})$ есть полунорма $p(\mathbf{x}) = |y|$.
5. Если $U$ есть полоса, ограниченная прямыми $y = x + 1$ и $y = x - 1$, то $p_U(\mathbf{x})$ есть полунорма $p(\mathbf{x}) = |x - y|$.
6. Если $U$ есть квадрат, ограниченный прямыми $y = \pm x \pm 1$, то $p_U(\mathbf{x})$ есть норма $\|\mathbf{x}\| = |x| + |y|$.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить аксиомы полунормы для примеров из параграфа 3.

2. Проверить, что множества из параграфа 5 действительно выпуклые, поглощающие и уравновешенные (где в определении уравновешенности следует заменить $\lambda \in \mathbb{C}$ на $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. 1) Восполнить доказательство в параграфе 4, построив окрестность $\widetilde{V}$ по $V$.
2*) Провести доказательство непрерывности суммы в топологии, заданной полунормами (см. параграф 4).

4. 1) Верны ли (для введённых нами операции суммы и произведения множеств в линейном пространстве) равенства $(A + B) - B = A$, $2 \cdot (0{,}5B) = B$?
2) Верно ли, что $(A \cup B) \setminus B = A$?

5*. Доказать, что метрика, введённая в лекции для метризации топологического пространства со счётной разделяющей системой полунорм, действительно удовлетворяет неравенству треугольника.

6*. Предположим, система подмножеств $\pi = \cup_{x \in X} \pi_x$ множества $X$ удовлетворяет следующим условиям:
1) для любого $x \in X$ верно: $\pi_x \neq \varnothing$, для любого $U_x \in \pi_x$ $x \in U_x$;

2) для любых $U_{x,1}, U_{x,2} \in \pi_x$ найдётся $U_x \in \pi_x$ такое, что $U_x \subset U_{x,1} \cap U_{x,2}$.
Верно ли, что $\pi$ образует ФСО?
(Смысл этой задачи в том, достаточно ли проверить для окрестностей нуля и всех их переносов требования 1), 2), чтобы убедиться, что топология корректно ими задана.)