ЛЕКЦИЯ 9А

Банаховы пространства — 2.

Некоторые следствия из теорем Хана—Банаха и Банаха—Штейнгауза

1. Следствие из теоремы Банаха—Штейнгауза

В лекции была доказана теорема о поточечном пределе ограниченных линейных операторов («вторая теорема Банаха—Штейнгауза»). Однако часто в анализе удобнее «проследить» что-то на всюду плотном подмножестве банахова пространства. Поэтому полезно и такое утверждение.

Теорема 1 (следствие из теоремы Банаха—Штейнгауза). Пусть:

1) T_n, $n \in \mathbb{N}$, — линейные операторы, действующие из банахова пространства X_1 в банахово пространство X_2, причём $\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|T_n\| \leqslant C$;

2) счётное $\{x_j\} \subset X_1$ таково, что его линейная оболочка плотна в X_1 (иными словами, для любого $x \in X_1$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая конечная линейная комбинация y элементов x_j, что $\|x - y\| < \varepsilon$);

3) $\forall j \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} T_n x_j$, который мы обозначим через $T(x_j)$.

Тогда:

1) для любого $x \in X_1$ существует предел $\lim_{n\to\infty} T_n x$, который мы обозначим через $\widetilde{T}(x)$; при этом $\widetilde{T}(x)$ совпадает с $T(x)$ на всех конечных линейных комбинациях элементов x_j;

2) $\widetilde{T}(x)$ — линейный оператор;

3) $\widetilde{T}x$ непрерывен.

Доказательство. 1) Докажем, что для любого $x \in X_1$ последовательность $\{T_n x\}$ фундаментальна. Для этого воспользуемся так называемым «$\frac{\varepsilon}{3}$-приёмом». Заметим сначала, что для произвольных $x \in X_1$, y из линейной оболочки x_j, $n, p \in \mathbb{N}$ верно

$$\|T_{n+p}x - T_n x\| \leqslant \|T_{n+p}x - T_{n+p}y\| + \|T_{n+p}y - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\|. \tag{1}$$

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое y из линейной оболочки x_j, что $\|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3C}$. В силу условия 3), линейности операторов T_n и теоремы о пределе суммы существует предел $\lim_{n\to\infty} T_n y$. Следовательно, последовательность $\{T_n y\}$ фундаментальна, а поэтому существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ верно неравенство $\|T_{n+p}y - T_n y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Итак, мы можем оценить сверху каждое из слагаемых в правой части (1) числом $\varepsilon/3$ (для первого и третьего слагаемых понадобится оценки нормы операторов $\|T_n\| \leqslant C$). Таким образом, при всех n, больших выбранного N, имеем $\|T_{n+p}x - T_n x\| < \varepsilon$, что и требовалось. Утверждение о том, что на линейной оболочке элементов x_j операторы T и $\widetilde{T}$ совпадают, очевидно. Наконец, утверждения 2) и 3) теоремы следуют из второй теоремы Банаха—Штейнгауза, поскольку теперь мы имеем дело с поточечным пределом непрерывных линейных операторов.

Теорема доказана.

Замечание. Полезно сравнить доказательство 1) с заключительной частью доказательства теоремы Арцела (см. III семестр).

2. Конструкция пространств последовательностей l^p как пространств Лебега и общий вид линейных функционалов в них

Уже известные пространства последовательностей l^p можно рассмотреть как частный случай пространств $L^p(X)$, выбрав специальным образом пространство X с мерой. В таком случае неравенства Гёльдера и Минковского получатся автоматически как следствие общей теории.

