Лекция 10. Банаховы пространства. Спектральная теория.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

8 ноября 2011 г.

Банаховы алгебры.

Определение. Банаховой алгеброй с единицей $\mathcal{A}$ называется такое линейное пространство над полем $\mathbb{C}^1$, в котором определена бинарная операция умножения

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : \quad a \times b \stackrel{def}{=} ab,$$

которая является ассоциативной и билинейной операцией:

$$(ab)c = a(bc);$$

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) b = \alpha_1 a_1 b + \alpha_2 a_2 b, \quad a(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 a b_1 + \beta_2 a b_2,$$

кроме того, векторное пространство $\mathcal{A}$ является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\| \quad \|$, причем

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \|b\| \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Наконец, существует единица $\mathrm{id} : \mathrm{id} \cdot a = a \cdot \mathrm{id} = a$.

Замечание и пример.

Из неравенства $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ вытекает непрерывность умножения. Действительно, пусть

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad \text{сильно в} \quad \mathcal{A},$$

тогда

$$\|a_n b_n - ab\| \leqslant \|a_n\|\|b_n - b\| + \|b\|\|a - a_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Банаховой алгеброй с единицей является, в частности, пространство линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$ относительно нормы

$$\|\mathbb{T}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbb{T}x\|.$$

Это наиболее существенный для нас пример.

Интеграл Бохнера.

Везде далее $\mathcal{A}$ — это банахова алгебра с единицей.
Пусть

$$f(z) : D \subset \mathbb{C}^1 \to \mathcal{A}$$

— это банаховозначная функция комплексного переменного, определенного в области D.

Пусть $l \in \mathbb{C}^1$ — гладкий жорданов контур.

Если строить, как и в случае $\mathcal{A} = \mathbb{C}^1$, интеграл Римана через интегральные суммы, а предельный переход осуществлять в смысле сильной сходимости рядов в банаховом пространстве, мы получим интеграл Бохнера

$$\int\limits_l f(z)\,dz \in \mathcal{A}.$$

Аналитичность.

Определение аналитичности банаховозначных функций такое же как и в ТФКП:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z, z+\Delta z \in D \subset \mathbb{C}^1,$$

только предел понимается не в смысле нормы $|\cdot|$ банахова пространства $\mathbb{C}^1$, а в смысле нормы $\|\cdot\|$ банахова пространства $\mathcal{A}$.

Оказывается, что аналитичность $\mathcal{A}-$значной функции $f(z)$ эквивалентна аналитичности следующей $\mathbb{C}^1-$значной функции

$$\varphi(z) = \langle w^*, f(z)u \rangle \quad \text{для всех} \quad w^* \in \mathcal{A}^*, \quad u \in \mathcal{A},$$

где

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

— это скобки двойственности между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

Обратимые элементы банаховой алгебры.

Определение. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется обратимым, если существует такой элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$, что имеют место следующие равенства:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = \mathrm{id}.$$

Если элементы $a, b \in \mathcal{A}$ обратимы, то элемент $ab \in \mathcal{A}$ тоже обратим, причем обратным является элемент $b^{-1}a^{-1}$. Действительно,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = \mathrm{id},$$
$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = \mathrm{id}.$$

Нетрудно доказать единственность обратного элемента.

Лемма о ряде Неймана.

Лемма

Пусть $a \in \mathcal{A}$. *Если* $\|a\| < 1$, *то элемент*

$$(\mathrm{id} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \in \mathcal{A}.$$

Доказательство.

Положим по определению $a^0 = \mathrm{id}$. Тогда имеет место равенство

$$(\mathrm{id} - a)\sum_{n=0}^{m} a^n = \sum_{n=0}^{m} a^n - \sum_{n=0}^{m} a^{n+1} = \mathrm{id} - a^{m+1}.$$

Значит,

$$\left\|(\mathrm{id} - a)\sum_{n=0}^{m} a^n - \mathrm{id}\right\| = \|a^{m+1}\| \leqslant \|a\|^{m+1} \to 0$$

при $m \to +\infty$, поскольку $\|a\| < 1$. Следовательно,

$$(\mathrm{id} - a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \mathrm{id},$$

$$(\mathrm{id} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.$$

Еще одна лемма.

