

ЛЕКЦИЯ 12А

Компактность в метрических и нормированных пространствах.

Основные идеи

1. Топологическое определение компактности

Напомним (см. лекции 4, 5) основное определение.

Определение 1. Топологическое пространство T называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами (говорят: *открытого покрытия*) можно извлечь конечное подпокрытие.

Введём следующее нужное

Определение. Непустая система замкнутых множеств называется *центрированной*, если любая её конечная подсистема имеет непустое пересечение.

Примером центрированной системы замкнутых множеств может служить система вложенных замкнутых шаров в \mathbb{R}^n или система лучей $\{[n; +\infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

В лекции 5 доказана

Теорема. Топологическое пространство T компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

В целях самодостаточности текста и возможности проследить всю логическую цепочку мы напомним здесь доказательство сформулированной теоремы, но прежде заметим, что в общем случае центрированная система замкнутых множеств вполне может иметь пустое пересечение, — достаточно обратиться ко второму примеру три абзаца назад.

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство T компактно. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Предположим, что её пересечение пусто: $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$. Тогда в силу соотношений двойственности для $G_\alpha \equiv T \setminus F_\alpha$ имеем

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} T \setminus F_\alpha = T \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = T \setminus \emptyset = T.$$

Итак, $\{G_\alpha\}$ есть открытое покрытие пространства T . Но тогда по условию оно имеет конечное подпокрытие $\{G_k\}_{k=1}^n$ и в силу соотношений двойственности получим

$$T = \bigcup_{k=1}^n G_k \implies \bigcap_{k=1}^n F_k = \emptyset,$$

что противоречит условию центрированности.

Достаточность. Пусть произвольная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Вновь привлекая соотношения двойственности, имеем $\bigcap_{\alpha \in A} (T \setminus O_\alpha) = \emptyset$. Но тогда система замкнутых множеств $\{T \setminus O_\alpha\}_{\alpha \in A}$, имея пустое пересечение, не является центрированной, т. е. существует подмножество индексов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ такое, что $\bigcap_{k=1}^n (T \setminus O_{\alpha_k}) = \emptyset$, откуда $\bigcup_{k=1}^n O_{\alpha_k} = T$. Таким образом, мы извлекли конечное подпокрытие данного покрытия.

Теорема доказана.

Теперь условие непустоты пересечения любой централизованной системы замкнутых множеств в топологическом пространстве можно считать новым определением компактности. Будем условно называть его **определением 1а**.

Сделаем важное для дальнейшего

Замечание. Если в определении 1 заменить слова «из любого покрытия» на «из любого счётного покрытия», то получится определение *счётной компактности*. Совершенно аналогично предыдущему случаю, но ограничиваясь только счётными множествами индексов A , можно доказать следующую теорему.

Теорема. Топологическое пространство T счётно-компактно тогда и только тогда, когда в нём любая счётная централизованная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Определения, получающиеся из определений 1 и 1а добавлением требования счётности, назовём **определениями 1' и 1а'**.

2. Компактные метрические пространства. Определение

К метрическому пространству, естественно, можно применить топологическое определение компактности. Однако в случае метрических пространств удобно пользоваться другими определениями (= критериями) компактности. Постепенно мы установим равносильность для метрических пространств всех приводимых нами определений (критериев) компактности.

Определение 2. Метрическое пространство X называется компактным, если любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.

Замечание. Метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, следует считать компактным: в нём нет бесконечных подмножеств, а стало быть, для всякого его бесконечного подмножества условие существования предельной точки выполнено. (Для несуществующего объекта верно всё что угодно.)

Определение 2а. Метрическое пространство X называется компактным, если любая последовательность его точек имеет предельную точку (= содержит сходящуюся подпоследовательность).

Предостережение. Обращаем внимание читателя на различия понятий предельной точки последовательности и множества. Так, предельная точка последовательности может не быть предельной точкой *множества* её значений. (Почему? Приведите примеры.)

Докажем равносильность этих определений.

$O2 \Rightarrow O2a$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X$. Покажем, что из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Если из неё можно извлечь стационарную подпоследовательность, утверждение тривиально. В противном случае можно утверждать, что множество значений последовательности бесконечно. По условию оно имеет предельную точку $x \in X$. Таким образом, в любой окрестности точки x найдётся элемент последовательности,

отличный от x . Уменьшая размеры окрестностей, мы получим, что в любой окрестности таких элементов даже бесконечно много. Тем самым, x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

O2a \Rightarrow O2. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим последовательность $\{x_n\}$ его элементов так, чтобы среди её членов не было равных. По условию она имеет предельную точку x . Легко видеть, что x является также предельной точкой множества X . В самом деле, по определению предельной точки последовательности в каждой окрестности точки x найдётся бесконечно много членов последовательности. Но в силу нашего выбора они суть *различные* точки множества X . Они не могут все совпадать с x . Тем самым, в любой окрестности точки x имеется хотя бы одна точка $x_n \in X$, отличная от x .

