Лекция 3. Интеграл Лебега. Пространства Лебега

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

29 сентября 2011 г.

Измеримые функции

Интеграл Лебега, конечно, строиться не для всех функций, а только для так называемых измеримых. В дальнейшем для удобства вместо тройки $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$ мы будем писать просто $(X, \mathcal{A}, \mu)$, понимая под $\mathcal{A}$ уже полученную $\sigma-$алгебру измеримых множеств, а под μ уже продолженную по Лебегу меру. Итак, пусть у нас имеется измеримое пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Дадим определение.

Определение 1. *Функция $f(x) : X \to \mathbb{R}^1$ называется измеримой, если для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ множество*

$$\{x \in X : \ f(x) \leqslant c\} \in \mathcal{A}.$$

Свойства измеримых функций

Нетрудно доказать простейшие свойства измеримых функций, а именно, что измеримые функции образуют линейное пространство. Кроме того, композиция $\varphi \circ f$ непрерывной функции $\varphi(y)$, которая, кстати говоря, тоже измерима, и измеримой функции $f(x)$ является тоже измеримой. Произведение измеримых функций измеримо. Частное $f(x)/g(x)$ двух измеримых функций измеримо при естественном условии, что $g(x) \neq 0$.

Простые функции

Для дальнейшего нам необходимо ввести так называемые простые функции. Пусть

$$\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A},$$

а $\chi_{A_i}(x)$ — это характеристическая функция множества A_i, т. е.

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in A_i; \\ 0, & \text{при} \quad x \notin A_i. \end{cases}$$

Дадим определение.

Определение 2. *Функция*

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \quad c_i \in \mathbb{R}^1$$

называется простой.

Представление функции

Очевидно, что простые функции измеримы. Заметим теперь, что всякую функцию

$$f(x) : X \to \mathbb{R}^1$$

можно представить в следующем виде:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \tag{1}$$

где

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}. \tag{2}$$

Очевидно, что измеримость функции $f(x)$ эквивалентна измеримости каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$.

Интеграл Лебега для неотрицательных функций

Теперь мы в состоянии дать определение интеграла Лебега. Пусть мера μ является неотрицательной. Сначала определим интеграл Лебега от простой функции следующим образом:

$$\int\limits_X h(x)\,\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i). \tag{3}$$

Теперь предположим, что измеримая функция $f(x)$ является неотрицательной. Тогда определим интеграл Лебега от этой функции следующим образом

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) =$$

$$= \sup\left\{\int\limits_X h(x)\mu(dx)\Big|h(x) \geqslant 0 \text{ и } f(x) \geqslant h(x)\ \mu - \text{п. вс.}\right\}. \tag{4}$$

Общий интеграл Лебега

Здесь мы ввели новое понятие «$\mu-$п.вс.», которое означает, что множество, на котором не выполняется некоторое свойство имеет нулевую меру. Теперь осталось распространить интеграл Лебега на случай произвольных измеримых функций. Делается это следующим образом:

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int\limits_X f_+(x)\mu(dx) - \int\limits_X f_-(x)\mu(dx).$$

Важное свойство интеграла Лебега

Несложно доказать, что множество интегрируемых по Лебегу функций образует линейное пространство. Заметим, что в отличие от интеграла Римана для интегрируемости по Лебегу функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $|f(x)|$, которая, очевидно, измерима в силу измеримости $f(x)$, была интегрируема по Лебегу, причем имеет место следующее неравенство:

$$\left| \int\limits_X f(x)\mu(dx) \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\mu(dx).$$

Поточечная и равномерная сходимости

До сих пор в курсе вещественного анализа у нас имелось два вида сходимостей функциональных последовательностей $\{f_n(x)\}$ — это поточечная и равномерная. В связи с введением измеримого пространства с мерой, т. е. тройки $(X, \mathcal{A}, \mu)$ можно ввести еще два типа сходимостей — это сходимость по мере μ и сходимость $\mu-$почти всюду.

