Лекция 1. Мера Лебега плоских множеств.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

14 октября 2011 г.

Введение

Функция Дирихле не интегрируема по Риману:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0, & \text{при} \quad x \in \mathbb{J} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Нужно расширить понятие интеграла Римана так, чтобы, в частности, функция Дирихле оказалась интегрируемой.

Элементы теории множеств

$$A \cup B = \{x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\},$$

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

ПРИМЕР 1. Пусть $A \subset P$ и $B \subset P$ тогда имеют место следующие равенства:

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]\,, \tag{1}$$

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B)\,, \tag{2}$$

$$A \vartriangle B = (P \setminus A) \vartriangle (P \setminus B)\,. \tag{3}$$

ПРИМЕР 2. Кроме того, справедливы следующие вложения

$$(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)\,, \tag{4}$$

Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)\,. \tag{5}$$

Мера прямоугольников

$$\Pi = \{A_x \otimes B_y\},$$

$$A_x = \{x \in (a, b]\}, \quad B_y = \{y \in [c, d]\}.$$

Причем Π может быть пустым множеством, если, например, $a > b$, точкой, когда $a = b$ и $c = d$ и отрезком, когда $a = b$ и $c < d$.

Определим меру собственного прямоугольника Π стандартным образом.

$$m(\Pi) = (b - a)(d - c)$$

Если же Π — это пустое множество, точка или отрезок, то определению считаем, что

$$m(\Pi) = 0.$$

Мера плоских элементарных множеств

Заметим, что введенная мера m является аддитивной функцией прямоугольников, т. е. если

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i).$$

Теперь мы введем понятие *элементарного множества* из $\mathbb{R}^2$.

Определение 1. *Элементарным множеством из $\mathbb{R}^2$ называется множество, полученное объединением конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников.*

При этом мера элементарного множества вводится как

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i), \quad \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Корректность определения

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j, \qquad (6)$$

где

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В силу равенств (6) имеем

$$\Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} \left(Q_j \bigcap \Pi_i \right), \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\Pi_i \bigcap Q_j \right), \qquad (7)$$

причем

$$\left(Q_{j_1} \bigcap \Pi_i \right) \bigcap \left(Q_{j_2} \bigcap \Pi_i \right) = \emptyset \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2,$$

$$\left(\Pi_{i_1} \bigcap Q_j \right) \bigcap \left(\Pi_{i_2} \bigcap Q_j \right) = \emptyset \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2.$$

Корректность определения

Очевидно, что

$$Q_j \bigcap \Pi_i = \Pi_i \bigcap Q_j$$

является прямоугольником. Таким образом, согласно определению (??) в силу (6), (7) приходим к следующей цепочке равенств:

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\bigcup_{j=1}^{l}\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} m\left(\Pi_i \bigcap Q_j\right) = \sum_{j=1}^{l} m(Q_j). \tag{8}$$

⊠

Полуаддитивность меры элементарных множеств

Имеет место свойство *полуаддитивности* элементарных множеств.

Теорема

Пусть A *и* A_n *при* $n \in \mathbb{N}$ *являются элементарными множествами, причем*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$m^{'}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^{'}(A_n). \tag{9}$$

Доказательство теоремы. 1.

Прежде всего заметим, что по элементарному множеству A можно построить такое замкнутое элементарное множество $\overline{A}$, что

$$\overline{A} \subset A$$

и

$$m'(\overline{A}) \geqslant m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi_j, \quad \text{где} \quad \Pi_i \bigcap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Пусть $\overline{\Pi}_j$ — это замкнутый прямоугольник (т. е. имеет вид $[a, b] \otimes [c, d]$), для которого имеет место вложение

$$\overline{\Pi}_j \subset \Pi_j$$

Доказательство теоремы. 2.

и имеет площадь

$$m(\overline{\Pi}_j) \geqslant m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2l},$$

тогда мы приходим к неравенству (10).
$\boxtimes$

Доказательство теоремы. 3.