Утверждение доказано.

Пример. Пользуясь определением 2a, нетрудно заметить, что бесконечномерное гильбертово пространство l^2 не является локально компактным¹. Достаточно доказать некомпактность единичной сферы с центром в нуле. Имеем для элементов стандартного базиса $\|e_k - e_l\| = \sqrt{2}$, а следовательно, из $\{e_n\}$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

3. Компактность и полная ограниченность

Обсудим теперь другой подход к понятию компактности. Для этого нам потребуется ввести ещё некоторые понятия.

Определение. Назовём множество A ε -сетью в метрическом пространстве X , если $X = \cup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$, где $B_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x .

Определение. Назовём метрическое пространство X *вполне ограниченным*, если в нём для любого $\varepsilon > 0$ найдётся некоторая конечная ε -сеть. (Более новый термин: *сверхограниченное*. Мы будем пользоваться традиционным.)

Нетрудно привести примеры вполне ограниченных множеств: отрезок на прямой или шар в \mathbb{R}^3 . ε -сети в них можно построить на основе координатной сетки.

Теорема. Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно одновременно полно и вполне ограничено.

Доказательство. Необходимость. Необходимость полноты очевидна: иначе мы могли бы взять фундаментальную последовательность, не имеющую предела, — и никакая её подпоследовательность не была бы сходящейся. Нетрудно доказать и полную ограниченность. В самом деле, пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ конечной ε_0 -сети не существует. Это значит, что можно построить последовательность $\{x_n\} \subset X$, каждый последующий член которой удалён от каждого из предыдущих более чем на ε_0 . Но такая последовательность, очевидно, не имеет сходящихся подпоследовательностей.

¹Векторное топологическое пространство называется локально компактным, если каждая его точка имеет компактную окрестность.

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве X существует конечная ε -сеть. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим в X 1 -, $\frac{1}{2}$ -, $\frac{1}{4}$ -сети и рассмотрим соответствующие шары. Поскольку число шаров каждого радиуса конечно, то найдётся шар радиуса 1 , содержащий бесконечно много элементов множества Y . Назовём его B_0 и положим $Y_1 = Y \cap B_0$ (Y_1 бесконечно). Далее, найдётся шар радиуса $1/2$ центром в элементе $\frac{1}{2}$ -сети, содержащий бесконечно много элементов множества Y_1 . Обозначим этот шар через B_1 и $Y_2 = Y_1 \cap B_1$. Продолжая указанную процедуру, получим последовательность шаров $\{B_k\}$ радиусов $\frac{1}{2^k}$ (с центрами в точках $\frac{1}{2^k}$ -сетей), где каждый шар содержит бесконечно много элементов множества Y . Увеличив радиусы шаров в 4 раза (\tilde{B}_k), получим последовательность вложенных (докажем ниже) замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. В силу полноты пространства X эти шары содержат общую точку x , которая, очевидно, и будет предельной для Y .

Осталось доказать, что шары \tilde{B}_k вложены друг в друга. В самом деле, пусть z_k — центр k -го шара. Поскольку $B_k \cap B_{k+1}$ непусто (именно, $B_k \cap B_{k+1} \supset Y_k$), имеем $\rho(z_k, z_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^k}$. После увеличения радиусов в 4 раза будем иметь тем самым, что все точки шара \tilde{B}_{k+1} удалены от z_k не более чем на $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = (\frac{3}{2} + 2) \cdot \frac{1}{2^k} < 4 \cdot \frac{1}{2^k}$. Поэтому $B_{k+1} \subset B_k$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем считать требование полноты и полной ограниченности третьим определением компактности (для метрического пространства).

Определение 3. Метрическое пространство X называется компактным, если оно полно и вполне ограничено.

Пример. («Гильбертов кирпич») Рассмотрим в пространстве l^2 множество

$$Q = \{x \in l^2 \mid |x_0| \leq 1, |x_1| \leq \frac{1}{2}, \dots, |x_k| \leq \frac{1}{2^k}, \dots\}. \quad (1)$$

Оно является компактным.