Лемма

Пусть элемент $a \in \mathcal{A}$ *обратим. Тогда при условии*

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$$

обратим и элемент $a + b$, *причем*

$$(a+b)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a^{-1}b)^{-n} \right) a^{-1}.$$

Доказательство.

Справедливо выражение

$$(a+b) = a(\mathrm{id} + a^{-1}b) \Rightarrow (a+b)^{-1} = (\mathrm{id} + a^{-1}b)^{-1}a^{-1} =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a^{-1}b)^n \right) a^{-1}$$

при выполнении неравенства

$$\|a^{-1}b\| \leqslant \|a^{-1}\| \|b\| < 1 \Rightarrow \|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}.$$

Теорема об открытости подмножества обратимых элементов.

Теорема

Подмножество всех обратимых элементов банаховой алгебры A открыто, а отображение $a \to a^{-1}$ непрерывно в окрестности каждого обратимого элемента.

Доказательство-1.

Пусть $a \in \mathcal{A}$ обратим и a^{-1} — обратный элемент, тогда в силу предыдущей леммы элемент $(a+b)$ обратим при

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1},$$

Значит, подмножество всех обратимых элементов с каждым своим элементом содержит некоторую окрестность, т. е. открыто.

Рассмотрим отображение

$$\mathbb{T} : a + b \to (a+b)^{-1},$$

где a — обратим, а для элемента b выполнено указанное неравенство. Рассмотрим последовательность $\{b_m\} \subset \mathcal{A}$ такую, что

$$\|b_m\| < \|a^{-1}\|^{-1} \quad \text{и} \quad \|b_m - b\| \to +0.$$

Доказательство-2.

Докажем, что

$$\|\mathbb{T}(a+b_m)-\mathbb{T}(a)\| \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Действительно,

$$\|\mathbb{T}(a+b_m)-\mathbb{T}(a)\| = \left\| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a^{-1}b_m)^n \right) a^{-1} - a^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-a^{-1}b_m)^n \right) a^{-1} \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \|a^{-1}\|^n \|b_m\|^n \|a^{-1}\| \to +0$$

при

$$\|b_m\| \to +0.$$

Резольвента.

Определение. Если для элемента $a \in \mathcal{A}$ существует элемент

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1} \in \mathcal{A} \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in \mathbb{C}^1,$$

то элемент алгебры $\mathcal{A}$

$$R(\lambda, a) = (\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1}$$

называется резольвентой (единственность следует из единственности обратного элемента). Для удобства мы будем использовать упрощенное обозначение для резольвенты

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1}.$$

Определение. Множество

$$\mathrm{res}(a) \equiv \left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : \ \exists\, R(\lambda, a)\right\}$$

называется резольвентным множеством.

Ряд Неймана для резольвенты.

Пусть

$$\|a\| < |\lambda|,$$

тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{n} \qquad (1)$$

Значит, множество

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 \middle| \, |\lambda| > \|a\|\right\} \subset \mathrm{res}(a).$$

О непрерывности резольвенты.

Теорема

Пусть резольвента $R(\lambda, a)$ *некоторого элемента* $a \in \mathcal{A}$ *существует при* $\lambda \in D$, *где* D *— это компактное подмножество из* $\mathbb{C}^1$. *Тогда существует такая окрестность* $O(D)$ *компакта* D *и такая окрестность* $b(a, \varepsilon)$ *элемента* $a \in \mathcal{A}$, *что резольвента* $R(\lambda, a)$ *непрерывна по совокупности переменных*

$$(\lambda, a) \in O(D) \times b(a, \varepsilon).$$

Доказательство.

Прежде всего в силу теоремы о непрерывности отображения

$$\mathbb{T} : a \to a^{-1}$$

в окрестности обратимого элемента приходим к выводу, что в метрике

$$d((\lambda_1, a_1), (\lambda_2, a_2)) = \max\{|\lambda_1 - \lambda_2|, \|a_1 - a_2\|\}$$

для каждой точки $\lambda_0 \in D$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0) > 0$, что резольвента $R(\lambda, a)$ непрерывна на множестве

$$(\lambda, a) \in \{|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon;\ a \in b(a_0, \varepsilon(\lambda_0))\}.$$

Когда λ_0 пробегает весь компакт D множества

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$$

образуют открытое покрытие компакта D. Из которого, можно выделить конечное подпокрытие. Выбирая теперь минимальное $\varepsilon(\lambda_0)$ из конечного их числа получаем утверждение теоремы.