Теперь заметим, что для всякого элементарного множества A_n найдется такое открытое элементарное множество $\widetilde{A}_n$, что

$$A_n \subset \widetilde{A}_n \quad \text{и} \quad m'(\widetilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{11}$$

Ясно, что

$$\overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n. \tag{12}$$

Но $\overline{A}$ — это замкнутое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^2$, т. е. компакт. Поэтому из открытого покрытия $\{\widetilde{A}_n\}$ множества $\overline{A}$ можно выделить конечное подпокрытие

$$\left\{\widetilde{A}_{n_i}\right\}_{i=1}^{s} \supset \overline{A}.$$

Доказательство теоремы. 4.

Можно доказать, что имеет место неравенство

$$m'(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}). \tag{13}$$

Теперь из неравенств (10), (11) и (13) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} m'(A) \leqslant m'(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(\widetilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{14}$$

Приходим к утверждению.

Следствие из теоремы.

Следствие. *Мера* $m^{'}$, *заданная на элементарных множествах, является* $\sigma-$*аддитивной:*

$$m^{'}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^{'}(A_n), \tag{15}$$

где

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \emptyset \quad \textit{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

Определение 2. *Внешней мерой* μ^* *множества* A *является следующая конструкция*:

$$\mu^*(A) \equiv \inf_{A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_k} \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_k), \qquad (16)$$

где $\{\Pi_k\}$ *— это произвольная система прямоугольников.*

Замечание. Заметим, что в силу того, что $A \subset \Pi$ и $m(\Pi) = 1$ из равенства (16) приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \leqslant m(\Pi) = 1,$$

т. е. внешняя мера множества $A \subset \Pi$ всегда конечна.

Следствие. *Из определения внешней меры сразу же вытекает, что*

$$\mu^*(A) = m'(A)$$

для всякого элементарного множества A.

Полуаддитивность внешней меры.

Теорема

Пусть

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n). \tag{17}$$

Доказательство теоремы. 1.

Заметим, что в силу определения внешней меры μ^* для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая система прямоугольников

$$\{\Pi_{k,n}\}_{k=1}^{+\infty},$$

что

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_{k,n}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{18}$$

Доказательство теоремы. 2.

С другой стороны,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и, стало быть,

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(\Pi_{k,n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы.

Определение 3. *Множество A называется измеримым по Лебегу, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что имеет место следующее неравенство:*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{19}$$

Замечание. Отметим, что из определения 3 сразу же вытекает измеримость по Лебегу множеств A, имеющих нулевую внешнюю меру.
$\square$ Действительно, пусть $\mu^*(A) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $B = \emptyset$ и

$$\mu^*(A \triangle B) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

$\boxtimes$

Свойства меры Лебега.

Множество измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}$ обладает определенным набором свойств, некоторые из которых мы собрали в следующей лемме, доказательство которой мы опустим.

Лемма

Сумма, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми по Лебегу множествами.

Свойства меры Лебега.

Теперь мы в состоянии доказать $\sigma-$аддитивность меры Лебега μ на множестве $\mathfrak{M}$. Сначала докажем следующую теорему.

Теорема

Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n,$$

где $A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \emptyset$ *при* $n_1 \neq n_2$, *причем* $A, \{A_n\} \in \mathfrak{M}$, *тогда*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Доказательство теоремы. 1.

Прежде всего заметим, что для любых множеств A и B имеет место следующее неравенство:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \bigtriangleup B). \tag{20}$$

$\square$ Действительно, имеют место вложения

$$A \subset B \cup (A \bigtriangleup B)\,, \quad B \subset A \cup (A \bigtriangleup B)\,,$$

из которых в силу доказанной полуаддитивности внешней меры μ^* имеют место следующие неравенства:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \bigtriangleup B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \bigtriangleup B).$$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \bigtriangleup B).$$

$\boxtimes$

Доказательство теоремы. 2.