Покажем, как построить для каждого $\varepsilon > 0$ конечную ε -сеть в Q . Заметим сначала, что если для произвольного $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$ положить $[x]_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, то

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2. \quad (2)$$

В случае $x \in Q$ из (1) и (2) имеем

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

Выберем теперь такое n , что $\frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Осталось лишь «построить сеть по оставшимся координатам». Положим

$$R = \{x \in l^2 \mid x_1 = k_1 \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}, \dots, k_n \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}, 0, 0, \dots\},$$

где целые числа $k_i, i = \overline{0, n}$, пробегают все значения, при которых $|k_i \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}| \leq \frac{1}{2^i}$. Тогда, если $x \in Q$, то расстояние от $[x]_n$ до ближайшего элемента сети будет не больше $\sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon}{2n}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$; с учётом оценки $\|x - [x]_n\|^2 \leq \frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и теоремы Пифагора получаем требуемое.

4. Связь между метрическим и топологическим определениями компактности

Установим теперь связь между топологическими и метрическими определениями компактности для метрического пространства.

Для этого нам потребуется 3 вспомогательные леммы.

Лемма 1. Вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно.

Доказательство очевидно: достаточно взять конечные 1 -, $\frac{1}{2}$ -, $\frac{1}{4}$ - и т. д. сети.

Лемма 2. Сепарабельное метрическое пространство имеет счётную базу.

Лемма 3. Пусть топологическое пространство T имеет счётную базу. Тогда из любого его открытого покрытия можно извлечь счётное подпокрытие.

Доказательства лемм 2 и 3 во избежание перегрузки текста вынесены в приложение.

Теперь мы в состоянии доказать, пожалуй, самую интересную теорему данного семинара.

Теорема. «Топологические» и «метрические» определения компактности равносильны (разумеется, в своей общей области применимости — для метрических пространств).

Доказательство.

1а \Rightarrow 2. Пусть X — метрическое пространство, в котором любая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть Y — произвольное бесконечное множество в X . Докажем, что оно имеет предельную точку. Образует последовательность *различных* точек множества Y :

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}. \quad (3)$$

Построим множества

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, X_2 = \{x_2, x_3, x_4, \dots\}, X_3 = \{x_3, x_4, x_5, \dots\}, \dots \quad (4)$$

Тогда, очевидно, их замыкания образуют центрированную систему замкнутых множеств. В силу компактности в смысле «топологического определения» 1а она имеет непустое пересечение. Обозначим через x некоторую точку из указанного пересечения. Значит, x является точкой касания для каждого из множеств (4). Если x не совпадает ни с одной из точек (3), то, очевидно, x является предельной точкой для всех X_n (как точка касания, не принадлежащая множеству), а следовательно, и для Y , т. к. $X_n \subset Y$. Если же имеет место совпадение $x = x_{n_0}$, то в силу попарной различности точек (3) такое совпадение не имеет места больше ни при каком n и для всех X_n , $n > n_0$. Тогда аналогично предыдущему случаю получаем, что точка x является предельной по крайней мере для X_n , $n > n_0$ (на самом деле всё же для всех, но это не важно), а поэтому и для Y .

2а \Rightarrow 1а. Итак, пусть в данном метрическом пространстве из любой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Докажем сначала, что в этом случае любая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть Φ_n , $n \in \mathbb{N}$, — замкнутые множества. Рассмотрим множества

$$\Psi_n = \bigcap_{k=1}^n \Phi_k. \quad (5)$$

Их непустота гарантируется центрированностью системы. Выберем в каждом из них произвольным образом по точке $x_n \in \Psi_n$. По условию последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x$. Докажем, что точка x принадлежит всем Φ_n . Поскольку последние замкнуты (как конечные пересечения замкнутых множеств), достаточно доказать, что x является точкой касания для каждого из множеств Φ_n , т. е. что в любой её ε -окрестности найдётся хотя бы одна точка из Φ_n . Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости $x_{n_k} \rightarrow x$ при всех k , больших некоторого $K(\varepsilon)$, получим $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$. Но в силу (5) точка x_{n_k} принадлежит всем множествам Φ_n с $n \leq n_k$. С другой стороны, условие $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ выполнено также при всех $k > K(\varepsilon)$, а для любого N найдётся k , при котором $N \leq n_k$. Тем самым показано, что в ε -окрестности точки x найдутся точки всех множеств Φ_n , что и требовалось.

Осталось доказать равносильность компактности и счётной компактности (применительно к метрическим пространствам; в общем случае это неверно!). Но из определения 2а следует 3, т. е. пространство будет иметь счётную базу, а тем самым (в силу леммы 2) будет сепарабельным. Тогда по лемме 3 любое покрытие такого пространства содержит счётное подпокрытие, и мы можем применить предыдущие рассуждения.

Теорема доказана.

Для удобства читателей приведём здесь логическую схему проведённых выше рассуждений.

