ЛЕКЦИЯ 8А

Нормированные и банаховы пространства

1. Общие вопросы теории нормированных пространств

1. Пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ банахово, если пространство N_2 банахово.

2. (*Следствие.*) Для любого нормированного пространства X сопряжённое к нему пространство $X^* \equiv \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ банахово.

3. (*Следствие.*) Рефлексивное нормированное пространство X с необходимостью банахово, т. к. оно изоморфно банахову пространству $X^{**} \equiv (X^*)^*$.

4. Следующие определения нормы линейного оператора $A : N_1 \to N_2$ равносильны (мы исключаем из рассмотрения тривиальный случай нульмерного пространства):

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{x\neq\theta_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1\leqslant 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2.$$

Здесь мы для ясности указали, нормы в каком из пространств — N_1 или N_2 — берутся. В дальнейшем там, где это очевидно, мы будем использовать просто обозначение нормы.

2. Ряды в банаховом пространстве. Сходимость абсолютно сходящегося ряда

В любом линейном пространстве можно рассматривать суммы элементов. В нормированном, к тому же, можно ввести понятие *сходимости по норме*:

$$y_n \to y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|y_n - y\| \to 0,$$

а следовательно, и понятие суммы ряда:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} S_n \equiv \sum_{n=1}^{N} x_n \to x.$$

Имеет место полезная теорема, обобщающая аналогичное утверждение для числовых рядов.

Теорема. Абсолютно сходящийся ряд сходится, т. е. если сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|,$$

то сходится и исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Доказательство этой теоремы, в полной аналогии со случаем числовых рядов, будет основано на критерии Коши сходимости последовательности, из которого очевидным образом вытекает критерий Коши сходимости ряда.

Доказательство. Напомним, что в силу полноты банахова пространства относительно метрики, заданной нормой, всякая последовательность его элементов сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Переходя к последовательностям частичных сумм, переформулируем это утверждение с учётом очевидного тождества $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k$ критерий Коши сходимости последовательности в критерий Коши сходимости ряда:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховом пространстве X сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \ \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Докажем, что условие (1) выполнено, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \tag{2}$$

Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись критерием Коши как необходимым условием сходимости ряда (2), находим такое N_1, что при всех $n > N_1$ и $p \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Но тогда (при тех же n, p) в силу неравенства треугольника верно и, что

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Следовательно, выполнено условие Коши сходимости ряда в банаховом пространстве.

Теорема доказана.

Замечание. Условие непустоты пересечения последовательности вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, можно принять за (эквивалентное) определение полноты метрического пространства. При этом существенно, что в этом рассуждении не используется компактность. С другой стороны, во многих книгах по началам анализа приводится доказательство сходимости фундаментальной числовой последовательности (из теоремы о вложенных отрезках), основанное на предварительном доказательстве её ограниченности и извлечении сходящейся подпоследовательности по теореме Больцано — Вейерштрасса. Такое доказательство, наиболее подходящее в силу своей простоты для начинающих изучать анализ, следует признать затемняющим суть дела при дальнейшем освоении идей и фактов анализа, ибо оно может создать впечатление, что для достаточности условия Коши существенна не только полнота, но и локальная компактность метрического пространства, что не соответствует действительности.

3. Некоторые конкретные примеры линейных функционалов в различных функциональных пространствах

1. Установить непрерывность следующих линейных функционалов над пространством $C[-1;1]$:
1) $\langle f_1, x\rangle = x(0)$;
2) $\langle f_2, x\rangle = \frac{1}{3}(x(-1)+x(1))$;
3) $\langle f_3, x\rangle = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_0^1 x(t)\,dt$;
4) $\langle f_4, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(1/n)}{n!}$.