Определение 3. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся по мере* μ *к функции* $f(x)$, *если для всякого* $c > 0$ *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant c\}\right) = 0.$$

Определение 4. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся* $\mu-$*почти всюду к функции* $f(x)$, *если множество точек из* X, *на которых последовательность* $\{f_n(x)\}$ *не сходится к функции* $f(x)$ *имеет нулевую* $\mu-$*меру.*

Связь различных типов сходимостей

Возникает естественный вопрос о том, как связаны эти четыре типа сходимостей функциональных последовательностей. Имеет место следующая цепочка связей этих понятий:

$$\boxed{\textbf{равномерная сходимость}} \subset \boxed{\textbf{поточечная сходимость}} \subset$$

$$\subset \boxed{\textbf{сходимость п. вс.}} \subset \boxed{\textbf{сходимость по мере}}.$$

Обратная связь сходимостей

Оказывается, что есть в некотором смысле и обратная связь этих понятий. Так оказывается, что у всякой сходящейся по мере функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ существует подпоследовательность $\{f_{n_m}(x)\}$, сходящаяся почти всюду. Кроме того, известная теорема Д. Ф. Егорова утверждает, что у каждой почти всюду сходящейся функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое подмножество $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

и $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на X_ε. Отметим, однако, что можно привести пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящейся по мере, но не сходящейся почти всюду.

Важные свойства интеграла Лебега. $\sigma-$аддитивность. Первая теорема

Теорема

Если $A = \bigcup_n A_n$ *— конечное или счетное объединение непересекающихся измеримых множеств и функция* $f(x)$ *интегрируема по множеству* A*, то верно равенство*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu,$$

причем из существования интеграла в левой части следует существование всех интегралов в правой части и сходимость ряда.

Важные свойства интеграла Лебега. $\sigma-$аддитивность. Вторая теорема

Теорема

Если $A = \bigcup_n A_n$ *— конечное или счетное объединение непересекающихся измеримых множеств, функция* $f(x)$ *интегрируема по каждому из множеств* A_n *и ряд*

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu \tag{5}$$

сходится, то f *интегрируема на* A *и верно равенство*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu.$$

Важные свойства интеграла Лебега. Неравенство Чебышева

Теорема

Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$ *— суммируемая на* A *функция,* $c > 0$ *— произвольное положительное число. Тогда*

$$\mu\{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Доказательство неравенства Чебышева

Для доказательства обозначим $A' = \{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\}$. Прежде всего следует заметить, что множество A' измеримо в силу измеримости функции φ, которая, напоминаем, является необходимым условием интегрируемости. Теперь в силу только что установленных свойств аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int_A \varphi(x)\,d\mu = \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu + \int_{A \setminus A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant c\mu(A').$$

Осталось лишь разделить полученное неравенство на положительное число c.

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Теорема

Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве A, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $e \subset A$ с $\mu(e) < \delta$ имеет место оценка

$$\left| \int_e f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство теоремы-1

Легко видеть, что для ограниченной функции утверждение теоремы тривиально. В общем же случае положим

$$A_n = \{x \in A \mid n \leqslant |f(x)| < n+1\}, \quad B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N = A \backslash B_N.$$

В силу теоремы о $\sigma-$аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int_A |f(x)|\, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu$$

и, в частности, ряд в правой части сходится. Тогда можно выбрать такое число N, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu = \int_{C_N} |f(x)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Доказательство теоремы-2

Выберем еще

$$\delta \in \left(0; \frac{\varepsilon}{2(N+1)}\right).$$

Тогда при $\mu(e) < \delta$, $e \subset A$ имеем

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,d\mu =$$

$$= \int_{e\cap B_N} |f(x)|\,d\mu + \int_{e\cap C_N} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

где первое слагаемое мы оценили в силу

$$\mu(e \cap B_N) \leqslant \mu(e) < \frac{\epsilon}{2(N+1)}, \quad |f(x)|_{B_N} < N+1,$$

а второе — в силу условия (6).

Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема Лебега

Теорема

Пусть:
1) последовательность измеримых функций f_n сходится всюду на множестве A к функции f;
2) для всех n всюду на множестве A имеет место неравенство $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, где
3) функция $\varphi(x)$ интегрируема по множеству A.
Тогда
1) функции f и f_n при всех n интегрируемы на A и
2) имеет место предельное равенство

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu. \tag{7}$$

Доказательство теоремы Лебега-1

Прежде всего понятно, что функции $\{f_n(x)\}$ и предельная функция $f(x)$ измеримы.
Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta > 0$, что для любого множества $B \subset A$ с $\mu(B) < \delta$ выполняется

$$\int_B \varphi(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но в силу теоремы Егорова это множество B можно выбрать таким образом, чтобы на $C \equiv A \setminus B$ сходимость

$$f_n \to f$$

была равномерной на C.

Доказательство теоремы Лебега-2

Тогда мы можем выбрать такое $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ и при любом $x \in C$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}.$$

Но при этом сразу получаем, что при всех $n > N$

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_n(x)\,d\mu \right| \leqslant \\ \leqslant \left| \int_C (f(x) - f_n(x))\,d\mu \right| + \left| \int_B f(x)\,d\mu \right| + \\ + \left| \int_B f_n(x)\,d\mu \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (8) \end{aligned}$$

Теорема Беппо—Леви

Теорема

Пусть всюду на A выполнены неравенства

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots,$$

причем функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, интегрируемы на A и

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Тогда
1) почти всюду на A существует конечный предел

$$f(x) \equiv \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

2) функция f интегрируема на A и $\int_A f_n(x)\, d\mu \to \int_A f(x)\, d\mu$.

Доказательство теоремы Беппо—Леви-1

Ограничимся случаем, когда $f_1(x) \geqslant 0$, потому что общий случай можно свести к нему введением функций

$$\tilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x \in A \mid f_n \to +\infty\}.$$

Заметим, что

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}, \quad \text{где} \quad \Omega_n^{(r)} = \{x \in A \mid f_n(x) > r\}.$$

Доказательство теоремы Беппо—Леви-2

Из неравенства Чебышева следует, что при всех n, r

$$\mu(\Omega_n^r) \leqslant \frac{K}{r},$$

откуда с учетом

$$\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots$$

имеем

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}.$$

Но при любом r верно включение $\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, поэтому $\mu(\Omega) \leqslant \frac{K}{r}$, откуда следует, что $\mu(\Omega) = 0$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство теоремы Беппо—Леви-3

Для доказательства предельного соотношения введем прежде всего обозначение

$$A_m \equiv \{x \in A \mid m - 1 \leqslant f(x) < m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и положим $\varphi(x) = m$ на A_m. Докажем, что $\varphi(x)$ интегрируема на A. После этого останется лишь воспользоваться теоремой Лебега.

Положим

$$B_l = \sum_{m=1}^{l} A_m.$$

Доказательство теоремы Беппо—Леви-4

Поскольку на множествах B_l функции f_n и f ограничены и $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$, то в силу теоремы Лебега имеем

$$\int_{B_l} \varphi(x)\, d\mu \leqslant \int_{B_l} f(x)\, d\mu + \mu(A) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{B_l} f_n(x)\, d\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

Но при всех l верно

$$\int_{B_l} \varphi(x)\, d\mu = \sum_{m=1}^{l} m\mu(A_m).$$

Равномерная ограниченность этих сумм означает (абсолютную) сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\mu(A_m) = \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Теорема Фату

Теорема

Если последовательность интегрируемых на множестве A *неотрицательных функций* f_n *сходится почти всюду на* A *к функции* f *и при любом* $n \in \mathbb{N}$

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K,$$

то f *интегрируема на* A *и*

$$\int_A f(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Доказательство теоремы Фату-1

Положим

$$\varphi_n = \inf_{k \geqslant n} f_k(x).$$

Полученные функции измеримы, т. к.

$$\{x \in A \mid \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x \in A \mid f_k(x) < c\}.$$

Далее, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, поэтому φ_n интегрируемы и

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\varphi_n(x) \to f(x)$$

почти всюду (а именно, в тех же точках, где $f_n(x) \to f(x)$).