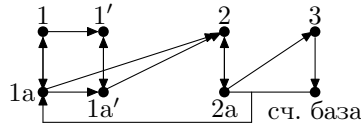


Рис. 1. Логическая схема

5. Компактные множества в метрических пространствах

До сих пор мы говорили лишь о компактных пространствах. Дадим теперь определение компактного множества.

Определение. Множество A в метрическом пространстве X называется компактным, если оно компактно как метрическое пространство (с прежней метрикой²).

Поскольку компактность в метрических пространствах может быть определена в чисто метрических терминах (обсуждением чего мы занимались выше), то свойство множества (метрического пространства) быть компактным никак не зависит от «вложения» в другие метрические пространства, существенно лишь условие неизменности расстояния. (В случае общих топологических пространств ситуация меняется.)

Поскольку компактное пространство обязано быть полным, то компактное множество A с необходимостью замкнуто. (Очевидно, однако, что замкнутости ещё недостаточно для компактности множества.)

²Метрика в пространстве A , «унаследованная» от содержащего его пространства X , называется *индуцированной*

Однако нередко приходится рассматривать множества, единственным «препятствием» для которых к тому, чтобы быть компактными, является незамкнутость.

Определение. Множество A в метрическом пространстве X называется *предкомпактным*, если его замыкание в X компактно.

Так, например, в \mathbb{R} предкомпактны $[0; 1] \cap \mathbb{Q}, \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Внимание! В отличие от свойства компактности, свойство предкомпактности зависит от пространства, содержащего данное множество, что легко проиллюстрировать примером множества $(0; 1)$ в пространствах \mathbb{R} и $(0; +\infty)$.

6. Некоторые простые факты

Теорема (Вейерштрасса). Непрерывный образ компактного топологического пространства есть компактное топологическое пространство.

Доказательство. Пусть отображение $f : T_1 \rightarrow T_2$ непрерывно, причём образом пространства T_1 является всё T_2 . Пусть $\{O_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие пространства T_2 . Тогда множества $f^{-1}(O_\alpha)$ открыты в силу непрерывности отображения f и вместе образуют покрытие пространства T_1 . В силу компактности последнего из покрытия $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ можно извлечь конечное подпокрытие, но тогда его образ будет покрытием T_2 . Тем самым мы извлекли из $\{O_\alpha\}$ конечное подпокрытие.

Теорема доказана.

Следствие. Непрерывный образ компактного множества в метрическом пространстве есть компактное множество в метрическом пространстве образов. В частности, оно ограничено (см. задачу 2) и замкнуто (см. п. 5).

Теорема (Кантора). Функция, непрерывная на компактном метрическом пространстве, равномерно непрерывна.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть выполнено отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, \tilde{x} \in X \quad (\rho(x, \tilde{x}) < \delta, \rho(f(x), f(\tilde{x})) \geq \varepsilon).$$

Взяв, например, при всех $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n = \frac{1}{n}$ и построив соответствующие последовательности x_n, \tilde{x}_n , получим для некоторой сходящейся подпоследовательности $x_{n_k} \rightarrow x$:

$$x_{n_k} \rightarrow x, \quad \tilde{x}_{n_k} \rightarrow x, \quad f(x_{n_k}) \rightarrow f(x), \quad f(\tilde{x}_{n_k}) \rightarrow f(x).$$

Тогда в силу непрерывности расстояния по обоим аргументам в совокупности (доказать самостоятельно) имеем

$$\rho(f(x), f(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k})) \geq \varepsilon,$$

что невозможно.

Теорема доказана.

7. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве. Замкнутость конечномерного подпространства в банаховом пространстве

Утверждение. В любом конечномерном нормированном пространстве L^n все нормы эквивалентны, т. е. связаны соотношением

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad \forall x \in L^n \quad \alpha_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq \alpha_2 \|x\|.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать эквивалентность какой-либо фиксированной нормы всем остальным. Сделаем это для евклидовой нормы $\|x\|_2$. Прежде всего заметим, что произвольная норма $\|x\|$ непрерывна как функция своего аргумента относительно евклидовой нормы: $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow 0} \|x\| \rightarrow 0$. В самом деле, если e_1, \dots, e_n — элементы ортонормированного базиса, x_1, \dots, x_n — координаты элемента x в этом базисе, то $\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \rightarrow 0$ при $\|x\|_2 \rightarrow 0$ в силу очевидной оценки $|x_i| \leq \|x\|_2$. В силу теоремы Больцано—Вейерштрасса о компактности ограниченных замкнутых множеств в \mathbb{R}^n единичная сфера $\{x \in L^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ компактна (см. также задачу 3), а в силу теоремы Вейерштрасса о непрерывном образе компактного пространства множество N значений, которые принимает норма $\|x\|$ на единичной относительно $\|x\|_2$ сфере, есть компактное множество действительных чисел. Следовательно, N замкнуто и ограничено. Но тогда, во-первых, N ограничено сверху, а во-вторых, «отграничено» от нуля, поскольку норма ненулевого элемента отлична от нуля. Итак, на единичной относительно евклидовой нормы сфере имеем