Проще установить ограниченность, что в случаях 1—3 делается тривиально. Действительно,

$$|\langle f_1, x\rangle| = |x(0)| \leqslant \|x\|_C, \quad \text{откуда} \quad \|f_1\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_1, x\rangle| \leqslant 1,$$
$$|\langle f_2, x\rangle| = \left|\frac{1}{3}(x(-1)+x(1))\right| \leqslant \frac{2}{3}\|x\|_C, \quad \text{откуда} \quad \|f_2\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_2, x\rangle| \leqslant \frac{2}{3},$$
$$|\langle f_3, x\rangle| \leqslant \left|\int_{-1}^{0} x(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 x(t)\,dt\right| \leqslant 2\|x\|_C, \quad \text{откуда} \quad \|f_3\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_3, x\rangle| \leqslant 2.$$

В случае же 4 проще всего сначала аналогично предыдущему доказать, что $\langle f^{(n)}, x\rangle = \frac{x(1/n)}{n!}$ суть линейные функционалы, нормы которых не превосходят соответственно $\frac{1}{n!}$, а поэтому в силу доказанной выше теоремы их сумма представляет собой сходящийся ряд по норме банахова (см. п. 2 раздела 1 этого семинара) пространства $(C[-1;1])^*$. Следовательно, его сумма сама является ограниченным линейным функционалом, а его норма, в силу непрерывности нормы (см. задачу 2), не превосходит числа e.

До сих пор мы получили лишь оценки сверху на нормы каждого из функционалов. Определение нормы подсказывает, как получить оценки снизу. Именно, для любого ненулевого элемента $x_0 \in X$ имеем

$$\|f\| \equiv \sup_{x\neq\theta} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|} \geqslant \frac{|\langle f, x_0\rangle|}{\|x_0\|}.$$

Более общо, для любой последовательности ненулевых элементов $\{x_n\} \subset X$ верно

$$\|f\| \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{|\langle f, x_n\rangle|}{\|x_n\|}.$$

Эти соображения мы и будем в дальнейшем использовать для вычисления нормы конкретных линейных функционалов. В частности, в примерах 1—4 все оценки сверху для норм точны, именно,

$$\|f_1\| = 1, \quad \|f_2\| = \frac{2}{3}, \quad \|f_3\| = 2, \quad \|f_4\| = e.$$

В самом деле, в примерах 1—2, 4 достаточно рассмотреть $x_0(t) \equiv 1$, а в примере 3 нетрудно построить последовательность функций из $C[-1;1]$

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & x \in [-1; -\frac{1}{n}]; \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}; 1], \end{cases} \tag{3}$$

для которой $|\langle f_3, x\rangle| \to 2$ (проверить самостоятельно!).

2. Выяснить, будут ли ограниченными в $C[0;1]$ следующие линейные функционалы:
1) $\langle f_1, x\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$;
2) $\langle f_2, x\rangle = \int_0^1 x(t^2)\,dt$.

Задачи 1), 2) решаются с помощью интегрирования по частям. Имеем

$$|\langle f_1, x\rangle| = \left|\int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt\right| = \left|2\int_0^1 x(u)u\,du\right| \leqslant \left|2\int_0^1 \|x\|_C u\,du\right| = \|x\|_C\left|2\int_0^1 u\,du\right| = \|x\|_C,$$
$$|\langle f_2, x\rangle| = \left|\int_0^1 x(t^2)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2}\int_0^1 x(u)\frac{1}{\sqrt{u}}\,du\right| \leqslant \left|\frac{1}{2}\int_0^1 \|u\|\frac{1}{\sqrt{u}}\,du\right| = \|x\|_C\left|\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du\right| = \|x\|_C. \tag{4}$$

3. Установить ограниченность данного линейного функционала и найти его норму:
1) $\langle f_1, x\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt, \quad x \in C[-1;1]$;
2) $\langle f_2, x\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt, \quad x \in L^1[-1;1]$;
3) $\langle f_3, x\rangle = \int_0^1 tx(t)\,dt, \quad x \in C^1[-1;1]$;
4) $\langle f_4, x\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt, \quad x \in L^2[-1;1]$;
5) $\langle f_5, x\rangle = \int_0^1 t^{-1/3}x(t)\,dt, \quad x \in L^2[0;1]$.

1) Если бы нам нужно было только установить ограниченность функционала f, было бы достаточно оценить подынтегральное выражение следующим образом: $|tx(t)| \leqslant 1\cdot\|x\|_C$ при $t \in [-1;1]$, откуда $\|f\| \leqslant 2$. Однако ясно, что это слишком грубая оценка, поскольку множитель t «зарезает» значение интеграла. Поэтому проведём более тонкую оценку подобно тому, как это было сделано в предыдущей задаче:

$$\left|\int_{-2}^1 tx(t)\,dt\right| \leqslant \int_{-1}^1 |t|\cdot|x(t)|dt \leqslant \int_{-1}^1 |t|\|x\|_C dt = 2\|x\|_C\int_0^1 t\,dt = \|x\|_C,$$

откуда $\|f\| \leqslant 1$. Можно убедиться, что $\|f\| = 1$, рассмотрев последовательность функций (3) (сделайте это самостоятельно). Поэтому норма рассматриваемого функционала равна 1.