Доказательство теоремы Фату-2

Поскольку, к тому же, при всех $x \in A$

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots,$$

то по теореме Б. Леви, примененной к последовательности $\{\varphi_n\}$, имеем интегрируемость функции f и предельное соотношение

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \to \int_A f(x)\, d\mu. \tag{10}$$

Наконец, из (9) и (10) получаем неравенство, которое утверждается в условии теоремы.

Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры

Мы ограничимся случаем так называемой σ-конечной меры. Именно, будем говорить, что на пространстве X введена σ-конечная мера, если существует такая последовательность $X_n \subset X$, что $\mu(X_n) < +\infty$, $X_n \subset X_{n+1}$ и $X = \bigcup_n X_n$. Любая такая последовательность называется исчерпывающей. (Приведем простой пример меры, не являющейся σ-конечной: возьмем меру на прямой и положим меру каждой точки равной единице.)

Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры

Определение 5. Измеримая функция f, определенная на множестве X σ-конечной меры, называется суммируемой на X, если она суммируема на каждом его измеримом подмножестве конечной меры и если для любой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{X_n} f(x)\,d\mu$$

существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f по множеству X и по-прежнему обозначается символом $\int_A f(x)\,d\mu$.

Для интегралов по множествам бесконечной меры сохраняют справедливость все предыдущие результаты, кроме утверждения об интегрируемости ограниченной измеримой функции.

Метрическое пространство

Теперь наша задача рассмотреть важный класс интегрируемых по Лебегу функций. Из определения интеграла Лебега ясно, что множество интегрируемых по Лебегу функций образуют линейное пространство, которое мы будем обозначать следующим образом — $\mathfrak{L}(X)$. Напомним определение так называемого *метрического пространства.*

Определение 6. *Множество Y называется метрическим пространством, если на нем задана вещественная функция $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что выполнены следующие свойства:*

(i) $d(x, y) = 0$, *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

Как сделать множество интегрируемых по Лебегу функций метрическим пространством?

Теперь введем на множестве $\mathcal{L}(X)$ — всех интегрируемых на множестве X функций относительно измеримого пространства с положительной мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — вещественную функцию

$$d(f,g) = \int\limits_X |f(x) - g(x)| \; \mu(dx). \tag{11}$$

Ясно, что на множестве $\mathcal{L}(X)$ эта функция удовлетворяет условиям (ii) и (iii) определения 6. Однако, не выполняется требование (i). Действительно, пусть интегрируемые по Лебегу функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются только на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, тогда, очевидно, $d(f,g) = 0$, но функции $f(x) \neq g(x)$ на X.

Класс эквивалентных функций

Что с этим нам делать? Однако, если мы вместо функций $f(x) \in \mathfrak{L}(X)$ будем рассматривать классы функций, такие, что две функции $f(x), g(x) \in \mathfrak{L}(X)$ принадлежат одному классу $\{f\}$, если они отличаются друг от друга на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, то на полученном пространстве, которое мы будем обозначать через $L(X)$, для функции

$$d^{\circ}(\{f\},\{g\}) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\, \mu(dx), \tag{12}$$

где $f(x) \in \{f\}$, $g(x) \in \{g\}$, т. е. в данной формуле мы в левой части рассматриваем метрику на классах функций, а в правой части мы берем некоторые представители из этих классов.