$$0 < \beta_1 \leq \|x\| \leq \beta_2,$$

или

$$\alpha_1 \|x\| \leq 1 \leq \alpha_2 \|x\| \tag{6}$$

с $\alpha_1 = 1/\beta_2$, $\alpha_2 = 1/\beta_1$, откуда для произвольного $x \in L^n$ имеем

$$\alpha_1 \|x\| \leq \|x\|_2 \leq \alpha_2 \|x\|.$$

Следствие 1. В конечномерном нормированном пространстве сходимость по норме влечёт сходимость по любой другой норме, которую можно ввести в данном линейном пространстве.

Следствие 2. Из предыдущего следствия вытекает, что сходимость по норме в конечномерном пространстве эквивалентна покоординатной сходимости. В самом деле: это верно для евклидовой нормы (которая может быть введена так, что используемый базис окажется ортонормированным).

Утверждение. В произвольном банаховом пространстве X любое конечномерное линейное подпространство (многообразии) L^m замкнуто (является подпространством).

Доказательство. Требуется лишь доказать, что если некоторая последовательность $\{x_n\} \subset L^m$ сходится по норме X , то её предел принадлежит L^m . Для доказательства этого факта

рассмотрим сначала L^m как линейное пространство (линейное многообразие). Легко убедиться, что индуцированная из пространства X норма будет нормой и в L^m . Следовательно, (в силу утверждения об эквивалентности норм) фундаментальная по норме пространства X последовательность будет фундаментальной и по какой-либо евклидовой норме в L^m . Введём в L^m ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Тогда последовательности координат элементов x_n тоже будут фундаментальными, а следовательно, сходящимися. Задаваемый соответствующими пределами элемент $x \in L^m$ будет пределом $\{x_n\}$ в евклидовой норме, а следовательно, и в исходной норме, совпадающей с нормой X . В силу единственности предела имеем $x_n \rightarrow x \in L^m$, что и требовалось.

Утверждение доказано.

8. Теорема Арцела

Теорема (Арцела). Пусть функции заданы $f_n : K_1 \rightarrow K_2$ и

- 1) K_1, K_2 — компактные метрические пространства;
- 2) последовательность функций $\{f_n\}$ является *равностепенно непрерывной*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, \tilde{x} \in K_1, \forall n \in \mathbb{N} (\rho_1(x, \tilde{x}) \leq \delta \Rightarrow \rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) \leq \varepsilon). \quad (7)$$

Тогда из последовательности $\{f_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $f \in C(K_1, K_2)$.

Доказательство.

1. Построим (это возможно в силу компактности K_1) конечные 1 -, $\frac{1}{2}$ -, $\frac{1}{4}$ - и т. д. сети. Упорядочив совокупность точек этих сетей в порядке перечисления и выбрасывая из последовательности повторяющиеся точки, получим счётное всюду плотное в K_1 множество $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_l, \dots\}$. Для каждого фиксированного l рассмотрим последовательности $\{f_n(x_l)\}$. В силу компактности множества значений K_2 с помощью «диагональной процедуры» (см. ниже) можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая будет сходитьсся в каждой точке $x_l \in X$:

$$f(x_l) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_l), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Для сокращения записи будем далее обозначать полученную подпоследовательность функций $\{f_{n_k}\}$ одним индексом: $f_k \equiv f_{n_k}$, не смешивая её с исходной последовательностью.

2. Докажем, что полученная функциональная подпоследовательность сходится поточечно при всех $x \in K_1$, а не только при $x_l \in X$, и, более того, сходимость равномерна на K_1 . Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пользуясь неравенством треугольника, запишем для произвольного $x \in K_1$:

$$\rho_2(f_k(x), f_m(x)) \leq \rho_2(f_k(x), f_k(x_l)) + \rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) + \rho_2(f_m(x_l), f_m(x)), \quad (8)$$

где x_l будет определено ниже. Пользуясь равностепенной непрерывностью исходной функциональной последовательности (а значит, и выбранной подпоследовательности), найдём такое $\delta > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\rho_1(\bar{x}, \bar{x}) < \delta$ будет выполнено $\rho_2(f(\bar{x}), f(\bar{x})) < \frac{\varepsilon}{3}$. Найдём