2) В силу неравенства Гёльдера при $p = 1$, $q = \infty$ имеем $\|f\| \leqslant 1$. Легко видеть, что это величина $\frac{|\langle f,x\rangle|}{\|x\|_1}$ достигает этого значения при $x(t) = \operatorname{sgn} t \in L^1[-1;1]$.

3) В данном случае с помощью интегрирования по частям получаем

$$|\langle f, x\rangle| = \left|\frac{t^2}{2}x(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}x'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x(1)|}{2} + \int_0^1 \frac{t^2}{2}|x'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_C + \frac{1}{6}\|x'\|_C \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_{C^1}.$$

Обратное неравенство следует из рассмотрения функции $x(t) = 1$. *Замечание.* В данном случае сработала бы и оценка типа сделанной в п. 1), но мы посчитали полезным продемонстрировать оценку, специфичную для пространства C^1.

4) Пользуясь неравенством Коши — Буняковского и тем фактом, что при совпадении функций оно обращается в равенство, находим $\|f\| = \|t\|_{L^2[-1;1]} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5) Из аналогичных соображений, пользуясь тем фактом, что $t^{-1/3} \in L^2[0;1]$, получаем $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^{-2/3}\,dt} = \sqrt{3}$.

4. Некоторые общие свойства линейных функционалов в банаховых пространствах

1. Доказать, что линейный функционал в банаховом пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.

Необходимость условия $\ker f = \overline{\ker f}$ очевидна, поскольку из непрерывности функционала f сразу следует, что прообраз $\ker f$ замкнутого множества $\{0\}$ при отображении f должен быть замкнут. (Можно рассуждать и в терминах последовательностей: при $x_n \to x_0$, $\langle f, x_0\rangle = 0$ верно $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x_0\rangle = 0$, т. е. точка, являющаяся предельной для ядра, принадлежит ядру. Но такое рассуждение не годится для более общего случая линейного топологического пространства.)

Осталось доказать, что из замкнутости ядра линейного функционала следует ограниченность этого линейного функционала.

Пусть $\ker f = \overline{\ker f}$. Как известно, непрерывность функционала равносильна его непрерывности в нуле, поэтому для разрывного (или, что равносильно, неограниченного) функционала найдётся такая последовательность элементов $x_n \to \theta$, что $|\langle f, x_n\rangle| > C$ при некотором $C > 0$. Но тогда и $y_n \equiv \frac{Cx_n}{\langle f, x_n\rangle} \to \theta$ и $\langle f, y_n\rangle = C$. При этом $z_n \equiv y_n - y_1 \to -y_1$ и, как нетрудно проверить, $z_n \in \ker f$. Но $y_1 \notin \ker f$, поскольку $\langle f, y_1\rangle = C \neq 0$, т. е. $\ker f$ незамкнуто. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

2. Доказать, что если два линейных функционала имеют одно и то же ядро: $\ker f_1 = \ker f_2$, то они пропорциональны.

Для доказательства рассмотрим фиксированный элемент $x_0 \notin \ker f_1$ и произвольный элемент $x \notin \ker f_2 = \ker f_1$. (Если оба ядра совпадают со всем пространством, то утверждение тривиально.) Наша задача установить, что

$$\langle f_2, x\rangle = \lambda\langle f_1, x\rangle \tag{5}$$

при некотором λ, не зависящем от x.