Действительно, рассмотрим $X = \mathbb{N}$ и положим для каждого конечного множества натуральных чисел его меру равной количеству чисел в множестве: $\mu(A) = \mathrm{card} A$. При этом мера любого множества, состоящего из одного натурального числа, будет равна единице. Легко видеть, что на каждом конечном подмножестве вида $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ мы таким образом действительно ввели меру. В то же время, поскольку

$$\mathbb{N} = \cup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

то мы тем самым ввели σ-конечную меру на всём множестве натуральных чисел. Следовательно, автоматически вводится и интеграл Лебега на таком пространстве. Он приобретает вид

$$\int_A f(n)\, d\mu \equiv \sum_{n\in A} f(n),$$

где $f(n)$ — функция, заданная на множестве натуральных чисел, т. е. последовательность. Теперь ясно, что l^p, рассматриваемое как частный случай пространства $L^p(X)$ при $X = \mathbb{N}$, — это пространство таких последовательностей $x \equiv \{x_n\}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty.$$

Норма в этом пространстве, как следует из общей теории пространства $L^p(X)$, задаётся равенством

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При этом свойство полноты полученного линейного нормированного пространства следует из общей теории, а также может быть установлено непосредственно. Однако интересно получить отдельно для этого случая теорему об общем виде линейного функционала, поскольку доказательство гораздо более «обозримо» и, в частности, не использует теорему Радона—Никодима.

Итак, из общей теории мы знаем, что $(L^p(X))^* = L^q(X)$, $p \in [1; +\infty)$, где равенство понимается в виде изометрического изоморфизма. (Здесь и далее считаем p и q сопряжёнными в смысле равенства $p^{-1} + q^{-1} = 1$.) Это означает, что между линейными непрерывными функционалами из $(L^p(X))^*$ и функциями из $L^q(X)$ можно установить взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет линейную структуру и норму:

$$\text{Если} \quad \tilde{g}_1 \sim g_1, \tilde{g}_2 \sim g_2, \quad \text{где} \quad \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in (L^p(X))^*,\ g_1, g_2 \in L^q(X), \tag{2}$$

$$\text{то} \quad \lambda\tilde{g}_1 + \mu\tilde{g}_2 \sim \lambda g_1 + \mu g_2 \tag{3}$$

$$\text{и} \quad \|\tilde{g}\|_{(L^p(X))^*} = \|g\|_q. \tag{4}$$

Установим этот изометрический изоморфизм непосредственно, сначала для случая l^1, а затем для l^p, $p \in (1; +\infty)$.

Прежде всего вспомним, что в общем случае $(L^1(X))^* = L^\infty(X)$. Выясним, какое пространство будет аналогом $L^\infty(X)$. Вспомним, что $L^\infty(X)$ состоит из классов эквивалентности тех функций, для каждой из которых существует такое c, что

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > c\}) = 0. \tag{5}$$

В нашем примере меру нуль имеют лишь пустые множества. Поэтому, во-первых, классы эквивалентности содержат ровно по одной функции (последовательности), а во-вторых, из (5) следует, что l^∞ состоит в точности из ограниченных последовательностей. Это пространство часто для краткости также обозначают m. Норма же на $l^\infty \equiv m$ задаётся равенством

$$\|f\|_\infty \equiv \|\{f_1, f_2, \ldots\}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|. \tag{6}$$

Легко видеть, что если для произвольной ограниченной последовательности $f \equiv \{f_1, f_2, \ldots\} \in$ $\in m$ и для произвольного $x \equiv \{x_1, x_2, \ldots\} \in l^1$ положить

$$\langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n, \tag{7}$$

то ряд будет сходиться, — покажите это самостоятельно, пользуясь определением сходимости ряда или критерием Коши. Далее, очевидно, что выполняется (3). Кроме того, из оценки

$$|\langle f, x \rangle| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n \right| \leqslant \sup_{n \in N} |f_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \equiv \|f\|_\infty \cdot \|x\|_1 \tag{8}$$

следует, что полученный линейный функционал ограничен (а следовательно, и непрерывен). Осталось доказать:

1) обратно, любой линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$, действующий в l^1, может быть задан с помощью некоторой последовательности $f \in m$;

2) выполняется условие изометричности (4).