первое среди чисел 2^{-j} , $j \in \mathbb{N}$, меньше δ . Рассмотрим *конечное* множество $X_j \subset X$, состоящее из всех элементов выбранных ранее 1 -, $\frac{1}{2}$ -, \dots , $\frac{1}{2^j}$ - сетей в K_1 . (Легко видеть, что тогда для каждого $x \in X$ ближайший к нему элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии меньше δ .) В силу сходимости последовательности $\{f_k\}$ во всех точках X_j (поскольку она по построению сходится всюду на X) существует такое $N \in \mathbb{N}$ (зависящее только от ε , но не от x !), что для любых $k, m > N$ и для любого $x_l \in X_j$ верно неравенство

$$\rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (9)$$

Поскольку ближайший к произвольному фиксированному элементу $x \in K_1$ элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии ближе δ , то с учётом выбора δ и два остальных слагаемых в (8) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, откуда мы получаем

$$\rho_2(f_k(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad (10)$$

при всех $x \in K_1$ и всех $k, m > N(\varepsilon)$. Тем самым установлена «равномерная фундаментальность» последовательности $\{f_k\}$ на K_1 . Из этого факта следует сходимость в каждой точке, а также равномерность этой сходимости: для доказательства последней достаточно перейти в (10) к пределу при $m \rightarrow \infty$ (уже зная, что он существует поточечно).

Итак, мы доказали, что из данной последовательности можно извлечь равномерно сходящуюся последовательность, предел которой — как равномерный предел непрерывных функций — сам представляет собой непрерывную функцию.

Теорема доказана.

Следствие. Семейство функций из $C(K_1, K_2)$, обладающее свойством равномерной непрерывности (как в условии теоремы) с конкретными $\delta(\varepsilon)$, является компактным (в индуцированной из $C(K_1, K_2)$ метрике).

В самом деле, мы показали, что любая последовательность элементов этого семейства сходится в $C(K_1, K_2)$. Осталось доказать, что предел лежит в рассматриваемом семействе. Но это легко следует из предельного перехода в неравенстве $\rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) \leq \varepsilon$.

Замечание. Если бы мы использовали в условии теоремы неравенство $\rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) < \varepsilon$, то смогли бы гарантировать лишь предкомпактность соответствующего семейства функций, т. к. неравенство при предельном переходе может стать нестрогим.

9. Теорема Пеано

В качестве примера использования теоремы Арцела докажем теорему Пеано о существовании (локальном) решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Эта теорема не гарантирует единственности, но зато верна в более слабых предположениях относительно правой части уравнения; при этом вместо теоремы о неподвижной точке в доказательстве используется более изощрённая техника, основанная на идее компактности.

Теорема (Пеано). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y). \quad (11)$$

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области G , то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит *хотя бы одна* интегральная кривая этого уравнения.

Доказательство. 1. Заметим прежде всего (см. теорему Вейерштрасса, п. 6, и задачи 2, 3), что функция $f(x, y)$, как непрерывная на компактном множестве G , ограничена. Пусть $M > 0$ таково, что всюду в G верно $|f(x, y)| < M$.

2. Построим фигуру $\Delta \subset G$ следующим образом. Проведём через точку (x_0, y_0) прямые с угловыми коэффициентами $\pm M$ и возьмём $a < x_0, b > x_0$ так, чтобы затушёванные треугольники лежали целиком в G . Это возможно, т. к. (x_0, y_0) — внутренняя точка области G .

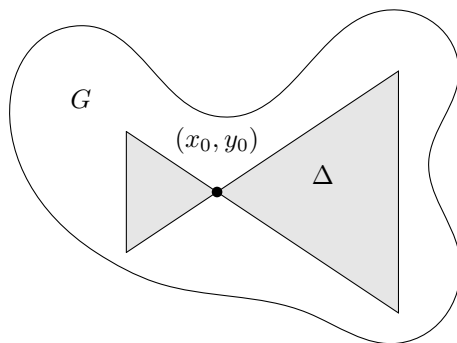


Рис. 2. Фигура Δ

3. Построим последовательность ломаных Эйлера, лежащих в Δ . Именно, из точки (x_0, y_0) проведём отрезок с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до точки (x_1, y_1) (здесь, очевидно, $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$). Затем проведём отрезок с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2) . Важно, что каждое следующее звено не может «вылезти» за верхнюю и нижнюю наклонные границы фигуры Δ (почему?). При этом каждый раз будем брать приращение по x «не слишком маленьким» (чтобы достичь абсциссы b за конечное число шагов) и «не слишком большим» (меньше некоторого δ , своего для каждой конкретной ломаной). Аналогично построим часть ломаной и «назад» до абсциссы a . Описанным способом построим бесконечную последовательность ломаных L_n , где $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $\varphi_n(x)$ функции (определённые на $[a; b]$), графиками которых являются ломаные L_n .