Одна лемма.

Лемма

Пусть $U \in \mathcal{A}$ — обратимый элемент. Тогда имеет место следующее равенство:

$$UR(\lambda, a)U^{-1} = R(\lambda, UaU^{-1}).$$

$$(\lambda \mathrm{id} - UaU^{-1})UR(\lambda, a)U^{-1} = \lambda UR(\lambda, a)U^{-1} - UaR(\lambda, a)U^{-1} =$$
$$= U(\lambda \mathrm{id} - a)R(\lambda, a)U^{-1} = UU^{-1} = \mathrm{id}.$$

В силу единственности резольвенты лемма доказана.

Спектр элемента.

Определение. Спектром элемента $a \in \mathcal{A}$ называется множество дополнительное к резольвентному множеству этого элемента

$$\sigma(a) = \mathbb{C}^1 \backslash \mathrm{res}(a).$$

В силу последней леммы, если $U \in \mathcal{A}$ — это обратимый элемент, то

$$\sigma(UaU^{-1}) = \sigma(a).$$

Поскольку, как мы доказали резольвентное множество $\mathrm{res}(a)$ является открытым, то спектральное множество $\sigma(a)$ является замкнутым.

Тождество Гильберта или первое резольвентное уравнение.

Оно имеет следующий вид:

$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = -(\lambda - \mu)R(\lambda, a)R(\mu, a).$$

$\square$ Рассмотрим тождество

$$(\mu \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = -(\lambda - \mu),$$

которое умножим на

$$R(\lambda, a)R(\mu, a).$$

$\boxtimes$

Второе резольвентное уравнение.

Их два. И они имеют следующий вид:

$$R(\lambda, b) - R(\lambda, a) = R(\lambda, b)(b - a)R(\lambda, a)$$

и

$$R(\lambda, b) - R(\lambda, a) = R(\lambda, a)(b - a)R(\lambda, b).$$

Докажем, например, первое из них. Имеет место тождество

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - b) = (b - a)$$

Умножим это тождество справа на $R(\lambda, a)$, а слева на $R(\lambda, b)$, тогда

$$R(\lambda, b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)R(\lambda, a) - R(\lambda, b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - b)R(\lambda, a) = R(\lambda, b)(b - a)R(\lambda, a)$$

Аналитичность резольвенты.

Заметим, что если $\lambda \in \mathrm{res}(a)$, то для близкого к этому λ числу μ в силу тождества Гильберта

$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = -(\lambda - \mu)R(\lambda, a)R(\mu, a)$$

получим равенство

$$\frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, a)R(\mu, a).$$

Переходя к сильному пределу при $\mu \to \lambda$ получим равенство

$$\frac{dR(\lambda, a)}{d\lambda} = -R(\lambda, a)^2.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda, a)$ является $\mathcal{A}-$значной аналитической функцией на резольвентном множестве.

Особые точки резольвенты.

Докажем, что спектр $\sigma(a)$ любого элемента $a \in \mathcal{A}$ является непустым множеством. Действительно, предположим противное. Тогда резольвента аналитична на всей комплексной плоскости.

В частности, функция

$$\varphi(\lambda) = \langle w^*, R(\lambda, a)u \rangle$$

для всех $w^* \in \mathcal{A}^*$ и всех $u \in \mathcal{A}$ аналитична на всей комплексной плоскости. Тогда она константа. Но, очевидно, эта функция переменная по λ. Поэтому она имеет особые точки. Значит, особые точки имеет и резольвента.
Значит, справедлива следующая теорема:

Теорема

Спектр $\sigma(a)$ является непустым замкнутым множеством.

Алгебра функций, аналитических в окрестности спектра.

Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\sigma(a)$ — спектр. Тогда рассмотрим семейство всех функций $\mathfrak{F}_a$, аналитических в некоторой (каждая в своей) окрестности спектра $\sigma(a)$.