Для доказательства 1) положим $f_n = \langle \tilde{f}, e_n \rangle$, где $e_n = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ (единица стоит на n-ом месте) — элементы стандартного базиса в l^∞. Легко проверить, что $\|e_n\|_1 = 1$. Поскольку по условию $\tilde{f}$ — ограниченный функционал, то $f_n \in m$; при этом функционал $\tilde{f}$ действительно задаётся формулой (7). Таким образом, взаимно однозначное соответствие установлено. Для доказательства 2) заметим прежде всего, что в силу (8) $\|\tilde{f}\|_{(l^1)^*} \leqslant \|f\|_\infty$. Обратное неравенство следует из того наблюдения, что

$$\|\tilde{f}\|_{(l^1)^*} = \sup_{\|x\|_1 = 1} \left| \langle \tilde{f}, x \rangle \right| \geqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \langle \tilde{f}, e_n \rangle \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| = \|f\|_\infty.$$

Итак, мы установили, что $(l^1)^* = m \equiv l^\infty$ в смысле изометрического изоморфизма указанных линейных пространств.

Сделаем то же самое для случая $(l^p)^* = l^q$. Определив для каждой последовательности $f \in l^q$ линейный функционал $\tilde{f}$ по формуле (7), мы в силу неравенства Гёльдера снова получаем, что функционал задан на всём l^p и ограничен, причём выполнено свойство (3). Таким образом, $l^q \subset (l^p)^*$. По-прежнему нетривиально доказательство лишь двух фактов: 1) обратного вложения $(l^p)^* \subset l^q$ и 2) изометрии.

Для доказательства 1) положим $f_n = \langle f, e_n \rangle$, где смысл обозначения e_n прежний. Далее, положим

$$x^{(k)} = \{|f_1|^{q-1} \operatorname{sgn} f_1, |f_2|^{q-1} \operatorname{sgn} f_2, \ldots, |f_k|^{q-1} \operatorname{sgn} f_k, 0, 0 \ldots\}. \tag{9}$$

При этом мы построили последовательность элементов $x^{(k)}$ пространства l^p (пусть читатель сам установит, что $x^{(k)} \in l^p$). Каждый из этих элементов является числовой последовательностью, определённой формулой (9). Тогда в силу линейности функционала $\tilde{f}$ имеем $\langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle = \sum_{n=1}^{k} |f_k|^q$. Но

$$\left|\langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle\right| \leqslant \|\tilde{f}\| \cdot \|x^{(k)}\| = \|\tilde{f}\| \left(\sum_{n=1}^{k} |f_n|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \|\tilde{f}\| \left(\sum_{n=1}^{k} |f_n|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

где мы пользовались ограниченностью функционала $\tilde{f}$ и для краткости опустили обозначения пространств у норм $\|\tilde{f}\|_{(l^p)^*}$ и $\|x^{(k)}\|_p$. Итак, при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle\right| = \langle \tilde{f}, x^{(k)} \rangle = \sum_{n=1}^{k} |f_n|^q \leqslant \|\tilde{f}\| \left(\sum_{n=1}^{k} |f_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Разделив последнее неравенство в этой цепочке на $\left(\sum_{n=1}^{k} |f_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, с учётом $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ получаем

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\tilde{f}\|$$

при любом $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q$$

и оценка

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\tilde{f}\|.$$

таким образом, $f \in l^q$ и $\|f\|_q \leqslant \|\tilde{f}\|_{(l^p)^*}$.

С другой стороны, $\|\tilde{f}\| \leqslant (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^q)^{\frac{1}{q}}$ в силу неравенства Гёльдера.

Итак, для случая $p \in (1; +\infty)$ изометрический изоморфизм между пространствами $(l^p)^*$ и l^q также доказан.

Как мы скоро увидим, $m^* \neq l^1$.

3. Применение следствий из теоремы Хана—Банаха для доказательства нерефлексивности некоторых пространств

Сформулируем два следствия из теоремы Хана—Банаха, которые будут использованы в этом параграфе.

Следствие 1. Пусть $x \in X$, $x \neq \theta$. Тогда существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$, $\langle f, x\rangle = \|x\|$. (См. второе следствие, лекция 7.)

Следствие 2. Пусть X — банахово пространство. Тогда из сепарабельности X^* следует сепарабельность X. Иными словами, сопряжённое к несепарабельному банахову пространство не может быть сепарабельным. (См. четвёртое следствие, лекция 7.)