Заметим, что существует $\mu \neq 0$, при котором

$$\mu\langle f_1, x_0\rangle + \langle f_1, x\rangle = 0:$$

достаточно положить $\mu = \frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}$, поскольку числитель и знаменатель отличны от 0. Но тогда

$$\langle f_1, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

т. е. $\mu x_0 + x \in \ker f_1 = \ker f_2$. Следовательно,

$$\langle f_2, \mu x_0 + x\rangle = 0,$$

или

$$\mu\langle f_2, x_0\rangle + \langle f_2, x\rangle = 0.$$

Таким образом,
$$\langle f_2, x\rangle = -\mu\langle f_2, x_0\rangle = -\frac{-\langle f_1, x\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_2, x_0\rangle = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}\langle f_1, x\rangle,$$
что совпадает с (5), причём
$$\lambda = \frac{\langle f_2, x_0\rangle}{\langle f_1, x_0\rangle}.$$

Замечание. Мы существенно использовали тот факт, что размерность образа линейного функционала равна 1. Поэтому для произвольного линейного оператора приведённое доказательство не проходит. Рекомендуется обобщить рассуждение на случай линейных операторов с *общим* одномерным образом. Обратите внимание, что положить $\mu = \frac{A_1 x}{A_1 x_0}$ уже нельзя (это не числа!).

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на все вопросы в тексте.

1. Доказать, что всякое нормированное пространство становится метрическим, если положить $\rho(x, y) = \|x - y\|$. (На самом деле мы уже не раз этим пользовались.) *Указание.* Требуется проверить аксиомы метрики.

В дальнейшем мы будем использовать метрические понятия (полнота, замкнутость и т. д.) применительно к нормированному пространству, используя без оговорок именно эту метрику. При этом сходимость по ней (в отличие от других возможных типов) называется *сильной сходимостью.*

2. Доказать, что норма непрерывна как функция своего аргумента: если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$. Верно ли обратное?

3. Доказать, что следующие линейные пространства с указанным образом введёнными нормами являются а) нормированными; б) банаховыми:
1) $l^\infty \equiv m$ — пространство ограниченных последовательностей $\{x_n\}$, $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$;
2) l^1 — пространство последовательностей $\{x_n\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится, $\|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$;
3*) l^p — пространство последовательностей $\{x_n\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ сходится, $\|\{x_n\}\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in (1; +\infty)$;
4а, б*) $L^\infty([0; 1])$;
5а, б*) $L^1([0; 1])$;
6а, б*) $L^p([0; 1])$;
7а, б*) $C[0; 1]$;
8а*, б*) $C^{(1)}[0; 1]$.
(Все задачи станут обязательными при подробном изучении функциональных пространств в следующем семестре.)

4. Доказать, что двумерное координатное пространство $\mathbb{R}^2$ будет а) нормированным, б) банаховым, если ввести норму на нём каждым из следующих способов:

1) $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2) $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$;
3) $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.
Соответствующие нормированные пространства мы будем обозначать $l^2_{(2)} \equiv E^2$, $l^\infty_{(2)}$, $l^1_{(2)}$ (обозначения не общепринятые!). Изобразить единичные шары $\|(x, y)\| < 1$ в каждом случае.
4) Можно ли ввести норму так: $\|(x, y)\| = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$?

Цикл задач по связи нормы и топологии.

5. Доказать, что нормированное пространство становится линейным топологическим, если в качестве базы окрестностей нуля взять а) все открытые шары с центром в нуле; б) открытые шары радиусов $r_n = \frac{1}{n}$ с центром в нуле. *Указание.* Сначала опишите топологию, задаваемую такой базой окрестностей нуля, затем проверьте, что она согласована с линейными операциями.

6. (Продолжение.) Одну и ту же или разные топологии задают на $\mathbb{R}^2$ нормы 1)—3) из задачи 4?

7. (Продолжение.) 1) Доказать, что во всяком нормированном пространстве всякий открытый и всякий замкнутый шар выпуклы. 2) Доказать, что в нормированной пространстве замкнутый шар с центром в нуле является уравновешенным и поглощающим множеством.
(С учётом задач 5, 7 мы видим, что всякое нормированное пространство есть локально выпуклое линейное топологическое пространство.)

8. Нормированное пространство называется *строго выпуклым*, если равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ достигается лишь для «коллинеарных» (т. е. пропорциональных, $x = \lambda y$ при некотором λ или $y = 0$) x и y. Какие из пространств, построенных в задаче 4, строго выпуклы?

9*. (Продолжение.) Можно ли задать обычную метрическую топологию (порождаемую нормой из задачи 4, п. 1)) с помощью базы, состоящей из *невыпуклых* множеств? (Если да, то станет понятно, почему в определении локально выпуклого ЛТП говорится «…базу можно выбрать…».)