Заметим, что эти ломаные лежат целиком в пределах фигуры $\Delta \subset G$, «не вылезая» вверх или вниз и даже не соприкасаясь с её наклонными границами (почему?). Тем самым, каждая вершина ломаной оказывается строго внутри углов, образованных этими границами. Более того, функции φ_n являются липшиц-непрерывными с общей константой Липшица M (докажите это аккуратно!).

4. Таким образом, функции $\{\varphi_n(x)\}$ обладают следующими свойствами:

1) они определены на $[a; b]$;

- 2) они равномерно ограничены;
 3) они равностепенно непрерывны.

(Свойства 2), 3) следуют из сказанного в последнем абзаце этапа 3 доказательства.)

В силу теоремы Арцела из последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ можно выделить сходящуюся равномерно на $[a; b]$ подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}(x)\}$. Обозначим её для простоты $\{\psi_k(x)\}$ и положим

$$\psi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x). \quad (12)$$

Докажем, что эта функция является решением уравнения (11), проходящим через точку (x_0, y_0) (и, тем самым, решением соответствующей задачи Коши).

5. Надо доказать фактически:

$$\forall x' \in (a; b), \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x'' \in [a; b] \cap ((x' - \delta; x') \cup (x'; x' + \delta))$$

$$\left| \frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi(x')) \right| < 2\varepsilon.$$

Зафиксируем произвольные $x' \in [a; b]$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $f(x, y)$ и предельного соотношения (12) достаточно доказать, что

$$\exists \delta > 0, \exists K > 0 \forall k > K, \forall x'' \in [a; b] \cap ((x' - \delta; x') \cup (x'; x' + \delta))$$

$$\left| \frac{\psi_k(x'') - \psi_k(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi_k(x')) \right| < \varepsilon. \quad (13)$$

Поскольку f непрерывна в области G , то $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$ такое, что при

$$|x - x'| < 2\eta, \quad |y - y'| < 4M\eta \quad (14)$$

(где $y' = \psi(x')$) верно

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon. \quad (15)$$

Условия (14) задают открытый прямоугольник, который мы обозначим Q . При достаточно малом $\eta > 0$ он лежит целиком в Δ .

Выберем теперь $K \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > K$:

- 1) верно неравенство $|\psi(x) - \psi_k(x)| < 2M\eta$ для всех $x \in [a; b]$,
- 2) звенья ломаных L_k имеют длины меньше η по координате x .

Тогда при $|x - x'| < 2\eta$ все ломаные L_k с $k > K$ лежат внутри Q (почему?), а следовательно, для любой точки (x, y) , лежащей на любой из этих ломаных при $|x - x'| < 2\eta$, выполнено (15).

Рассмотрим теперь конкретную ломаную с некоторым $k > K$. Пусть точки $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ — её вершины, причём

$$a_0 \leq x' < a_1 < \dots < x'' \leq a_{n+1} \quad (16)$$

(для определённости считаем, что $x'' > x'$; случай $x'' < x'$ рассматривается аналогично). Для функции $\psi_k(x)$ имеем

$$\begin{aligned}\psi_k(a_1) - \psi_k(x') &= f(a_0, b_0)(a_1 - x'); \\ \psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) &= f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i), \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \psi_k(x'') - \psi_k(a_n) &= f(a_n, b_n)(x'' - a_n).\end{aligned}$$

Тогда при $|x' - x''| < \eta$ в силу (15) и того факта, что все вершины $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ лежат в прямоугольнике Q , имеем

$$\begin{aligned}[f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') &< \psi_k(a_1) - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x'); \\ [f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) &< \psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) < [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i), \quad i = \overline{1, n-1}; \\ [f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_n) &< \psi_k(x'') - \psi_k(a_n) < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_n).\end{aligned}$$

Сложив эти равенства, получаем:

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \psi_k(x'') - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x'),$$

откуда и следует (13).

Теорема доказана.

Замечание. Разные последовательности ломаных Эйлера сходятся к разным решениям уравнения (11), и, таким образом, решение не единственно. Рассмотрите пример задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Приложение

Доказательство леммы 2. Достаточно доказать, что базу стандартной метрической топологии в сепарабельном метрическом пространстве X образуют шары B_{nk} с центрами в точках всюду плотной счётной системы $\{x_n\}$ и всевозможными рациональными радиусами $r_k, k \in \mathbb{N}$. Поскольку всякое открытое множество в метрическом пространстве представимо (по определению) в виде объединения шаров, достаточно доказать, что произвольный шар представим в виде объединения указанных шаров.