Очевидно, что рассматриваемую теорему достаточно доказать для случая двух измеримых по Лебегу непересекающихся множеств A_1 и A_2.
Поскольку $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества B_1 и B_2, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{21}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2. \tag{22}$$

Ясно, что как объединение двух измеримых множеств множество A измеримо по Лебегу и, конечно, множество B является элементарным.

Доказательство теоремы. 3.

Ранее было доказано вложение

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2), \tag{23}$$

поскольку множества A_1 и A_2 непересекаются. Заметим, что на элементарных множествах внешняя мера μ^* и мера m' совпадают. Тогда из (21) и (23) вытекает следующее соотношение:

$$m'(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < 2\varepsilon. \tag{24}$$

Наконец, в силу (20) имеют место следующие неравенства:

$$\left| m'(B_1) - \mu^*(A_1) \right| = |\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \varepsilon, \tag{25}$$

$$\left| m'(B_2) - \mu^*(A_2) \right| = |\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| \leqslant \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon. \tag{26}$$

Доказательство теоремы. 4.

С другой стороны, имеет место равенство

$$m^{'}(B) = m^{'}(B_1) + m^{'}(B_2) - m^{'}(B_1 \cap B_2). \tag{27}$$

Доказательство теоремы. 5.

☐ Докажем, что

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2).$$

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$A_1 = A_1 \cap A_2 + A_1 \cap A_2^c, \quad A_2 = A_1 \cap A_2 + A_1^c \cap A_2,$$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cap A_2 + A_1^c \cap A_2 + A_1 \cap A_2^c,$$

где для удобства мы ввели обозначение

$$A^c = E \backslash A.$$

Отсюда приходим к равенствам

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c), \quad \lambda(A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2),$$

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c).$$

☒

Доказательство теоремы. 6.

Из (24)–(27) вытекает неравенство снизу

$$m'(B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon. \tag{28}$$

Теперь мы воспользуемся следующим вложением множеств

$$A \bigtriangleup B \subset (A_1 \bigtriangleup B_1) \cup (A_2 \bigtriangleup B_2).$$

Из (20) и (28) вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{gathered}\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(A \bigtriangleup B) = m'(B) - \mu^*(A \bigtriangleup B) \geqslant \\ \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon - \mu^*(A \bigtriangleup B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.\end{gathered} \tag{29}$$

Доказательство теоремы. 7.

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{30}$$

Обратное неравенство очевидно и поэтому приходим к равенству

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Некоторые результаты.

Теорема

Счетное объединение и счетное пересечение измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми множествами.

Доказательство теоремы. 1.

Докажем измеримость счетного объединения измеримых множеств. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — это семейство измеримых множеств и пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Заметим, что без ограничения общности можно считать множества A_n попарно непересекающимися.

$\square$ Действительно, достаточно рассмотреть следующие множества:

$$A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Очевидно, что $A_{n_1}' \cap A_{n_2}' = \emptyset$ при $n_1 \neq n_2$ и, кроме того,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'. \quad \boxtimes.$$

Доказательство теоремы. 2.

В силу предыдущей теоремы имеет место цепочка выражений:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n^{'}\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n^{'}) \leqslant \mu(A). \qquad (31)$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n^{'})$$

сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(A_n^{'}) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (32)$$

С другой стороны, множество

$$C = \bigcup_{n=1}^{N} A_n^{'}$$

Доказательство теоремы. 3.

Стало быть, для $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что

$$\mu^*(C \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

Заметим, что имеет место вложение

$$A \vartriangle B \subset (C \vartriangle B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A'_n. \tag{34}$$

Стало быть, из (31)–(34) приходим к неравенству

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Некоторые результаты.

Теорема

Пусть $\{A_n\}$ — это счетная система измеримых по Лебегу и попарно непересекающихся множеств, тогда

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n), \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \tag{35}$$

Доказательство теоремы. 1.

Действительно,

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$$

и, значит,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \mu(A) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Переходя к пределу при $N \to +\infty$ мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Обратное неравенство очевидно.