Цикл задач о компактности в нормированном пространстве. Все эти задачи становятся обязательными, когда будет пройдена тема «Компактность в метрических и топологических пространствах» (вероятнее всего, ей будет посвящены специальная лекция и семинар).

10. Доказать, что единичная сфера в E^n компактна. *Указание.* 1) Здесь и далее пользуйтесь «метрическим» определением компактности: из любой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. 2) Примените теорему Больцано — Вейерштрасса. *Замечание.* В частности, всякое конечномерное нормированное пространство полно.

11*. (Продолжение.) Доказать, что единичная сфера в l^2 некомпактна. *Указание.* Рассмотрите элементы $e_n \equiv (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$ (единица на n-ом месте).

12*. (Продолжение.) Доказать, что единичная сфера в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве некомпактна. *Указание.* Докажите сначала *лемму Рисса*: если L — линейное подпространство банахова пространства X, причём $\overline{L} \neq X$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $y \in X$, что $\|y\| = 1$ и $\rho(L, y) \equiv \inf_{x \in L} \|x - y\| \geqslant 1 - \varepsilon$.

13*. Доказать, что в конечномерном линейном пространстве все возможные нормы эквивалентны. *Указание.* Воспользоваться задачами 2 и 11.

14*. (Продолжение.) Доказать, что в произвольном конечномерном нормированном пространстве единичная сфера компактна.

Задачи 12, 14 вместе дают критерий локальной компактности банахова пространства: *единичная сфера в банаховом пространстве компактна тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.*

15*. (Продолжение.) Доказать, что всякое конечномерное подпространство банахова пространства B замкнуто в B.

16. (Продолжение.) Какие из указанных множеств являются линейными подпространствами в пространстве $C[0;1]$ со стандартной нормой? Какие из них являются замкнутыми линейными подпространствами? (*Указание.* Воспользуйтесь теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывных функций.)

1) Множество всех многочленов степени 10. (*Предостережение.* Может ли последовательность многочленов степени 10 равномерно на отрезке $[0;1]$ сходиться к многочлену степени 1?)

2*) Множество всех многочленов степени не выше 10.

3) Множество всех многочленов.

17. (Продолжение.) (То же для пространств последовательностей.)

Замечание. Интуитивно трудно понять, как линейное подпространство может быть незамкнутым. Однако рассмотренные примеры говорят, что это возможно. Более того, обычно линейное подпространство, если оно не замкнуто, называют линейным многообразием, а термин «линейное подпространство» оставляют за замкнутым подпространством. Мы, пока не оговорено иное, будем по-прежнему понимать термин «линейное подпространство» в прежнем, алгебраическом, смысле.

(Конец цикла задач про компактность.)

18. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится по одной из эквивалентных норм, то она сходится и по другой. Может ли некоторая последовательность сходиться к разным пределам (в зависимости от нормы), если эти нормы: а) эквиваленты, б) не обязательно эквивалентны?

Цикл задач про линейные функционалы.

19. Установить непрерывность следующих линейных функционалов:

1) $\langle f, x \rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in l^2$;

2) $\langle f, x \rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in m$;

3) $\langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in l^2$;

4) $\langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in l^1$;

5) $\langle f_\varepsilon, x \rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)), \quad \varepsilon \in [-1;1], \quad x \in C[-1;1]$;

6) $\langle f, x \rangle = \int_0^1 x(t)\, dt, \quad x \in C[-1;1]$.

В п. 1)—4) требуется также найти норму функционалов.

20. Пусть X — вещественное линейное пространство, f — определённый на нём линейный функционал. Доказать, что он непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in X \mid \langle f, x \rangle < c\}, \quad \{x \in X \mid \langle f, x \rangle > c\}$$

открыты относительно метрики пространства X (порождённой нормой).

21. Пусть B — банахово пространство, $f \in B^*$ и для некоторого шара $\overline{B}_r(x_0) \equiv \{x \in B \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$ верно

$$\sup_{x,y \in \overline{B}_r(x_0)} |\langle f, x \rangle - \langle f, y \rangle| = 1. \tag{6}$$

Найти $\|f\|$.

22. 1) Показать, что если Ω — ограниченная область, то $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ (и образует линейное подпространство!).

2*) Будет ли подпространство $L^2(\Omega)$ замкнуто в $L^1(\Omega)$?