Пусть $B \equiv B_R(x) \subset X$ — шар радиуса R с центром в точке x ; пусть y — произвольная точка в этом шаре. Пусть $r = \frac{R - \rho(x, y)}{3}$, тогда:

- 1) в шаре радиуса r с центром в точке y найдётся точка x_n из счётной системы (поскольку последняя всюду плотна в X);
- 2) шар с центром в точке x_n радиуса r_k , где $r_k \in \mathbb{Q}, r < r_k < 2r$, содержит точку y и лежит целиком в шаре B (докажите самостоятельно!).

Проведя для каждой точки шара B аналогичное построение, мы представим его в виде объединения шаров из системы $\{B_{nk}\}$, что и доказывает, что последняя образует базу (очевидно, счётную).

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть $\{G_n\}$ — счётная база пространства T . Пусть $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — некоторое его открытое покрытие. Тогда для каждого O_α из покрытия существует (по определению базы топологии) представление

$$O_\alpha = \cup_{k \in K_\alpha} G_k, \quad K_\alpha \subset \mathbb{N}. \quad (17)$$

Обозначим $K = \cup_{\alpha \in A} K_\alpha \subset \mathbb{N}$. Поскольку $\{O_\alpha\}$ — покрытие, то имеем

$$T = \cup_{\alpha \in A} O_\alpha = \cup_{\alpha \in A} \cup_{k \in K_\alpha} G_k = \cup_{k \in K} G_k, \quad K \subset \mathbb{N}. \quad (18)$$

Тем самым, подсемейство $\{G_k\}_{k \in K}$ базы топологии является покрытием. Но в силу (17) и $K = \cup_{\alpha \in A} K_\alpha \subset \mathbb{N}$ для каждого $k \in K$ найдётся хотя бы одно такое α_k , что $G_k \subset O_{\alpha_k}$. Следовательно,

$$T = \cup_{k \in K} G_k \subset \cup_{k \in K} O_{\alpha_k} \subset T,$$

или $T = \cup_{k \in K} O_{\alpha_k}$. Мы извлекли из данного покрытия не более чем счётное подпокрытие.

Лемма доказана.

Диагональная процедура. Пусть нам требуется из последовательности функций $\{f_n : K_1 \rightarrow K_2\}$ извлечь подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке счётного множества $X = \{x_l\}_{l \in \mathbb{N}}$. Выберем на первом шаге подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \equiv \{f_{n_1}\}$, сходящуюся в точке x_1 (это можно сделать, т. к. последовательность $\{f_n(x_1)\} \subset K_2$ лежит в компактном пространстве). Далее выберем *из полученной подпоследовательности* последовательность $\{f_{n_2}\}$, ..., на i -ом шаге — выберем из подпоследовательности $\{f_{n_{i-1}}\}$ подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, сходящуюся в точке $x_i \in X$. Заметим, что при извлечении подпоследовательностей свойство сходить в предыдущих точках не терялось.

Запишем теперь полученные последовательности в бесконечный столбец и заметим, что под произвольным элементом записан элемент, номер которого в исходной последовательности не меньше номера рассматриваемого элемента в ней же. (Зачем нужно это замечание?) Рассмотрим теперь «диагональную последовательность», способ построения которой исходя из полученной таблицы ясен из названия, — она будет подпоследовательностью исходной последовательности (почему?), обладающей нужным нам свойством сходимости во всех точках $x_l \in X$ (почему?).

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что любое вполне ограниченное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

2. Доказать, что любое компактное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

3. Как следует из задачи 2 и вышеизложенного материала, любое компактное множество в метрическом пространстве является замкнутым и ограниченным.

1) Доказать, что в \mathbb{R}^n эти два условия вместе достаточны для компактности множества.

2) Сформулировать достаточное условие предкомпактности в \mathbb{R}^n .

3) Привести пример, показывающий, что в общем случае этих двух условий недостаточно для компактности.

4. С помощью « $\frac{\varepsilon}{3}$ -приёма» доказать полноту пространства $C(M_1, M_2)$ ограниченных непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в полное метрическое пространство M_2 .

5. Пусть X — банахово пространство, причём X^* сепарабельно. Как с помощью диагональной процедуры извлечь из ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ слабо сходящуюся?

6. Решить задачу 12 из семинара 8.

7. Пусть M — равномерно ограниченное множество функций в $C[a; b]$. Доказать, что множество функций

$$\left\{ \int_0^t x(\tau) d\tau \mid x(t) \in M \right\}$$

предкомпактно в $C[a; b]$.

8. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ на $[a; b]$ таких, что

$$\int_a^b ((x(t))^2 + (x'(t))^2) dt < k$$

при некотором фиксированном k , предкомпактно в $C[a; b]$.