Корректность определения метрики

Естественно, нам нужно доказать, что значение величины в левой части не зависит от выбора представителей в правой части. Доказывается это следующим образом. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in \{f\}$ и $g_1(x), g_2(x) \in \{g\}$. Тогда имеют место следующие неравенства, в силу того, что выполнены свойства (ii) и (iii) определения 11 для функции (11):

$$d(f,g) \leqslant d(f,f_1) + d(f_1,g_1) + d(g_1,g) = d(f_1,g_1), \tag{13}$$

$$d(f_1,g_1) \leqslant d(f_1,f) + d(f,g) + d(g,g_1) = d(f,g), \tag{14}$$

поскольку в силу определения (11) функции $d(\cdot,\cdot)$ имеют место равенства

$$d(f,f_1) = d(f_1,f) = 0, \quad d(g,g_1) = d(g_1,g) = 0.$$

Следовательно, из неравенств (13) и (14) вытекает, что

$$d(f,g) = d(f_1,g_1).$$

Класс интегрируемых по Лебегу функций—линейное пространство

Стало быть, функция d°, определенная формулой (12), определена корректно. Но теперь у нас для этой функции $d^\circ(\cdot,\cdot)$ помимо условий (ii) и (iii) выполнено и свойство (i). Таким образом, пространство классов интегрируемых функций $L(X)$ является метрическим пространством относительно метрики (12). Кроме того, в силу линейности пространства $\mathcal{L}(X)$ линейным является и пространство классов функций $L(X)$. Таким образом, пространство классов функций $\{f\} \in L(X)$ является линейным метрическим пространством.

Определение нормированного пространства

Определение 7. *Линейное пространство $\mathcal{E}$ называется нормированным, если на $\mathcal{E}$ задана такая функция $\|\cdot\| : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1_+$, что выполнены свойства*

(i) $\|f\| = 0$, *тогда и только тогда, когда* $f = \theta$ — *нулевой элемент линейного пространства* $\mathcal{E}$;

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{C}$ *и всех* $f \in \mathcal{E}$;

(iii) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ *для всех* $f, g \in \mathcal{E}$.

Нетрудно проверить, что линейное нормированное пространство является метрическим относительно метрики $d(x, y) = \|x - y\|$. Заметим, что если мы определим на линейном пространстве $L(X)$ норму следующим образом

$$\|\{f\}\| = \int\limits_X |f(x)|\mu(dx), \quad f(x) \in \{f\}, \tag{15}$$

то мы получим линейное нормированное пространство $L(X)$.

Пространства Лебега

Теперь мы рассмотрим некоторые классы функций, важных в приложениях. Дадим определение. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — это измеримое пространство с положительной мерой.

Определение 8. *Измеримые функции $f(x)$, у которых*

$$|f(x)|^p \in \mathfrak{L}(X) \quad \text{при} \quad p \in (0, +\infty) \tag{16}$$

будем обозначать как $\mathfrak{L}^p(X)$.

Уже стандартным образом разбивая функции $f(x)$ из класса $\mathfrak{L}^p(X)$ на классы функций $\{f\}$, мы получим класс $L^p(X)$ при $p \in (0, +\infty)$.

Пространства $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty]$

Заметим, что класс функций $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным нормированным пространством. Докажем это. Действительно, пусть $f(x), g(x) \in L^p(X)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тогда имеет место элементарное неравенство

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \leqslant c(p) \left(|\alpha|^p |f(x)|^p + |\beta|^p |g(x)|^p\right) \in L(X),$$

поскольку пространство $L(X)$ является линейным. Стало быть, пространство $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным. Теперь определим на линейном пространстве $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ следующую числовую функцию:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} : L^p(X) \to \mathbb{R}^1_+ \qquad (17)$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет свойствам (i) и (ii) определения нормы.