Ясно, что относительно поточечного сложения и умножения на комплексные числа это семейство является линейным пространством. А относительно поточечного умножения является алгеброй.

Пусть $f(\lambda)$ — это функция, аналитическая в окрестности $D_f \supset \sigma(a)$ спектра, причем $l_f = \partial D_f$ — это жорданов контур. Рассмотрим следующий интеграл, понимаемый в смысле Бохнера:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

Гомоморфизм алгебр.

Итак, рассмотрим гомоморфизм алгебр

$$\mathcal{O}_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{A},$$

определенный равенством

$$f(a) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a) \, d\lambda.$$

(Интеграл в правой части называется интегралом Данфорда.)

Теорема

Указанное отображение является алгебраическим гомоморфизмом алгебр.

Доказательство-1.

Линейность отображения $\mathcal{O}_a$ очевидна.

Нам нужно доказать, что при этом отображении произведению двух функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ соответствует произведение элементов $f(a)$ и $g(a)$ из $\mathcal{A}$, определенных интегралами Данфорда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda,$$

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_g} g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu.$$

Итак, пусть области аналитичности D_f и D_g как окрестности спектра $\sigma(a)$ выбраны. Причем $l_f = \partial D_f$ и $l_g = \partial D_g$ являются жордановыми контурами и

$$D_g \cup \partial D_g \subset D_f, \quad \text{distance}\{\partial D_g, \partial D_f\} > 0.$$

Доказательство-2.

$$f(a)g(a) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} f(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda \int\limits_{l_g} g(\mu)R(\mu,a)\,d\mu =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f}\int\limits_{l_g} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda,a)R(\mu,a)\,d\mu\,d\lambda =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f}\int\limits_{l_g} f(\lambda)g(\mu)\frac{R(\lambda,a)-R(\mu,a)}{\mu-\lambda}\,d\mu\,d\lambda.$$

Доказательство-3.

Заметим, что поскольку $\lambda \notin \overline{D}_g$, то согласно теореме Коши имеем

$$\int\limits_{l_g} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu = 0,$$

а поскольку $\mu \in D_f$, то согласно теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda = f(\mu).$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} \int\limits_{l_g} f(\lambda) g(\mu) \frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_g} f(\mu) g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu.$$

Пример.

Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A}$ матриц 2×2 с единицей. Пусть

$$a=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad (\lambda\cdot\mathrm{id}-a)=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda\cdot\mathrm{id}-a)=(\lambda+1)(\lambda-3),\quad \sigma(a)=\{-1,3\},$$

$$R(\lambda,a)=\frac{1}{\lambda+1}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda-3}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$f(-1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(\lambda)}{\lambda+1}\,d\lambda,\quad f(3)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(\lambda)}{\lambda-3}\,d\lambda,$$

$l=\{\lambda\in\mathbb{C}^1, |\lambda|=4\}$, поэтому

$$f(a)=f(-1)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}+f(3)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Одна лемма.

Лемма

Пусть $\sigma(a)$ *содержится в области* D *с жордановой границей* ∂D, *тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda = \mathrm{id}.$$

$\square$ Действительно, пусть на контуре ∂D имеем $|\lambda| > \|a\|$, тогда согласно ряду Неймана для резольвенты имеем

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\lambda}\, d\lambda \cdot \mathrm{id} = \mathrm{id}.\boxtimes$$

О существовании обратной операторной функции.

Прежде всего заметим, что если функция $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$ и не имеет нулей в некоторой окрестности спектра $\sigma(a)$, то функция $1/\varphi(\lambda)$ также аналитична в окрестности спектра.

Теорема

Пусть $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$. Для существования $\varphi(a)^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\lambda)$ не имела нулей на спектре $\sigma(a)$.

Доказательство-1.

Пусть $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$ не имеет нулей в некоторой окрестности D спектра $\sigma(a)$. Тогда в этой окрестности

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} \in \mathfrak{F}_a,$$

$$\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda) = 1$$

в D. С одной стороны, в силу предыдущей леммы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda, a)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda, a)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda = \mathrm{id}.$$

Доказательство-2.