1. Установим сепарабельность пространства l^1.

Легко видеть, что счётное всюду плотное множество в нём образует система всевозможных последовательностей вида $(r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(m)}, 0, \ldots)$, где $r^{(1)}, \ldots, r^{(m)}$ суть *рациональные* числа и количество ненулевых членов последовательности *конечно.* Это множество является счётным, т. к. представляет собой счётное объединение (по $m \in \mathbb{N}$) счётных множеств последовательностей рациональных чисел с ненулевым начальным отрезком длины m. Оно всюду плотно в l^1. В самом деле, пусть задан произвольный элемент $x \in l^1$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots)$, а также произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$. По определению пространства l^1 найдётся такой номер N, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, для найденного N найдутся такие рациональные числа $r_0^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, что при всех $i = 1, \ldots, N$

$$|r_0^{(i)} - x^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Положим $\tilde{x} = (r_0^{(1)}, \ldots, r_0^{(N)}, 0, 0, \ldots)$ и получим:

$$\|\tilde{x} - x\| = \sum_{k=1}^{N} |r_0^{(k)} - x^{(k)}| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x^{(k)}| < N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Пространство $m \equiv l^\infty$ несепарабельно. (См. лекцию 4 «Метрические пространства».)

Итак, в силу следствия 2 получаем, что $m^* \neq l^1$.

3. Нерефлексивность пространства $C[-1; 1]$ мы покажем другим способом. Прежде всего заметим, что если пространство B рефлексивно, то для любого линейного функционала $f \in B^*$ найдётся элемент $x \in B$, для которого $\langle f, x\rangle = \|f\|_* \|x\|$ (здесь мы для большей ясности явно указали на норму в сопряжённом пространстве). Действительно, в силу следствия 1 из теоремы Хана — Банаха (см. начало этого пункта), применённого к B^* и $(B^*)^* = B^{**}$, для каждого линейного функционала $f \in B^*$ существует линейный функционал $F \in B^{**}$ такой, что $\langle F, f\rangle_* = \|F\|_{**} \|f\|_*$. Но тогда в силу рефлексивности пространства B можно положить $x = J^{-1}F$, причём в силу изометричности отображения $J : B \to B^{**}$ верно $\|x\| = \|F\|_{**}$.

Рассмотрим теперь функционал $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} t\, x(t)\, dt$. Легко видеть, что $\|f\| = 2$. Действительно,

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t)|\, dt \leqslant 2\|x\|.$$

С другой стороны, для последовательности функций из $C[-1;1]$, заданной формулой

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & x \in [-1; -\frac{1}{n}]; \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}; 1], \end{cases}$$

имеем $\langle f, x_n\rangle \to 2$ (проверить!). Далее, в силу равенства

$$\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{0} x(t)\, dt + \int_{0}^{1} x(t)\, dt,$$

теоремы об устойчивости знака непрерывной функции и очевидных оценок интегралов ясно, что равенство $\langle f, x\rangle = 2$ может достигаться при $\|x\| \leqslant 1$ только в случае, когда $x(t) = \operatorname{sgn} t$ (при $t \neq 0$), что невозможно в силу непрерывности функции $x(t) \in C[-1;1]$. С учётом доказанного в предыдущем абзаце утверждения это гарантирует нерефлексивность пространства $C[-1;1]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассмотрим на пространстве $C[0;1]$ линейные функционалы

$$\langle f_n, x\rangle = \int_{0}^{1} x(t^n)\, dt, \quad \langle f, x\rangle = x(0).$$

1) Доказать ограниченность и найти норму этих функционалов.
2*) Доказать, что $f_n \xrightarrow{*} f$.

2. Установить сепарабельность пространств l^p, $p \in (1; +\infty)$. (Заметим, что сепарабельность l^1 и несепарабельность $m \equiv l^\infty$ уже установлены.)

3*. Доказать, что условие равномерной ограниченности норм операторов в теореме 1 существенно.

4*. Доказать, что в пространстве l^1 сильная сходимость совпадает со слабой. (Про такие пространства говорят, что они обладают *свойством Шура*.)