Неравенство Минковского

Докажем, что для функции (17) выполнено неравенство треугольника (iii) определения нормы, т. е. докажем так называемое неравенство Минковского:

$$\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in [1+\infty). \tag{18}$$

С этой целью заметим, что при $p = 1$ это неравенство есть следствия неравенства

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{для всех} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Неравенство Гельдера

Теперь нам нужно рассмотреть случай $p \in (1, +\infty)$. Но для этого нам предварительно нужно доказать так называемое *неравенство Гельдера.*

Теорема

Пусть $f \in L^p(X)$ *и* $g \in L^q(X)$ *при* $p, q \in (1, +\infty)$, *причем*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тогда $fg \in L^1(X)$ *и имеет место неравенство*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{19}$$

Доказательство неравенства Гельдера-1

Для неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}^1_+$ имеет место хорошо известное неравенство:

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{20}$$

Поскольку $f \in L^p(X)$ и $g \in L^q(X)$, то f и g $\mu-$измеримы, а значит, $\mu-$измеримо и их произведение. Кроме того, их произведение определено почти всюду в Ω. Теперь возьмем

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

и подставим их в неравенство (20), откуда получим неравенство

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Доказательство неравенства Гельдера-2

Интегрируя обе части по мере μ на множестве X, получим неравенство

$$\int\limits_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \mu(dx) \leqslant 1.$$

Откуда сразу же вытекает неравенство Гельдера.

Неравенство Минковского

Теорема

Пусть $f, g \in L^p(X)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *тогда имеет место неравенство*

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \; \mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \; \mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \; \mu(dx)\right)^{1/p}. \quad (21)$$

Доказательство неравенства Минковского-1

Прежде всего отметим, что в силу неравенства

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^{p-1}\left[|f(x)|^p+|g(x)|^p\right]$$

сумма функций $f(x)+g(x) \in L^p(X)$.
Перейдем к доказательству неравенства. Случай $p=1$ очевиден. Рассмотрим теперь случай, когда $p \in (1,+\infty)$.
Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|+|f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|.$$

Воспользуемся теперь неравенством Гельдера для обоих слагаемых в правой части этого неравенства.

Действительно, имеем

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|f(x)|\;\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\;\mu(dx)\right)^{1/q}\left(\int\limits_X |f(x)|^p\;\mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p}\;\mu(dx)\right)^{1/q}\left(\int\limits_X |f(x)|^p\;\mu(dx)\right)^{1/p}, \quad q=\frac{p}{p-1}.$$

Доказательство неравенства Минковского-3

Аналогичное неравенство получается и для второго слагаемого. Таким образом, получили

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \ \mu(dx) \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \ \mu(dx) \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left[\left(\int\limits_X |f(x)|^p \ \mu(dx) \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \ \mu(dx) \right)^{1/p} \right].$$

Откуда получаем требуемое неравенство.

Линейное пространство $L^\infty(X)$

Следовательно, числовая функция (17) является нормой. Значит, линейное пространство $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным нормированным относительно указанной нормы. К настоящему моменту мы разобрали случай, когда $p \in [1, +\infty)$. Теперь нам нужно рассмотреть случай, когда $p = +\infty$. Сначала введем класс функций $\mathfrak{L}^\infty(X)$. Дадим определение.

Определение 9. *Классом $\mathfrak{L}^\infty(X)$ мы назовем класс $\mu-$измеримых функций, которые $\mu-$почти всюду являются ограниченными.*

$$\|f\|_\infty \equiv \inf\{c : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c\} = 0\}. \qquad (22)$$

Докажем, что эта функция действительно является нормой на $L^\infty(X)$.
Таким образом, функция (22) является нормой на линейном пространстве $L^\infty(X)$.

Неравенство Гельдера для $L^\infty(X)$ и $L^1(X)$

Необходимость введения пространства $L^\infty(X)$ вызвана, например, следующим утверждением, которое мы приведем без доказательства.

Теорема

Неравенство Гельдера остается справедливым для функции $f(x) \in L^1(X)$ и функции $g(x) \in L^\infty(X)$ и имеет вид:

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$