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda=\varphi(a)\cdot\varphi(a)^{-1},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda=\varphi(a)^{-1}\varphi(a).$$

Значит,

$$\varphi(a)\cdot\varphi(a)^{-1}=\varphi(a)^{-1}\varphi(a)=\mathrm{id}.$$

Итак, достаточность доказана.

Доказательство-3.

Докажем необходимость. Пусть функция $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$ и имеет ноль в точке $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Тогда функцию $\varphi(\lambda)$ можно представить в виде

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)h(\lambda), \quad h(\lambda) \in \mathfrak{F}_a.$$

Разумеется, функция $h(\lambda)$ тоже может обращаться в ноль в той же точке, но для дальнейшего это несущественно. Тогда в силу операторного исчисления имеем

$$\varphi(a) = (a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})h(a).$$

Доказательство-4.

Если бы существовал обратный элемент для $\varphi(a)$, то имело бы место равенство

$$(a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})h(a)\varphi(a)^{-1} = \mathrm{id},$$

но это означает, что элемент

$$a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id}$$

обратим, что противоречит тому, что $\lambda_0 \in \sigma(a)$.

Теорема доказана.

Лемма об отображении спектра.

Лемма

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Доказательство.

Пусть $\mu \in \mathbb{C}^1$ — фиксировано. Тогда рассмотрим в предыдущей лемме функцию

$$\varphi(\lambda) = \mu - f(\lambda).$$

Тогда в силу доказанной леммы операторная функция

$$\varphi(a) = \mu \cdot \mathrm{id} - f(a)$$

обратима, тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\lambda)$ не имеет нулей на спектре $\sigma(a)$.

В силу этого

$$\mu_0 \in \sigma(f(a)),$$

тогда и только тогда, когда найдется $\lambda_0 \in \sigma(a)$ такое, что

$$\mu_0 = f(\lambda_0).$$

Итак, утверждение доказано.

Степенные ряды.

Теорема

Пусть

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n$$

— степенной ряд с радиусом сходимости $r > \|a\|$. *Тогда*

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n$$

Доказательство.

Итак, выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$r > \|a\| + \varepsilon,$$

тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\|a\|+\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\|a\|+\varepsilon} \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n.$$

Спектральный радиус.

Определение. Спектральным радиусом $r(a)$ элемента a банаховой алгебры называется число

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Теорема

Справедлива формула

$$r(a) = \lim_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство-1.

Прежде всего напомним вид ряда Неймана для резольвенты

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^n .$$

Точно так же, как и в ТФКП, можно доказать, что для радиуса сходимости этого степенного ряда имеет место формула

$$r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Причем при $|\lambda| > r_0$ ряд сходится, а при $|\lambda| < r_0$ расходится и на границе $|\lambda| = r_0$ имеет особенности. Поэтому

$$r(a) = r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство-2.

Теперь докажем, что

$$r(a) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Имеют место вложения

$$(\sigma(a))^n = \sigma(a^n) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : |\lambda| \leqslant \|a^n\|\right\}.$$

Значит,

$$r(a)^n \leqslant \|a^n\|,$$

$$r(a) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

Теорема доказана.

Спектральное разложение-1.

Пусть спектр $\sigma(a)$ можно разбить на замкнутые компоненты

$$\sigma(a) = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j, \quad \mathrm{distance}\{\sigma_j, \sigma_k\} > 0 \quad j \neq k.$$

Пусть $O(\sigma_j)$ — это окрестности спектральных компонент, причем

$$O(\sigma_j) \bigcap (\sigma \backslash \sigma_j) = \emptyset.$$

Выберем D так, чтобы $\sigma_j \subset D_j \subset O(\sigma_j)$ и рассмотрим интегралы Данфорда

$$P(\sigma_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

Спектральное разложение-2.

Оказывается, если $\mathcal{A}$ — банахова алгебра линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$, то банахово пространство $\mathbb{B}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{B} = \oplus \sum_{j} P(\sigma_j)\mathbb{B}, \quad P(\sigma_j)P(\sigma_k) = 0, \quad j \neq k, \quad P(\sigma_j)^2 = P(\sigma_j).$$